Philipps-Universität Marburg **WS 2010/2011**
Fachgebiet Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Steffen Dereich

Ausgabe: Di 9.11.2010
Abgabe: Mo 22.11.2010

2. Übungsblatt „Zinsstrukturmodelle“

Hausaufgaben

Annahmen: Auf dem gesamten Übunsblatt bezeichnet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, der den üblichen Bedingungen genügt. Ferner bezeichne Q ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $Q \ll P$.

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Es gelte

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \mathcal{E}(\gamma \cdot W)_\infty$$

für ein $\gamma \in \mathcal{L}$ für welches $\mathcal{E}(\gamma \cdot W)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Man zeige, dass für einen Itô-Prozess $(M(t))$, der ein lokales P-Martingal ist

$$(M(t) - \langle M, \gamma \cdot W \rangle_t)_{t \geq 0}$$

ein lokales Q-Martingal ist.

2. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Es sei $(Z(t))$ ein rechtstetiges gleichgradig integrierbares P-Martingal mit

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = Z(\infty).$$

Man zeige, dass für jede Stoppzeit T

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big|_{\mathcal{F}_T} := \frac{\mathrm{d}Q|_{\mathcal{F}_T}}{\mathrm{d}P|_{\mathcal{F}_T}} = Z_T$$

gilt.

3. Hausaufgabe: **6 Punkte**
Es bezeichne $(Z(t))$ den Dichteprozesses

$$Z(t) := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big|_{\mathcal{F}_t} := \frac{\mathrm{d}Q|_{\mathcal{F}_t}}{\mathrm{d}P|_{\mathcal{F}_t}}.$$

Man zeige, dass für einen adaptierten Prozess $(M(t))_{t \geq 0}$ folgende Äquivalenz gilt:

$$(M(t)) \text{ ist } Q\text{-Martingal} \iff (Z(t)M(t))_{t \geq 0} \text{ ist } P\text{-Martingal.}$$

Man zeige, dass diese Äquivalenz auch für lokale Martingale gilt, wenn man zusätzlich annimmt, dass $(Z(t))$ rechtsstetig und $(M(t))$ stetig sind.

Hinweis: Nutzen Sie zum Beweis der 2. Aussage die Stoppzeiten $T_n := \inf\{t \geq 0 : |M(t) - M(0)| \geq n\}$.

4. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Die zugrundeliegende Filtration sei eine Brownsche Filtration erzeugt von einem multivariaten Wienerprozess $(W(t))$. Es gelte $Q \sim P$ mit $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \mathcal{E}(\gamma \cdot W)_\infty$ für ein gleichgradig integrierbares Martingal $\mathcal{E}(\gamma \cdot W)$ und es sei

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)^T \,\mathrm{d}s.$$

Man zeige, dass unter Q der Martingaldarstellungssatz für den Wienerprozess $(W^*(t))$ gilt, d.h. für alle lokalen Q-Martingale $(M(t))$ existiert $\gamma \in \mathcal{L}$ mit

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \gamma(s) \,\mathrm{d}W^*(s).$$

Insbesondere besitzt $M(t)$ eine stetige Version und ist ein Itô-Prozess.

Generell können die Hausaufgaben in festen Gruppen von maximal 2 Studierenden bearbeitet und abgegeben werden.