Philipps-Universität Marburg
Fachgebiet Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Steffen Dereich

WS 2010/2011

Ausgabe: Di 23.11.2010
Abgabe: Mo 6.12.2010

3. Übungsblatt „Zinsstrukturmodelle“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Man zeige, dass

$$r(t) = r_0 e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}(e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} \, \mathrm{d}W^*(s)$$

die eindeutige Lösung der SDE (Vasicek Modell)

$$\mathrm{d}r(t) = (b + \beta r(t)) \, \mathrm{d}t + \sigma \, \mathrm{d}W_t^*, \quad r(0) = r_0$$

ist.

2. Hausaufgabe: **6 Punkte**

Es bezeichne $W = (W_1, \ldots, W_d)^T$ einen d-dimensionalen Wienerprozess und $X_1, \ldots, X_d$ seien Lösung der SDE

$$\mathrm{d}X_i(t) = c \, X_i(t) \, \mathrm{d}t + \rho \, \mathrm{d}W_i(t)$$

Man zeige, dass $Y = X_1^2 + \cdots + X_d^2$ die SDE

$$\mathrm{d}Y(t) = (b + \beta Y(t)) \, \mathrm{d}t + \sigma \sqrt{Y(t)} \, \mathrm{d}B(t)$$

für einen geeignet zu definierenden Wienerprozess B und geeignete Konstanten b, β und σ löst.

3. Hausaufgabe: **10 Punkte**

Betrachten Sie das Black-Scholes Modell mit endlichem Zeithorizont $[0, T]$, d.h. das Finanzmarktmodell bestehend aus einer Aktie $(S(t))_{t \in [0,T]}$ mit

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t) \, \mathrm{d}t + \sigma S(t) \, \mathrm{d}W(t), \quad S(0) > 0$$

und einer risikolosen Anleihe $B(t) = e^{rt}$ (Numeraire), wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ konstant sind.

(a) Geben Sie die explizite Lösung der SDE an. Was ist der zugehörige diskontierte Preisprozess?

(b) Beweisen Sie die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes auf $[0, T]$.

(c) Ist das Black-Scholes Modell vollständig, wenn $(\mathcal{F}_t)$ die von W erzeugte Brownsche Filtration ist?

(d) Man bestimme den Marktpreis des Risikos.

(e) Stellen Sie den Preis (zur Zeit 0) einer Option mit Ausschüttung $f(S_T)$ zur Zeit T mittels eines Erwartungswerts $\mathbb{E}[\varphi_f(X)]$ dar, wobei X eine standardnormalverteilte ZV bezeichne und φ_f eine geeignet zu wählende Funktion ist.

(f) Man starte zur Zeit 0 mit Vermögen 1 und investiere zu jeder Zeit den festen Bruchteil $\alpha \in \mathbb{R}$ seines Vermögens in die Aktie. Konstruieren Sie eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, die dieser Investition entspricht. Angenommen der Zeithorizont T konvergiere gegen unendlich, welches α ist optimal?