Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Dr. Helga Lohöfer

Wintersemester 2013/14

## Grundlagen der Mathematik für Biologen

- Blatt 13 -

Abgabe: Montag, den 03.02.2014, vor der Vorlesung, spätestens14:05 Uhr

**Lektüre:** Skript Kap. 8.4 – 8.6, 8.8, Anhang C
**Thema:** Streubereich, Konfidenzintervall für $\mu$ bzw. $\overline{x}$, F-Test und t-Test

1. In einem ausgedehnten Wasserschutzgebiet wurden an acht Stellen Grundwasserproben entnommen und photometrisch auf ihren Gehalt an Phosphat untersucht. Der Gehalt war normalverteilt, Mittelwert 3,025 $mg \cdot l^{-1}$, Standardabweichung 0,324 $mg \cdot l^{-1}$.
   a) Zwischen welchen Eckwerten (2 Nachkommastellen) liegt mit 99% Sicherheit die Phosphatkonzentration an jeder Stelle in diesem Gebiet? (1,5)
   b) Zwischen welchen Eckwerten (2 Nachkommastellen) liegt mit 99% Sicherheit die durchschnittliche Phosphatkonzentration im gesamten Gebiet? (1,5)

2. Bei einer Charge Tabletten mit einem pflanzlichen Wirkstoff ergaben 51 normalverteilte Messungen einen mittleren Wirkstoffgehalt pro Tablette von 129,8 mg, empirische Standardabweichung 0,5 mg.
   a) Innerhalb welcher Eckwerte (2 Nachkommastellen) liegt der Wirkstoffgehalt von 95% aller Tabletten dieser Charge? (1)
   b) Der Packungsaufdruck nennt 130 mg Wirkstoff pro Tablette. Wird dieser Sollwert tatsächlich eingehalten? Die Frage ist dann mit 95% bzw. 99% bzw. 99,9% Sicherheit zu verneinen, wenn der Sollwert nicht im 95%- bzw. 99%- bzw. 99.9%-Konfidenzintervall für $\mu$ liegt. (2)

3. Von zwei Weizenfeldern A und B wurde der jährlichen Ernteertrag x (in 100 kg/ha) protokolliert. Es ergaben sich folgende normalverteilte Messreihen:

| Anbaugebiet | Anzahl Jahre | Mittelwert | Standardabweichung |
|---|---|---|---|
| A | 12 | 52,3 | 5,6 |
| B | 9 | 56,1 | 5,1 |

   a) Ist es nötig, den F-Test anzuwenden? (Kurze Begründung) (1)
   b) Sind die Unterschiede im Ernteertrag als rein zufällig anzusehen? Oder sind die Felder mit benennbarer Sicherheit unterschiedlich ertragreich? (2)

4. Labor A publizierte Messungen zur Bestimmung einer Stoffkonstanten x bei 50 $^0$C. Um abzuklären, ob die Konstante x temperaturabhängig ist, unternahm man in Labor B Messungen für den Temperaturwert 60 $^0$C. Es ergaben sich folgende normalverteilte Messreihen:

| | n | $\overline{x}$ | s |
|---|---|---|---|
| Labor A, 50 $^0$C | 29 | 250 | 1,1 |
| Labor B, 60 $^0$C | 25 | 253 | 1,3 |

   Beantworten Sie die nachstehenden Fragen, ggf. mit Angabe der Irrtumswahrscheinlichkeit:
   (1) Machten beide Labors Experimente zum selben x?
   (2) Benutzten beide Labors dieselbe Messmethode?
   (3) Darf man die Daten beider Messreihen zu einer einzigen, längeren Messreihe zusammenschütten?
   (4) Lieferten die Experimente der beiden Labors verschiedene Ergebnisse?
   (5) Ist die Stoffkonstante x temperaturabhängig? (7)

<u>Zur Klausur muss mitgebracht werden:</u> **Studentenausweis und Lichtbildausweis,** viel kariertes Papier (ca. 15 Blatt), Taschenrechner, halb- und doppeltlogarithmisches Papier, Lineal, statistische Tabellen (David-Test, t-Tabelle, F-Tabelle).
<u>Zum Mitbringen empfohlen:</u> Eigene Hausaufgaben, Lösungen, Unterrichtsmaterialien und –mitschrift.

<u>Klausurtermine:</u>
1. Termin: Mo, 24.02.2014, 10:15 – 12:00, Hans-Meerwein-Str., Hörsaalgebäude Chemie, HS A + B
2. Termin: Do, 10.04.2014, 10:15 – 12:00, Hans-Meerwein-Str., Hörsaalgebäude Chemie, HS A

Schätzung des Streubereichs und des Konfidenzintervalls für $\mu$:

Gegeben eine normalverteilte Messreihe mit n, $\overline{x}$ und s. Für $f = n - 1$ und die gewünschte Sicherheit schlage in der t-Tabelle den Tabellenwert t nach. Dann liegen mit der gewählten Sicherheit

- alle möglichen Messwerte zwischen den Eckdaten $\overline{x} \pm t \cdot s$
- der Erwartungswert $\mu$ zwischen den Eckdaten $\overline{x} \pm \frac{t \cdot s}{\sqrt{n}}$

Der t-Test:

Voraussetzung: Gegeben

- zwei normalverteilte Messreihen zur selben Zufallsvariablen x, d.h. dass beidesmal dieselbe Messmethode angewandt wurde (im Zweifel ist dies überprüfbar mit dem F-Test, s. Internetskript Kap. 8.6)
- die drei stastischen Daten $n_1$, $\overline{x}_1$, $s_1$ und $n_2$, $\overline{x}_2$ und $s_2$ (wobei $n_1$, $n_2$ beide $\neq \infty$), sowie
- die t-Tabelle (s. Internetskript Anhang C.5).

Ziel: Prüfung, ob die Mittelwerte $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ sich mehr als bloß zufällig unterscheiden. Wenn ja, gehören die Messreihen zu zwei verschiedenen Experimenten mit unterschiedlichem Ergebnis.

Durchführung:

1. Schritt: Berechne

$$s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

2. Schritt: Berechne

$$T = \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{s_d} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \quad \text{sowie} \quad f = n_1 + n_2 - 2$$

3. Schritt: Schlage für dieses f den Eintrag t in der t-Tabelle nach und vergleiche ihn mit T.

Auswertung:

- Ist $T < t$ (95%), so ist durch den Test ein Unterschied zwischen $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ "nicht feststellbar".
- Ist $T \geq t$ (95%), so sind $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ wahrscheinlich (d.h. mit 95% Sicherheit) verschieden.
- Ist $T \geq t$ (99%), so sind $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ signifikant (d.h. mit 99% Sicherheit) verschieden.
- Ist $T \geq t$ (99,9%), so sind $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ hochsignifikant (d.h. mit 99,9% Sicherheit) verschieden.

Sollen mehr als zwei normalverteilte Messreihen simultan getestet werden, so ist der F-Test durch den Bartlett-Test (Skript Kap. 8.9.1) der t-Test durch die Einfache Varianzanalyse (Skript Kap. 8.9.2) zu ersetzen.

t-Tabelle:

| f | Sicherheit in %: 95% | 99% | 99,9% |
|---|---|---|---|
| 1 | 12,71 | 63,66 | 636,62 |
| 2 | 4,30 | 9,92 | 31,60 |
| 3 | 3,18 | 5,84 | 12,92 |
| 4 | 2,78 | 4,60 | 8,61 |
| 5 | 2,57 | 4,03 | 6,86 |
| 6 | 2,45 | 3,71 | 5,96 |
| 7 | 2,37 | 3,50 | 5,41 |
| 8 | 2,31 | 3,36 | 5,04 |
| 9 | 2,26 | 3,25 | 4,78 |
| 10 | 2,23 | 3,17 | 4,59 |
| 11 | 2,20 | 3,11 | 4,44 |
| 12 | 2,18 | 3,06 | 4,32 |
| 13 | 2,16 | 3,01 | 4,22 |
| 14 | 2,15 | 2,98 | 4,14 |
| 15 | 2,13 | 2,95 | 4,07 |
| 16 | 2,12 | 2,92 | 4,02 |
| 17 | 2,11 | 2,90 | 3,96 |
| 18 | 2,10 | 2,88 | 3,92 |
| 19 | 2,09 | 2,86 | 3,88 |
| 20 | 2,08 | 2,85 | 3,85 |

t-Tabelle:

| f | Sicherheit in %: 95% | 99% | 99,9% |
|---|---|---|---|
| 25 | 2,060 | 2,787 | 3,725 |
| 30 | 2,042 | 2,750 | 3,646 |
| 35 | 2,030 | 2,724 | 3,592 |
| 40 | 2,021 | 2,704 | 3,551 |
| 45 | 2,014 | 2,689 | 3,521 |
| 50 | 2,009 | 2,678 | 3,496 |
| 100 | 1,984 | 2,626 | 3,390 |
| 200 | 1,972 | 2,601 | 3,340 |
| 300 | 1,969 | 2,595 | 3,328 |
| 400 | 1,967 | 2,590 | 3,318 |
| 500 | 1,965 | 2,586 | 3,310 |
| 600 | 1,964 | 2,585 | 3,307 |
| 700 | 1,963 | 2,584 | 3,304 |
| 800 | 1,963 | 2,583 | 3,302 |
| ∞ | 1,960 | 3,576 | 3,291 |