Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Dr. Helga Lohöfer

Wintersemester 2013/14

Grundlagen der Mathematik für Biologen

- Blatt 9 -

Abgabe: Montag, den 16.12.2013, vor der Vorlesung, spätestens14:05 Uhr

Lektüreaufgabe: Skript Kap. 5.3 und 5.4
Themen: **L**ogistisches Wachstum, natürliche Wachstums- und Abbauprozesse, Regeln für exp und ln.

1. Die Untersuchung eines Signalübertragungsprozesses in der Zelle erbrachte, dass die Aktivierung A des Zielmoleküls (in % der maximalen Aktivierung) von der relativen Konzentration [S] der Signalmoleküle wie folgt abhing:

[S]	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
A	15,5	31,0	52,5	73,1	87,0	94,3

   a) Skizzieren Sie den Graph von A als Funktion von [S] (waagerechte Achse: 1 Kästchen = 0,1 und senkrechte Achse: 1 Kästchen = 10). (1)
   b) Berechnen Sie für $1,4 \le [S] \le 2,0$ näherungsweise die momentane Änderungsrate von A bezüglich [S] und die momentane relative Änderungsrate von A bezüglich [S] (je 1 Nachkommastelle). (1)
   c) Überprüfen Sie durch einen geeigneten graphischen Test, ob, ja oder nein, A als Funktion von [S] ein **logistisches Wachstumsgesetz** erfüllt. (1)

2. Aus Blatt 7, Nr. 1 ging hervor, dass bei konstant 700 ^{0}C die **Reaktion 1. Ordnung**
$$C_2H_6 \rightarrow 2\ CH_3$$
die Geschwindigkeitskonstante $k = 0{,}03262\ \text{min}^{-1}$ besitzt.
   a) Wie lautet bei dieser Temperatur die Berechnungsformel für die Konzentration $[C_2H_6]$ als Funktion der Zeit? (Tipp: Blatt 8, Nr. 3 verwenden) (1)
   b) Wie viel % (1 Nachkommastelle) der Anfangangskonzentration sind nach 15 min noch übrig? (1)
   c) Wie viele Minuten (2 Nachkommastellen) dauert es bei dieser Temperatur, bis 99% der Anfangskonzentration zerfallen sind? (2)

3. Eine mit Schimmelpilz befallene Fläche A vergrößere sich mit der Zeit t nach einem natürlichen Wachstumsgesetz mit der **Wachstumskonstante** $\alpha = 0{,}0515\text{h}^{-1}$.
Wie lange dauert es, bis die vom Pilz befallene Fläche sich von 1 cm^2 auf 100 cm^2 vergrößert hat? (2)

4. Die Konzentrationsabhängigkeit des Elektrodenpotenzials eines Redox-Paares $\text{Ox} + \text{ze}^{-} \rightarrow \text{Red}$ wird durch die Nernst-Gleichung (1889) beschrieben:
$$E = E_0 + \frac{R \cdot T}{z_e \cdot F} \cdot \ln\left(\frac{c_{Ox}}{c_{Red}}\right)$$
Dabei ist E = Elektrodenpotenzial, E_o = Standardpotential, R = Universelle Gaskonstante, T = Temperatur, z_e = Äquivalentzahl, F = Faraday-Konstante, c = Konzentration.
Welche Gleichung ergibt sich daraus für c_{Red} als Funktion der übrigen Größen? (4)

5. Der Bleigehalt C_B des menschlichen Blutes, gemessen in µg/100ml, wächst mit dem mittleren Bleigehalt der Umgebungsluft C_L, gemessen in µg/m^3, im Bereich $5 < C_L < 100$ nach der Formel
$$C_B = 26 \cdot \ln C_L - 20.$$
Bei einem Patienten wurde ein Bleigehalt im Blut von 76µg/100ml gemessen. Welcher Bleigehalt der Luft (1 Nachkommastelle) besteht in seinem Lebensraum? (2)

Die Exponentialfunktion exp:

(E1) Die Exponentialfunkion y = exp(x) ist eindeutig charakterisiert durch ihr natürliches Wachstumsgesetz $\frac{y'}{y} = 1$ und den Anfangswert y(0) = 1. Sie ist nur näherungsweise berechenbar mittels

$$y = \exp(x) = \lim y_n, \quad \text{wobei } y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Fehlerabschätzung: $\left|y_n - \exp(x)\right| \le \frac{|x|^n}{n!}$ gilt, sobald $n \ge 2|x|$ ist.

(E2) exp(0) = 1 (Anfangswert = 1)

(E3) $\exp'(x) = \exp(x)$ (Wachstumsgesetz $y' = y$)

(E4) Sind y_0 und c beliebige Konstante ≠ 0, so gibt es genau eine Funktion y = g(x) mit dem natürlichen Wachstumsgesetz $\frac{y'}{y} = c$ und dem Anfangswert y(0) = y_0.
Ihr Name: Allgemeine Exponentialfunktion,
Berechnungsformel: $y = y_0 \cdot \exp(c \cdot x)$,
Ableitung: $y' = c \cdot y = c \cdot y_0 \cdot \exp(c \cdot x)$

(E5) exp(a+b)= exp(a) · exp(b) für alle a, b ∈ $\mathbb{R}$.

(E6) $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$, insbesondere gilt exp(x) ≠ 0 stets.

Die Zahl exp(1) = e heißt die **Eulersche Konstante**. Sie ist eine Dezimalzahl mit unendlich vielen nichtperiodischen Nachkommastellen (d.h. e $\notin \mathbb{Q}$) und ist nur näherungsweise berechenbar mittels (E1). Aus (E5) und (E6) ergibt sich, dass alle Funktionswerte exp(n) mit ganzzahligem n als Potenzen der Konstante e verstanden werden können:

$$\exp(n) = e^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

Daher stammen die Namen „Exponentialfunktion“ und „e-Funktion“. Man beachte, dass für $x \notin \mathbb{Z}$ die vermeintliche „Potenz“ e^x nur näherungsweise mittels der Schätzformel aus (E1) für exp(x) berechnet werden kann. X-fache Multiplikation von e mit sich selber macht dann keinen Sinn.

Der natürliche Logarithmus ln:

(L1) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

(L2) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

(L3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Ableitung: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$.

Umkehrregeln:

Für alle reellen x gilt ln(exp(x)) = x

Für alle positiven x gilt exp(ln(x)) = x