Kapitel 11

Die Normal-Verteilung

Fassung vom 2. Februar 2001

11.1 Definition der Normal-Verteilung

Bisher haben wir nur diskret verteilte Zufallsvariable betrachtet. Bei physikalischen Messungen, wie z.B. Länge, Gewicht, usw., muß man aber *kontinuierlich* verteilte Zufallsvariable X zulassen, deren Wertebereich $\mathbb{R}$ oder Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Dementsprechend ist der Wahrscheinlichkeitsraum sehr kompliziert. Im Allgemeinen ist man aber nur an der Wahrscheinlichkeit P von Ereignissen der Gestalt

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \ ,$$

wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist, interessiert, z.B.

$$P(a \leqslant X \leqslant b) := P\{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$$

oder

$$P(X \leqslant b) := P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant b\}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, und dazu genügt es, die Verteilung von X zu kennen. Die wichtigste Verteilung bei kontinuierlich verteilten Zufallsvariablen X ist die Normalverteilung.

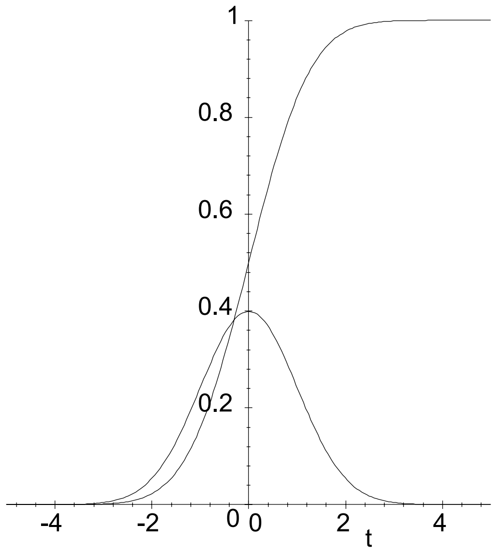
DEFINITION Die Funktion $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \Phi(z)$ definiert durch

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

heißt *Standard-Normal-Verteilung* . Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

nennt man die *Dichtefunktion* von Φ.



$$\varphi : t \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{und} \quad \Phi : z \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

BEMERKUNG 1 $\Phi(z)$ ist nicht durch eine einfache Formel, sondern in Tabellen gegeben. Da nach Beispiel 7.6.4

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; 1,$$

folgt mit der Zerlegungsregel

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}\ .$$

Demnach wird nur $\Phi(z)$ für $z \geqslant 0$ tabelliert:

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0	.5	.2	.57926	.4	.65542	.6	.72575	.8	.78814
.01	.50399	.21	.58317	.41	.6591	.61	.72907	.81	.79103
.02	.50798	.22	.58706	.42	.66276	.62	.73237	.82	.79389
.03	.51197	.23	.59095	.43	.6664	.63	.73565	.83	.79673
.04	.51595	.24	.59483	.44	.67003	.64	.73891	.84	.79955
.05	.51994	.25	.59871	.45	.67364	.65	.74215	.85	.80234
.06	.52392	.26	.60257	.46	.67724	.66	.74537	.86	.80511
.07	.5279	.27	.60642	.47	.68082	.67	.74857	.87	.80785
.08	.53188	.28	.61026	.48	.68439	.68	.75175	.88	.81057
.09	.53586	.29	.61409	.49	.68793	.69	.7549	.89	.81327
.1	.53983	.3	.61791	.5	.69146	.7	.75804	.9	.81594
.11	.5438	.31	.62172	.51	.69497	.71	.76115	.91	.81859
.12	.54776	.32	.62552	.52	.69847	.72	.76424	.92	.82121
.13	.55172	.33	.6293	.53	.70194	.73	.7673	.93	.82381
.14	.55567	.34	.63307	.54	.7054	.74	.77035	.94	.82639
.15	.55962	.35	.63683	.55	.70884	.75	.77337	.95	.82894
.16	.56356	.36	.64058	.56	.71226	.76	.77637	.96	.83147
.17	.56749	.37	.64431	.57	.71566	.77	.77935	.97	.83398
.18	.57142	.38	.64803	.58	.71904	.78	.7823	.98	.83646
.19	.57535	.39	.65173	.59	.7224	.79	.78524	.99	.83891

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1.0	.84134	1.2	.88493	1.4	.91924	1.6	.9452	1.8	.96407
1.01	.84375	1.21	.88686	1.41	.92073	1.61	.9463	1.81	.96485
1.02	.84614	1.22	.88877	1.42	.9222	1.62	.94738	1.82	.96562
1.03	.84849	1.23	.89065	1.43	.92364	1.63	.94845	1.83	.96638
1.04	.85083	1.24	.89251	1.44	.92507	1.64	.9495	1.84	.96712
1.05	.85314	1.25	.89435	1.45	.92647	1.65	.95053	1.85	.96784
1.06	.85543	1.26	.89617	1.46	.92785	1.66	.95154	1.86	.96856
1.07	.85769	1.27	.89796	1.47	.92922	1.67	.95254	1.87	.96926
1.08	.85993	1.28	.89973	1.48	.93056	1.68	.95352	1.88	.96995
1.09	.86214	1.29	.90147	1.49	.93189	1.69	.95449	1.89	.97062
1.1	.86433	1.3	.9032	1.5	.93319	1.7	.95543	1.9	.97128
1.11	.8665	1.31	.9049	1.51	.93448	1.71	.95637	1.91	.97193
1.12	.86864	1.32	.90658	1.52	.93574	1.72	.95728	1.92	.97257
1.13	.87076	1.33	.90824	1.53	.93699	1.73	.95818	1.93	.9732
1.14	.87286	1.34	.90988	1.54	.93822	1.74	.95907	1.94	.97381
1.15	.87493	1.35	.91149	1.55	.93943	1.75	.95994	1.95	.97441
1.16	.87698	1.36	.91309	1.56	.94062	1.76	.9608	1.96	.975
1.17	.879	1.37	.91466	1.57	.94179	1.77	.96164	1.97	.97558
1.18	.881	1.38	.91621	1.58	.94295	1.78	.96246	1.98	.97615
1.19	.88298	1.39	.91774	1.59	.94408	1.79	.96327	1.99	.9767

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
2.0	.97725	2.2	.9861	2.4	.9918	.6	.99534	2.8	.99744
2.01	.97778	2.21	.98645	2.41	.99202	.61	.99547	2.81	.99752
2.02	.97831	2.22	.98679	2.42	.99224	.62	.9956	2.82	.9976
2.03	.97882	2.23	.98713	2.43	.99245	.63	.99573	2.83	.99767
2.04	.97932	2.24	.98745	2.44	.99266	.64	.99585	2.84	.99774
2.05	.97982	2.25	.98778	2.45	.99286	.65	.99598	2.85	.99781
2.06	.9803	2.26	.98809	2.46	.99305	.66	.99609	2.86	.99788
2.07	.98077	2.27	.9884	2.47	.99324	.67	.99621	2.87	.99795
2.08	.98124	2.28	.9887	2.48	.99343	.68	.99632	2.88	.99801
2.09	.98169	2.29	.98899	2.49	.99361	.69	.99643	2.89	.99807
2.1	.98214	2.3	.98928	2.5	.99379	.7	.99653	2.9	.99813
2.11	.98257	2.31	.98956	2.51	.99396	.71	.99664	2.91	.99819
2.12	.983	2.32	.98983	2.52	.99413	.72	.99674	2.92	.99825
2.13	.98341	2.33	.9901	2.53	.9943	.73	.99683	2.93	.99831
2.14	.98382	2.34	.99036	2.54	.99446	.74	.99693	2.94	.99836
2.15	.98422	2.35	.99061	2.55	.99461	.75	.99702	2.95	.99841
2.16	.98461	2.36	.99086	2.56	.99477	.76	.99711	2.96	.99846
2.17	.985	2.37	.99111	2.57	.99492	.77	.9972	2.97	.99851
2.18	.98537	2.38	.99134	2.58	.99506	.78	.99728	2.98	.99856
2.19	.98574	2.39	.99158	2.59	.9952	.79	.99736	2.99	.99861

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
3.0	.99865	3.2	.99931	3.4	.99966	3.6	.99984	3.8	.99993
3.01	.99869	3.21	.99934	3.41	.99968	3.61	.99985	3.81	.99993
3.02	.99874	3.22	.99936	3.42	.99969	3.62	.99985	3.82	.99993
3.03	.99878	3.23	.99938	3.43	.9997	3.63	.99986	3.83	.99994
3.04	.99882	3.24	.9994	3.44	.99971	3.64	.99986	3.84	.99994
3.05	.99886	3.25	.99942	3.45	.99972	3.65	.99987	3.85	.99994
3.06	.99889	3.26	.99944	3.46	.99973	3.66	.99987	3.86	.99994
3.07	.99893	3.27	.99946	3.47	.99974	3.67	.99988	3.87	.99995
3.08	.99896	3.28	.99948	3.48	.99975	3.68	.99988	3.88	.99995
3.09	.999	3.29	.9995	3.49	.99976	3.69	.99989	3.89	.99995
3.1	.99903	3.3	.99952	3.5	.99977	3.7	.99989	3.9	.99995
3.11	.99906	3.31	.99953	3.51	.99978	3.71	.9999	3.91	.99995
3.12	.9991	3.32	.99955	3.52	.99978	3.72	.9999	3.92	.99996
3.13	.99913	3.33	.99957	3.53	.99979	3.73	.9999	3.93	.99996
3.14	.99916	3.34	.99958	3.54	.9998	3.74	.99991	3.94	.99996
3.15	.99918	3.35	.9996	3.55	.99981	3.75	.99991	3.95	.99996
3.16	.99921	3.36	.99961	3.56	.99981	3.76	.99992	3.96	.99996
3.17	.99924	3.37	.99962	3.57	.99982	3.77	.99992	3.97	.99996
3.18	.99926	3.38	.99964	3.58	.99983	3.78	.99992	3.98	.99997
3.19	.99929	3.39	.99965	3.59	.99983	3.79	.99992	3.99	.99997

DEFINITION Eine Zufallsvariable X heißt *normalverteilt* mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 , man schreibt dann

$$X \text{ ist } N(\mu,\sigma) - \text{verteilt} ,$$

wenn

$$P(X \leqslant b) = N(\mu,\sigma)(b) := \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) \qquad \text{für alle } b \in \mathbb{R}$$

gilt.

BEMERKUNG 2 Ist X $N(\mu,\sigma)-$verteilt, so gilt

$$P(X \leqslant b) = P(X < b) = 1 - P(X \geqslant b) = 1 - P(X > b)$$

und

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) .$$

Insbesondere gilt

$$P(\mu - r\cdot\mu \leqslant X \leqslant \mu + r\cdot\mu) = P(X \leqslant \mu + r\cdot\mu) - P(X \leqslant \mu - r\cdot\mu) =$$

$$= \Phi\left(\frac{r\cdot\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-r\cdot\mu}{\sigma}\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{r\cdot\mu}{\sigma}\right) - 1 .$$

BEISPIEL Bei einem Präparat sei das Gewicht X des Wirkstoffes in den Tabletten $N(\mu,\sigma)$-verteilt mit $\mu = 80\ mg$ und $\sigma = 2\ mg$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Tablette die Menge an Wirkstoff um höchstens 5 % von μ abweicht ? Es ist

$$P(\mu - 0.05\cdot\mu \leqslant X \leqslant \mu + 0.05\cdot\mu) = 2\cdot\Phi\left(\frac{0.05\cdot\mu}{\sigma}\right) - 1 = 2\cdot\Phi(2) - 1 =$$

$$= 2\cdot 0.97725 - 1 = 0.955 = 95.5\,\%$$

mit Hilfe der Tabelle.

Wie groß ist die Standard-Abweichung σ zu wählen, damit mindestens 99 % der Tabletten höchstens 5 % Abweichung von μ haben ? Nach obiger Rechnung muß gelten

$$2\cdot\Phi(\frac{0.05\cdot\mu}{\sigma}) - 1 \geqslant 0.99 ,$$

d.h.

$$\Phi(\frac{4}{\sigma}) \geqslant \frac{1.99}{2} = 0.995 .$$

Nach der Tabelle ist dies gerade erfüllt, wenn

$$\frac{4}{\sigma} \geqslant 2.58$$

gilt, also folgt

$$\sigma \leqslant \frac{4}{2.58} = 1.55 .$$

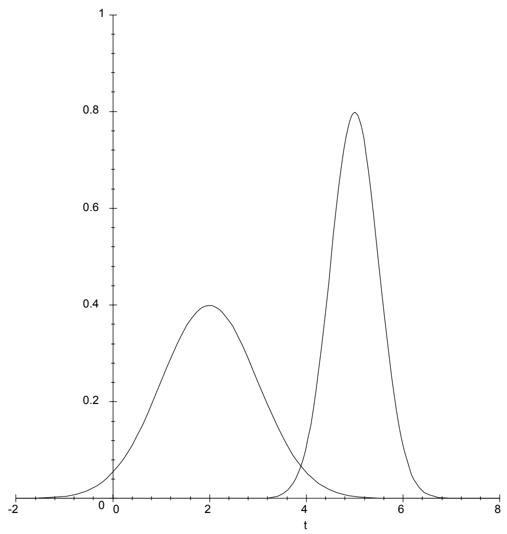
11.2 Berechnung der Normal-Verteilung

Ist X eine $N(\mu,\sigma)$-verteilte Zufallsvariable, so gilt

$$P(X \leqslant b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\, dt = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{b} \varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\, dt$$

nach der Verschiebungs- und Streckungsregel. Die $N(\mu,\sigma)-$Verteilung $b \longmapsto \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$ hat also die Dichte $t \longmapsto \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.



$$t \mapsto \varphi(t-2) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-2)^2}{2}}\, dt \quad , \quad t \mapsto 2 \cdot \varphi(2\cdot(t-5)) = \tfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2\cdot(t-5)^2}\, dt$$

Die Wendepunkte dieser Dichten liegen bei $\mu \pm \sigma$, d.h. 2 ± 1 und 5 ± 0.5 .

ANWENDUNG Zu einer Zufallsvariable X ist eine Meßreihe $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gegeben, und man vermutet, daß sie normalverteilt ist.

(a) Zuerst werden μ und σ mit Hilfe dieser Meßdaten geschätzt :

$$\mu := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{und} \quad \sigma^2 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 \ .$$

(b) Dann untersucht man graphisch, ob eine Normal-Verteilung vorliegt. Man unterteilt das Messintervall $[a,b]$ (mit $x_j \in [a,b]$ für alle j) in m Teilintervalle $I_1, I_2, \cdots, I_m$ der gleichen Länge L , wobei $m < n$, am besten so, daß $m \simeq \sqrt{n}$. Man definiert dann eine Treppenfunktion $\tilde{\varphi}$

durch

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{L} \cdot \frac{k}{n} \;\text{ auf } I_l \quad \text{ falls } k \text{ der Meßwerte } x_1, \cdots, x_n \text{ in } I_l \text{ liegen.}$$

Die Normierung ist gerade so gewählt, dass das Integral über $\tilde{\varphi}$, ebenso wie das über $\frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, den Wert 1 hat.

Ist $\tilde{\varphi}$ eine gute Approximation von $\frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, wobei μ und σ wie in (a) bestimmt sind, so geht man davon aus, daß X normalverteilt ist.

BEMERKUNG Eine naturwissenschaftliche Zufallsvariable X (z.B. das Geburtsgewicht) setzt sich aus vielen Faktoren X_j zusammen (z.B. genetischen Faktoren, Ernährung der Mutter, ...). Es gilt der *Zentrale Grenzwertsatz :*

Ist $X = X_1 + X_2 + \cdots$ *, und sind alle* X_j *klein gegen* X *und paarweise unabhängig, so ist* X *normal verteilt.*

Dies erklärt das häufige Auftreten von Normal-Verteilungen bei naturwissenschaftlichen Experimenten. Eine typische Situation wird auch durch Satz 11.3 beschrieben.

BEISPIEL Gewicht der Gesamtbevölkerung : Es ist nicht normalverteilt. Z.B. sind Alter und Geschlecht nicht kleine Einflußgrößen.

11.3 Normal- und Binomial-Verteilung

Ein typisches Problem der Statistik ist die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten. Wir diskutieren dies am Beispiel der Binomial-Verteilung. Ausgangspunkt ist der folgende

SATZ *Ist X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und Varianz $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$, und ist $\sigma^2 \gg 1$, (i.a. genügt $\sigma > 3$), so ist X annähernd $N(\mu, \sigma)$-verteilt, d.h es gilt*

$$P(X \leqslant k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot q^{n-j} \simeq \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) .$$

Mit Hilfe von Bemerkung 11.1.2 erhält man daraus

$$P(n \cdot p - z \cdot \sigma \leqslant X \leqslant n \cdot p + z \cdot \sigma) \simeq 2 \cdot \Phi\left(\frac{z \cdot \sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(z) - 1 =: \gamma(z) .$$

Für eine Stichprobe ω gilt also mitWahrscheinlichkeit $\gamma(z)$

$$n \cdot p - z \cdot \sigma \leqslant X(\omega) \leqslant n \cdot p + z \cdot \sigma .$$

Wählt man als Schätzwert für p den Wert

$$p_0 := \frac{X(\omega)}{n} ,$$

so erhält man

$$p - \frac{z \cdot \sigma}{n} \leqslant p_0 \leqslant p + \frac{z \cdot \sigma}{n} ,$$

und mit $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$ daraus

$$(p - p_0)^2 \leq \frac{z^2 \cdot (n \cdot p \cdot (1-p))}{n^2} = \frac{z^2}{n} p(1-p)$$

KOROLLAR *Ist X $b_{n,p}-$verteilt mit $\sigma^2 \gg 1$, so gilt (näherungsweise): Mit Wahrscheinlichkeit $\gamma(z) = 2 \cdot \Phi(z) - 1$ gilt für den Schätzwert*

$$p_0 := \frac{X(\omega)}{n}$$

aus einer Stichprobe ω

$$(p - p_0)^2 \leq \frac{z^2}{n} p(1-p) .$$

BEMERKUNG Die Zahl $\gamma(z)$ wird als *Konfidenzzahl* bezeichnet.

Aus der Tabelle für Φ liest man die folgenden, häufig benutzten Werte für $\gamma(z)$, und damit Näherungswerte für $P\,(n \cdot p - z \cdot \sigma \leqslant X \leqslant n \cdot p + z \cdot \sigma)$ ab :

z	1	1.96	2.58	2.97	3.29
$\gamma(z)$	0.683	0.95	0.99	0.997	0.999

BEISPIEL 1 Innerhalb einer Population tritt eine allergische Reaktion auf eine Chemikalie ein.

Von 200 zufällig ausgewählten Personen reagieren 11 allergisch, es ist also

$$X(\omega) = 11 \text{ und } p_0 = \frac{11}{200} = 0,055 \; .$$

Zu einer Konfidenzzahl $\gamma < 1$, wir wählen hier $\gamma = 0,95$, wird ein *Konfidenzintervall* $[p_1, p_2]$ gesucht, d.h. mit Wahrscheinlichkeit γ soll

$$p_1 \leq p \leq p_2$$

gelten. Aus dem Korollar erhält man

$$p^2 - 2p\,p_0 + p_0^2 \leq \frac{z^2}{n}\,(p - p^2) \; ,$$

also

$$(1 + \frac{z^2}{n})p^2 - (2p_0 + \frac{z^2}{n})p + p_0^2 \leq 0 \; .$$

Mit den Werten $n = 200$, $p_0 = \frac{11}{200}$ und $z = 1,96$ aus der Tabelle für γ erhält man daraus (gerundet)

$$f(p) := p^2 - 0,13p + 0,003 \leq 0 \; .$$

Das gesuchte Konfidenzintervall ergibt sich aus den Nullstellen $p_{1,2}$ von f :

$$p_{1,2} = \frac{0,13}{2} \pm \sqrt{(\frac{0,13}{2})^2 - 0,003} \; ,$$

und damit $p_1 = 0,03$ und $p_2 = 0,1$.

Mit 95% Sicherheit liegt also die Wahrscheinichkeit p für eine allergische Reaktion zwischen $0,03$ und $0,1$.

BEISPIEL 2 Man möchte die Schätzung von p aus dem Beispiel 1 durch eine Vergrößerung des Stichprobe verbessern. Um 100 % Sicherheit zu bekommen, müßte man fast alle Personen untersuchen, man wählt deshalb wieder eine Konfidenzzahl $\gamma < 1$. Wir benutzen weiter den Wert aus dem Beispiel 1, also $\gamma = 0,95$, und suchen ein n so, dass mit Wahrscheinichkeit γ der Wert von p im Konfidenzintervall $[p - \alpha, p + \alpha]$ liegt, wobei z.B. $\alpha = 0.02$ sei. Der Schätzwert p_0 sei wieder durch $\frac{X(\omega)}{n}$ gegeben.

Wählt man n so , dass

$$\frac{z^2}{n}\,p(1-p) \leq \alpha^2 \; ,$$

also

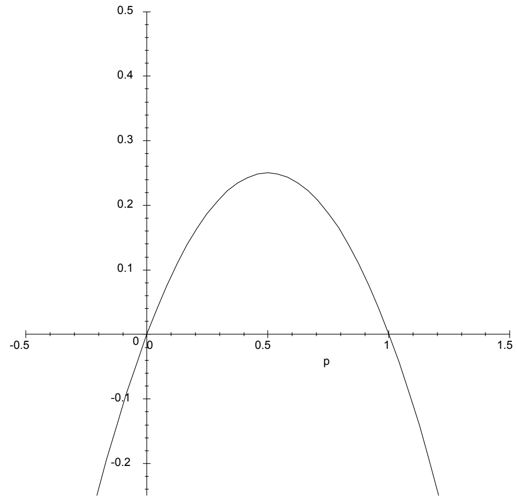
$$n \geq \frac{z^2}{\alpha^2}\,p(1-p) \; ,$$

so gilt nach dem Korollar

$$(p - p_0)^2 \leq \frac{z^2}{n}\,p(1-p) \leq \alpha^2 \; .$$

Im Allgemeinen ist zwar p nicht bekannt, aber es gilt

$$p \cdot (1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{für alle } p \in [0,1] \ .$$



$$p \longmapsto p \cdot (1-p)$$

Wählt man also

$$n \geqslant \frac{z^2}{4 \cdot \alpha^2} \ ,$$

so folgt

$$n \geqslant \frac{z^2}{4 \cdot \alpha^2} \geqslant \frac{z^2 \cdot p \cdot (1-p)}{\alpha^2} \ .$$

Im obigen Zahlenbeispiel ergibt sich mit Hilfe der Tabelle

$$z = 1.96 \quad \text{und} \quad n \geqslant \frac{1.96^2}{4 \cdot 0.02^2} = 2401 \ .$$

Besitzt man Vorinformationen über p , z.B. wird man nach Beispiel 1 $p \leq 0,1$ annehmen können, so folgt

$$p \cdot (1-p) \leqslant 0.1 \cdot 0.9 = 0.09$$

und es genügt dann

$$n \geqslant \frac{1.96^2 \cdot 0.09}{0.02^2} = 864.36 \ ,$$

d.h. $n = 865$ zu nehmen.