Dr. Udo Hagenbach
FH Gießen-Friedberg
WS 2011/2012

Aufgabenskript

zur Vorlesung

Einführung in die höhere Mathematik

Ein Studienanfänger in Mathematik braucht für den Anfang gar kein Lehrbuch, die Vorlesungen sind autark, und die wichtigste Arbeitsgrundlage des Studenten ist seine eigenhändige Vorlesungsmitschrift.

Weshalb diese Anstrengung? Es ist, als ob die Information durch Auge und Ohr erst einmal in die Hand gehen müsste, um im Gehirn richtig anzukommen. Vielleicht hängt das damit zusammen, dass Sie beim Ausüben von Mathematik ja auch wieder schreiben müssen. Aber was immer der Grund: Erfahrung sagt's.

Klaus Jänisch, Lineare Algebra, Springer 1996.

1 Grundlagen

Aufgabe 1.1
Stellen Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form dar und bestimmen Sie ihren Betrag:

a) $M_1 = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 4\}$,

b) $M_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 + 3x = 2\}$,

c) $M_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 + 3x = -4\}$.

Aufgabe 1.2
Gegeben sind die Intervalle $A = (-1; 1)$ und $B = [0; 2]$. Bestimmen Sie die Mengen

a) $A \cup B$ *b)* $A \cap B$ *c)* $A \setminus B$ *d)* $B \setminus A$.

Aufgabe 1.3
Bestimmen Sie die Mengen

a) $\mathbf{N} \cup \mathbf{R}$ *b)* $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Q}$ *c)* $\mathbf{Z} \cap \mathbf{R}$ *d)* $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$.

Aufgabe 1.4
Skizzieren Sie die folgenden Zahlenmengen auf der Zahlengeraden:

a) $(2;10]$,

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\}$,

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid -8 < x \leq 2\}$.

Aufgabe 1.5
Vereinfachen Sie mittels Anwendung der Potenzgesetze so weit wie möglich:

$$a)\ \frac{15x^3yz^2}{9xy^2z} \qquad b)\ \left(\frac{u^3v^5}{x^4y^6}\right)^9 \cdot \left(\frac{x^3y^5}{u^2v^3}\right)^9 : \left(\frac{x^4y^7}{u^6v^{10}}\right)^9 .$$

Aufgabe 1.6
Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck zu einer einfachen Potenz:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^{-3}}} : \frac{(-x)^4}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{(-x)^{-2}}{(\sqrt[3]{x})^{-3}}\right)^3 .$$

Aufgabe 1.7
Lösen Sie die Gleichungen

a) $2x^2 + \frac{5}{3}x = 2$,

b) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$,

c) $2x^4 = 4 - 2x^2$,

d) $\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{2x-1}$,

e) $\frac{1}{t} + 2 = \frac{1}{t+1}$,

f) $|x+1| = 2x - 1$,

g) $1800 = 50 \cdot q^5$,

h) $100 = 25 \cdot 1{,}07^x$,

i) $10 - 10^{\frac{1}{2}x} = 1$,

j) $\ln(\sqrt{x}) + 1{,}5 \cdot \ln(x) = \ln(2x)$.

Aufgabe 1.8

a) Bestimmen Sie $\log_{\sqrt{3}} 9$ ohne Taschenrechner.

b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner $\log_7 10$ und $\log_\pi 0,5$.

c) Lösen Sie die Gleichung $\log_3 x + 2 = 2 \log_3 x^2$.

Aufgabe 1.9
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 7y &= 5 \\ -3x - 2y &= -20 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 1.10
Lösen Sie die Gleichungssysteme

$$a) \quad \begin{aligned} x^2 + 2y &= 10 \\ -\tfrac{1}{2}x + y^2 &= 7 \ , \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} 100 &= a \cdot q^2 \\ 50 &= a \cdot q^{\frac{3}{2}} \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 1.11

a) Welche Winkel haben das Bogenmaß $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$?

b) Welches Bogenmaß haben die Winkel 30°, 45° ?

Aufgabe 1.12
Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten $a = 5$ m und $b = 12$ m.

a) Wie groß sind $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$?

b) Überprüfen Sie in diesem speziellen Fall die Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

c) Wie groß sind α und β?

Aufgabe 1.13
Lösen Sie mit Hilfe des Additionssatzes der Sinusfunktion die Gleichung

$$\sin 2x - \cos x = 0 \ .$$

Aufgabe 1.14
Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \ .$$

Aufgabe 1.15
Stellen Sie für die komplexe Zahl $z = 1 + 2i$ die folgenden Operationen bildlich in der komplexen Zahlenebene (Gauß'sche Zahlenebene) dar:

$$a)\ i \cdot z \ , \qquad b)\ z^* \ , \qquad c)\ \tfrac{z}{i} \ ,$$

$$d)\ 2 \cdot z \ , \qquad e)\ |z| \ , \qquad f)\ z^2 \ .$$

Was bedeuten die Operationen geometrisch?

Aufgabe 1.16
Berechnen Sie $|z|$, z^* und die Polarformen von z und z^* für die komplexen Zahlen

$$a)\ z_1 = -6 \ , \qquad b)\ z_2 = 4i \ ,$$

$$c)\ z_3 = 2 + \pi i \ , \qquad d)\ z_4 = -3 + 5i \ .$$

Aufgabe 1.17
Von der Gleichung

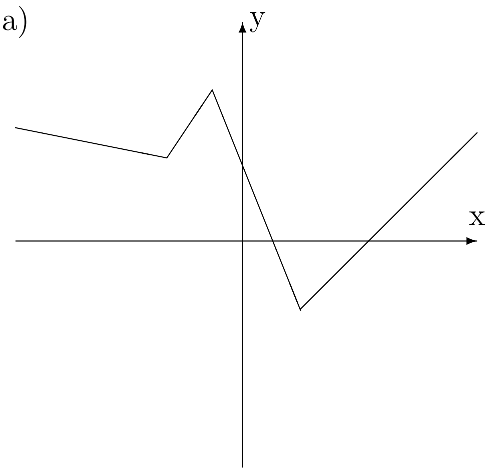
$$z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$$

ist die komplexe Lösung $z_1 = 1 - i$ bekannt. Wie lauten die übrigen Lösungen?

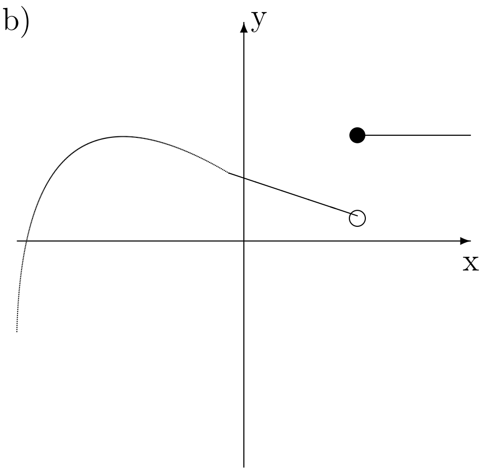
2 Funktionen

Aufgabe 2.1
Welche der folgenden Schaubilder können Teil eines Graphen einer Funktion sein?

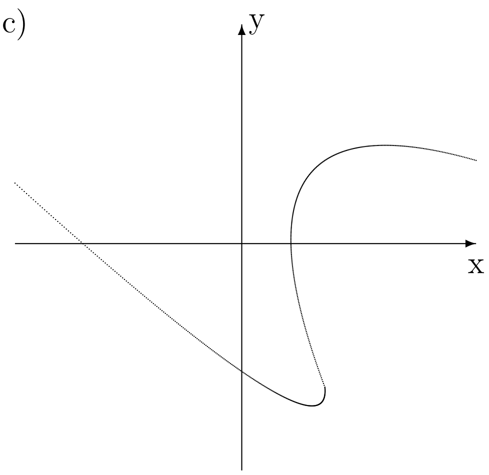
a)



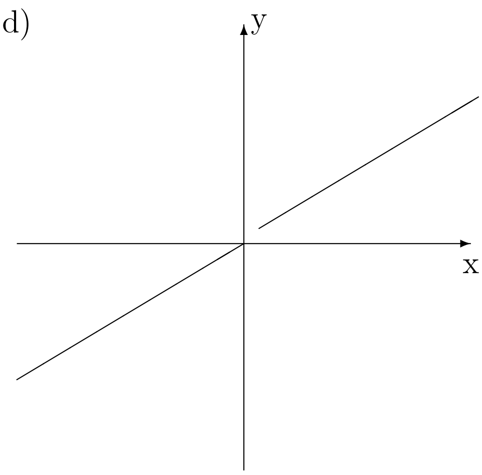
b)



c)



d)



Aufgabe 2.2
Der Funktionsgraph der linearen Funktion f verläuft durch die Punkte $P(1/-2)$ und $Q(-1/3)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

Aufgabe 2.3
Der Graph der linearen Funktion g verläuft mit der Steigung $m = 2$ durch den Punkt $R(7/14)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.

Aufgabe 2.4
Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f und g aus den Aufgaben 2.2 und 2.3.

Aufgabe 2.5
Die Flugbahn einer gestoßenen Kugel wird durch den Graphen der Funktion

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{5}x + 2$$

beschrieben. Hierbei gibt x die Weite und $f(x)$ die Höhe der Kugel in Metern an.

a) Wie weit fliegt die Kugel?

b) Bestimmen Sie die Abwurfhöhe.

c) Bestimmen Sie ohne Differentialrechnung den höchsten Punkt der Flugbahn.

d) Zeichnen Sie die Funktion f.

Aufgabe 2.6
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Funktion

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = -x^2 + 3x + 2$$

mit

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(x) = 2x + 1$$

rechnerisch. Zeichnen Sie danach die beiden Funktionen in ein Koordinatensystem und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2.7
Über einen Fluss soll eine Brücke gebaut werden, deren Profilunterkante einer Parabel entspricht. Die Höhe der Brücke soll 19,75 m betragen, die Spannweite 100 m. Bestimmen Sie die Gleichung einer geeigneten Funktion f, die diese Profillinie beschreibt.

Aufgabe 2.8
Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktion

$$f(x) = a \cdot e^{bx} + 2$$

so, dass die Punkte $P(0/10)$ und $Q(5/3)$ auf der Kurve liegen.

Aufgabe 2.9
Zwischen Luftdruck p und Höhe h bezogen auf Meeresniveau gilt bei konstanter Lufttemperatur die barometrische Höhenformel:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-kh} \ .$$

$(p_0 = 1{,}013 \text{ bar}; \ k = \frac{1}{7991m})$

a) In welcher Höhe ist der Luftdruck 0,8 bar?

b) Wie groß ist der Luftdruck in 5000 m Höhe?

c) In welcher Höhe ist der Luftdruck halb so groß wie auf Meereshöhe?

Aufgabe 2.10
Neben dem stabilen Kohlenstoffatom C^{12} gibt es das radioaktive Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von ungefähr 5730 Jahren. Tier und Pflanzen nehmen C^{12} und C^{14} ohne zu unterscheiden auf. Sie enthalten daher C^{12} und C^{14} im selben Verhältnis wie die Umwelt. Das Verhältnis ändert sich nach dem Tod eines Organismus, da C^{14} zerfällt und nicht weiter eingebaut wird.

Angenommen, ein Fossil enthält nur 60 Prozent desjenigen C^{14}-Gehalts, den ein lebender Organismus besitzt. Wieviel Jahre sind seit dem Tod des Organismus vergangen?

Aufgabe 2.11
Das neue Jahr beginnt mit guten Vorsätzen: Die Studenten Leonhard E., Carl Friedrich G. und Sonja K. wollen endlich Ihre Vorlesungen nacharbeiten. Dabei soll das Arbeitspensum jeden Tag um p Prozent gesteigert werden. Man beginnt am nullten Tag vorsichtig mit einer Seite.

a) Leonhard E. will sich täglich um 1 Prozent steigern und fragt sich, wann er bei einem Tagespensum von 2 Blatt angelangt ist.

b) Carl Friedrich G. möchte nach einem Jahr bei einem Tagespensum von 50 Seiten angelangt sein und

c) Sonja K. plant in einem Jahr insgesamt 500 Seiten geschafft zu haben.

Helfen Sie den Kommilitonen und berechnen Sie ferner, wann die von Leonhard E. täglich beschriebene Papiermenge die Erdmasse erreicht hat.
(1 Blatt Papier 5 g, Erdmasse $6 \cdot 10^{24}$ kg.)

Aufgabe 2.12
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich zu den folgenden Funktionsvorschriften und skizzieren Sie die zugehörigen Graphen. Beachten Sie hierbei die relevanten Punkte; es soll keine Wertetabelle berechnet werden.

a) $f(x) = 1,5^x$, *b)* $g(x) = |x^2 - 1|$, *c)* $h(x) = \dfrac{2}{x+1} - 2$.

Aufgabe 2.13
Untersuchen Sie die Funktionen aus Aufgabe 2.12 auf Beschränktheit.

Aufgabe 2.14
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Symmetrie:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = 3x^2 - 4$,

b) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(x) = \sin x \cdot \cos x$,

c) $h : \mathbf{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ h(x) = \frac{1}{x-1}$,

d) $j : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ j(x) = \ln(|x|)$.

Aufgabe 2.15
Welche Periode hat die Funktion $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x)$?

Aufgabe 2.16
Skizzieren Sie im Bereich $[0; 2\pi]$ den Graphen der Funktion

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) := -2\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

und beachten Sie hierbei insbesondere die Lage der Nullstellen, Maxima und Minima. Welche Periode hat f? Begründen Sie kurz ihre Antworten.

Aufgabe 2.17
Es sei eine Wechselspannung $U = U_0 \sin(\omega t + \frac{1}{2}\pi)$ mit der Frequenz $f = 50Hz$ und $U_0 = 100V$ gegeben.

a) Wie groß ist U zu Anfang der Beobachtung?

b) Wie groß ist U nach 0,001 Sekunden?

c) Zu welcher Zeit t wird das zweite Maximum angenommen?

Aufgabe 2.18
Welche der folgenden Funktionen sind umkehrbar? Berechnen Sie, falls notwendig nach angemessener Einschränkung, die Funktionsvorschriften der zugehörigen Umkehrfunktionen.

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; f(x) = x^3 - 1$.

b) $g : (0; \infty) \longrightarrow [2; \infty)\,;\; g(x) = x^2 + 2$.

c) $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; h(x) = e^x$.

3 Stetige Funktionen

Aufgabe 3.1
Ein Lehrer versucht einem Schüler klar zu machen, was eine Nullfolge ist, indem er den Begriff definiert:

> Eine Zahlenfolge ist eine Nullfolge, wenn sich zu jeder noch so kleinen positiven Zahl e eine natürliche Zahl N so bestimmen lässt, dass alle Glieder der Folge mit einer Platzziffer n größer als N ihrem Betrag nach kleiner als e sind.

Der Schüler, der das Prinzip einer auf Null zustrebenden Zahlenfolge vielleicht schon vorher halbwegs erkannt hatte, versucht krampfhaft dem Text zu folgen, doch schon nach den ersten Worten rauscht der Rest dieser genialen Satzkonstruktion an ihm vorbei. Dabei wäre der Inhalt unseres hübschen Satzes von der Nullfolge durchaus einfacher wiedergegeben werden können - wenn es überhaupt sinnvoll ist, solche Definitionen zu geben. Ja, je nach der Unterrichtsstufe genügt es vielleicht sogar zu sagen:

> Eine Folge von Zahlen geht dann auf Null zu, wenn - ganz abgesehen vom Vorzeichen - jede Zahl kleiner als die vorhergehende ist.

Eine Formulierung, die notwendigerweise unvollkommen ist, die aber das Wesentliche des Prinzips erkennen lässt und auch beim später oft notwendigen Abstrahieren und exakten Formulieren den Rückweg zum eigentlichen Phänomen immer offen lässt.
(Aus F. Vester: Denken, Lernen, Vergessen, dtv Sachbuch)

Aufgabe:
Erläutern Sie durch Beispiele, in welchen Punkten die zweite Definition "unvollkommen" ist.

Aufgabe 3.2
Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$, so dass sich die ersten Folgenglieder wie folgt ergeben:

a) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{8};\ \ldots$

b) $0,2;\ 0,04;\ 0,008;\ \ldots$

c) $\frac{1}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{9}{4};\ \ldots$

Aufgabe 3.3
Zeichen Sie den Funktionsgraph der Folge

$$(a_n) = \left(\frac{n^2}{n^2+10}\right) \ , \ n \in \mathbf{N} \ .$$

Aufgabe 3.4
Bestimmen Sie die Grenzwerte

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{n}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{207n+84}{n^2-3n}$.

Aufgabe 3.5
Bestimmen Sie die Grenzwerte

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+7x}{x^3-5}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$.

Aufgabe 3.6
Welches Grenzverhalten haben die folgenden Funktionen für $x \to \pm\infty$?

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = -x^3 + 10x^2$,

b) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(x) = e^{-x}$,

c) $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ h(x) = \ln x$,

d) $j : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ j(x) = e^x \cos(2\pi x)$.

Aufgabe 3.7
Geben Sie jeweils ein Beispiel für Funktionen f und g mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

an, so dass

$$\begin{aligned}
&a) && \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = -\infty \ , \\
&b) && \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = 0 \ , \\
&c) && \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = a \in \mathbf{R} \ , \\
&d) && \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = +\infty \ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.8
Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & , \quad x \geq 0\ , \\ (x+1)^3 & , \quad x < 0\ . \end{cases}$

b) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; g(x) = \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , \quad x \neq 0\ , \\ 0 & , \quad x = 0\ . \end{cases}$

c) $h : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; h(x) = \frac{1}{x}$.

d) $j : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; j(x) = \begin{cases} |x| & , \quad x < 1\ , \\ \cos(x-1) & , \quad x \geq 1\ . \end{cases}$

Aufgabe 3.9
Hat die Funktion

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; f(x) = 3x^3 - 7{,}5x^2 + \frac{1}{2}x - 42$$

eine Nullstelle?

Hinweis: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz.

4 Differenzierbarkeit

Aufgabe 4.1
Berechnen Sie explizit den Grenzwert des Differenzenquotienten der Funktion

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = x^3$,

b) $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(x) = \frac{1}{x}$,

c) $h : \mathbf{R}_{+,0} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ h(x) = \sqrt{x}$,

d) $j : \mathbf{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ j(x) = \frac{2x}{x-1}$.

Aufgabe 4.2
Differenzieren Sie mit Hilfe der allgemeinen Potenzregel:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = x^6$,

b) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(x) = x^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$,

c) $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ h(x) = \sqrt[3]{x^4}$,

d) $j : \mathbf{R}_{+,0} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ j(t) = \frac{t^2}{\sqrt{t}}$.

Aufgabe 4.3
Differenzieren Sie mit Hilfe der Summen- und Faktorregel:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = -3\,x^4 + 5\,x^2 - x + 4$,

b) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(t) = a\,\sin t - e^t$, $a \in \mathbf{R}$,

c) $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ h(x) = \frac{2}{x^2} - 3\ln x + \cos x$.

Aufgabe 4.4
Differenzieren Sie die folgenden Funktionen ohne Produkt- oder Quotientenregel:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ f(x) = (x-1)(x^2+x)$,

b) $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(x) = \frac{-2x^2+7x}{x}$,

c) $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ h(x) = \frac{(2x+3)(x-2)}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 4.5
Leiten Sie mit Hilfe der Produktregel ab:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; f(x) = e^x \cos x$,

b) $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; g(t) = 2t \ln t$,

c) $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; h(x) = x\, e^x \cos x$.

Aufgabe 4.6
Beweisen Sie: Für drei beliebige differenzierbare Funktionen $f, g, h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ gilt die Gleichung

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h' \quad .$$

Aufgabe 4.7
Verwenden Sie zum Ableiten die Quotientenregel:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$,

b) $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$,

c) $h : \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\,\pi | k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; h(u) = \frac{1+\cos u}{1-\sin u}$.

Aufgabe 4.8
Differenzieren Sie mittels Kettenregel:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; f(x) = \cos(x^2 + 3)$,

b) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; g(v) = 3\, e^{-4v}$,

c) $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; h(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$,

d) $k : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; k(x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 3x})$.

Aufgabe 4.9
Bilden Sie die Ableitungen von

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; f(x) = 3e^{2x} \cos(-x + 1)$,

b) $g : (0; \pi) \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; g(t) = \frac{\sqrt{\sin t}}{t}$,

c) $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\; h(x) = \ln(x^2 + x)\frac{-x+1}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 4.10
Berechnen Sie die Ableitung von

$$f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; f(x) = x^{\sin x} \;.$$

Hinweis: Leiten Sie $\ln f$ ab und lösen Sie danach eine geeignete Gleichung.

Aufgabe 4.11
Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe der Ableitungsformel für Umkehrfunktionen:

a) $g : (0;\infty) \longrightarrow (0;\infty)\,;\;\; g(x) = \sqrt{x}$,

b) $f : \mathbf{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\,;\;\; f(x) = \arctan x := \tan^{-1}(x)$.

Aufgabe 4.12
Bestimmen Sie die zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; f(x) = e^{-0{,}8x}\cos x$,

b) $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; g(t) = t^3 \ln t - t \arctan t$,

c) $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; h(u) = \frac{u^2}{u^2+1}$.

Aufgabe 4.13
Berechnen Sie die jeweils verlangte Ableitung:

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; f(t) = e^{-2t}\sin(4t+5)\,,\;\; f''(0) =?$.

b) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\,,\;\; g''(0) =?$.

c) $h : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; h(x) = x\ln x\,,\;\; h'''(1) =?$.

Aufgabe 4.14
Bestimmen Sie die Monotoniebereiche der folgenden Funktionen:

a) $y = \cos(-x)\,;\;\; 0 \le x \le \pi$,

b) $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; f(x) = \ln x$,

c) $g : [0;\pi] \longrightarrow \mathbf{R}\,;\;\; g(x) = -\sin x$,

d) $h : (0; \infty) \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ h(x) = \ln \frac{1}{x}$.

Aufgabe 4.15
Führen Sie mit den folgenden Funktionsvorschriften eine Kurvendiskussion durch:

a) $y = \dfrac{x^2+1}{x-3}$, *b)* $y = \frac{x^2+1}{x}$, *c)* $y = 2(1-3t)e^{-2t}$, $t \geq 0$,

d) $y = xe^{-x^2}$, *e)* $y = x \ln x$, *f)* $y = x^2 \ln x$,

g) $y = 3\,\dfrac{\ln x}{x}$.

Aufgabe 4.16
Linearisieren Sie die Funktion $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}\,;\ g(x) = \ln x$ in der Umgebung von $x_0 = 5$ und berechnen Sie mit Hilfe dieser Näherungsfunktion die ungefähren Funktionswerte von f an den Stellen $x_1 = 4,8$ und $x_2 = 5,3$. Vergleichen Sie danach mit den exakten Werten.

Aufgabe 4.17
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$, *b)* $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$, *c)* $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$, $n \in \mathbf{N}$, *e)* $\lim_{x\to 2} \frac{x\ln(\frac{1}{2}x)}{\sin(\pi x)}$, *f)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{x\cos(2x)}{x-\frac{\pi}{4}}$

Aufgabe 4.18
Bestimmen Sie mit dem Iterationsverfahren von Newton alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen mit einer Genauigkeit von 3 Dezimalstellen:

a) $x^2 = 2\cos x$,

b) $x^3 - 1,5x - 1 = 0$,

c) $xe^{-x} = -0,5$,

d) $\ln(x) = e^{-x}$.

Aufgabe 4.19

a) Aus dünnem Blech soll eine Dose (Kreiszylinder) mit Deckel gefertigt werden. Das Volumen V ist vorgegeben. Wie sind Grundkreisradius r und Höhe h zu wählen, damit der Materialaufwand möglichst gering wird?

b) Setzen Sie $V = 850\ ml$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den gemessenen Werten einer typischen Konservendose entsprechenden Volumens aus Ihrem Vorratsschrank.

Aufgabe 4.20
Der Querschnitt eines Abwasserkanals hat die Form eins Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Wie muss man bei gegebenem Kanalquerschnitt $A = 6m^2$ die Rechteckseiten wählen, damit der Umfang U, und damit die Materialkosten, möglichst klein werden.

Aufgabe 4.21
Ein Parabelbogen sei durch die Gleichung $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$, $y \geq 0$, beschrieben. Zwischen den Parabelbogen und die x-Achse soll ein möglichst großes Rechteck eingepasst werden. Wie groß sind seine Seiten und Fläche?

Aufgabe 4.22
Die Funktion $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R};\ f(x) := \sqrt{x}$ soll durch eine quadratische Parabel g so angenähert werden, dass $f(0) = g(0)$ und für $x = 1$ sowohl Funktionswerte als auch die Ableitungen der beiden Funktionen übereinstimmen.

a) Ermitteln Sie die Funktion g.

b) Wie groß ist die maximale Abweichung von g zu f.

Aufgabe 4.23
Wie groß ist die Summe, die man beim Addieren einer positiven Zahl und ihres Kehrwertes erhält, mindestens?

Aufgabe 4.24
Eine Elektronikfirma verkauft monatlich 5000 Stück eines Bauteils zum Stückpreis von 25 Euro. Eine Marktforschung hat ergeben, dass sich der monatliche Absatz immer dann um durchschnittlich 250 Stück erhöhen würde, wenn der Stückpreis um 1 Euro gesenkt würde. Bei welchem Stückpreis macht die Firma den größten Umsatz und welche verkaufte Stückzahl ist dann zu erwarten?

5 Integralrechnung

Aufgabe 5.1
Prüfen Sie durch Ableitung die folgenden Integralformeln:

$$\begin{aligned} a) \quad & \int x e^{x^2}\,dx &=& \tfrac{1}{2}e^{x^2} + c\ , \\ b) \quad & \int \tfrac{1}{x^2+2x+2}\,dx &=& \arctan(1+x) + c\ , \\ c) \quad & \int \tfrac{e^x-1}{e^x+1}\,dx &=& 2\ln(e^x+1) - x + c\ ,\ c \in \mathbf{R}\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2
Berechnen Sie die **unbestimmten** Integrale

$$a)\ \int e^x + x^2\,dx \qquad b)\ \int -2x + \sin x\,dx \qquad c)\ \int t^2\sqrt{t}\,dt \qquad d)\ \int \frac{x^2+1}{x}\,dx\ .$$

Aufgabe 5.3
Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, so dass $f'(x) = \frac{1}{2}e^x + \cos x$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und $f(4) = 3,7$.

Aufgabe 5.4
Berechnen Sie die **bestimmten** Integrale

$$a)\ \int_0^4 x^3 - 5x^2 + 1,5x - 10\,dx \qquad b)\ \int_1^e \frac{1}{u}\,du \qquad c)\ \int_0^\pi a\sin t - b\cos t\,dt,\ a, b \in \mathbf{R}\ .$$

Aufgabe 5.5
Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels **partieller Integration**:

$$a)\ \int x\ln x\,dx \qquad b)\ \int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx \qquad c)\ \int_\pi^{2\pi} x^2\cos(x)\,dx \qquad d)\ \int e^x\cos x\,dx\ .$$

Aufgabe 5.6
Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels **Variablensubstitution**:

$$a)\ \int_1^2 \sqrt[3]{1-x}\,dx \qquad b)\ \int 12x\ln(3x^2-1)\,dx \qquad c)\ \int 2x^2 e^{4x^3-2}\,dx \qquad d)\ \int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx\ .$$

Aufgabe 5.7
Berechnen Sie die folgenden **Spezialfälle der Variablensubstitution**:

$$a)\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(3v - \frac{\pi}{4})\, dv\ . \qquad b)\ \int_1^2 \frac{1}{x} \ln x\, dx \qquad c)\ \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx \qquad d)\ \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx\ .$$

Aufgabe 5.8
Welchen Wert muss die obere Integrationsgrenze b haben, damit die Fläche unter der Kurve $f(x) = \frac{10}{x^2}$ über dem Intervall $[1, b]$ genau 5 beträgt.

Aufgabe 5.9
Überprüfen Sie die folgenden **uneigentlichen Integrale** auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$a)\ \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx \qquad b)\ \int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx \qquad c)\ \int_0^9 \frac{1}{x^2}\, dx \qquad d)\ \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\ .$$

Aufgabe 5.10
Für welche reellen Zahlen $\alpha > 0$ konvergieren die folgenden **uneigentlichen Integrale** und welchen Wert haben Sie im Falle der Konvergenz?

$$a)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \qquad b)\ \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx\ .$$

Aufgabe 5.11
Berechnen Sie die **Bogenlänge** der Kurve $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x} + 1$ über dem Intervall $0 \leq x \leq 4$.

Aufgabe 5.12
Die Funktion

$$f : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto e^{-x}$$

rotiere um die x-Achse. Welches Volumen hat der hierdurch erzeugte **Drehkörper**?

Aufgabe 5.13
Für die Bewegung eines Körpers gelte:

$$v(t) = \frac{30gt}{(5s + 4gt^2)s^{-1}} \ , \ t \geq 0 \ .$$

Welchen Weg hat der Körper in der Zeit von $t_1 = 2$ bis $t_2 = 5$ zurückgelegt? Hierbei seien $s = 5m$ und $g = 9,81\frac{m}{s^2}$.

Aufgabe 5.14
Berechnen Sie die folgenden Integrale **numerisch** mit einer Genauigkeit von 4 Nachkommastellen:

$$a) \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \qquad\qquad b) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt \ .$$

Aufgabe 5.15
Bestimmen Sie mit Hilfe der **numerischen Integration** aus

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

den Wert von π bis auf 4 Nachkommastellen genau.

Haben Sie eine Idee für eine weitere numerische Integration zur Berechnung des Wertes von π?

Aufgabe 5.16
Für eine Funktion liegen die folgenden Messwerte vor:

x	0	7	14	21	28	35	42	49	56
f(x)	1,5	3,2	8,7	8,9	7,6	5,6	3,8	2,6	2,1

Zeichnen Sie die Messwerte in ein Koordinatensystem ein und berechnen Sie näherungsweise die Fläche unter der Funktion f mit der

a) Rechteckregel,

b) Trapezregel,

c) Simpsonregel.

6 Differentialgleichungen

Aufgabe 6.1
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y = \frac{Cx}{1+x}\ ,\ C \in \mathbf{R}\ ,$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(1+x)y' - y = 0$$

darstellt.

Aufgabe 6.2
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung mittels *Trennung der Variablen*:

a) $x^2y' = y^2$,

b) $y' = e^{x-y}$.

Aufgabe 6.3
Lösen Sie mittels geeigneter Substitution und *Trennung der Variablen*:

a) $xy' = y + 4x$,

b) $y' = (x+y+1)^2$

c) $y' = \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$.

Aufgabe 6.4
Lösen Sie die Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen:

a) $y' + y\cos x = 0\ ,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$,

b) $x(x+1)y' = y\ ,\ y(1) = \frac{1}{2}$,

c) $y^2y' + x^2 = 1\ ,\ y(2) = 1$.

Aufgabe 6.5
Welche der folgenden DGLs 1. Ordnung sind linear, welche davon homogen?

a) $y' = xy$,

b) $y' - 2y = \sin x$,

c) $y'y^2 + x^2 = 1$,

d) $L\frac{dI}{dt} + Ri = u(t)$,

e) $xy' + y = \ln x$,

f) $y'\sqrt{y} - x = 0$.

Aufgabe 6.6
Lösen Sie die folgenden homogenen linearen DGLs 2. Ordnung:

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$,

b) $2\ddot{q} + 7\dot{q} + 3q = 0$,

c) $y'' - 2ay' + a^2y = 0$.

Aufgabe 6.7
Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

a) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = \cos t$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 4$,

b) $y'' + 2y' + 3y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 17x = 2\sin(5t)$, $x(\pi) = 0$, $\dot{x}(\pi) = 1$.

Formeln

$(\tilde{x}+i\tilde{y})\cdot(x+iy) = \tilde{x}x - \tilde{y}y + i(\tilde{x}y + \tilde{y}x)$

$\frac{(\tilde{x}+i\tilde{y})}{(x+iy)} = \frac{\tilde{x}x+\tilde{y}y}{x^2+y^2} + i\,\frac{\tilde{y}x-\tilde{x}y}{x^2+y^2}$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

$\Big(g(f(x))\Big)' = f'(x)g'(f(x))$

$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (Definition der Newtoniteration)

$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| < 1$ (Bedingung für die Newtoniteration)

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$\int f(x)dx = F(x) + c$

$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy = \int_a^b g(f(x))f'(x)dx$

$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)\Big|_a^b$

$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x))\Big|_a^b$