

# Gebrauchsanleitung für logarithmisches Papier

Dr. Helga Lohöfer  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Universität Marburg

## 1 Die Lage der $\ln x$ -Werte auf der senkrechten Achse

Errechnet man eine Wertetabelle der Funktion  $y = \ln x$  für die Werte  $x = 1, 2, \dots, 10$ , so erhält man (auf 2 Nachkommastellen gerundet):

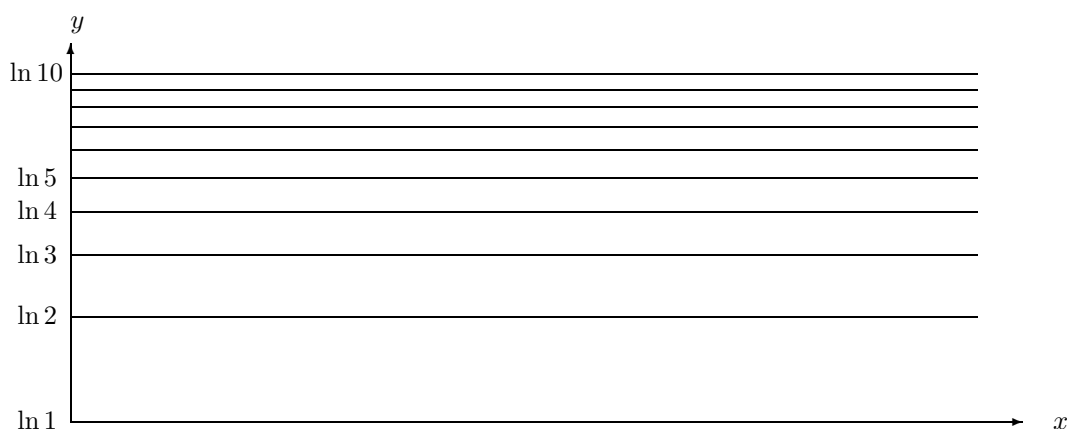
$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	0.00	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20	2.30

Man sieht, wie der Abstand zweier aufeinander folgender  $\ln$ -Werte in dieser Tabelle immer kleiner wird. Skizziert man in einem normalen rechtwinkligen  $(x, y)$ -Koordinatensystem die zehn horizontalen Geraden

$$y = \ln 1, \quad y = \ln 2, \quad y = \ln 3, \quad \dots \quad y = \ln 10,$$

so erhält man das folgende charakteristische

**logarithmische Streifenmuster für die  $y$ -Achse:**



Die Bandbreite  $B$  dieses logarithmischen Streifenmusters ist

$$B = \ln 10$$

Ist  $a \in \mathbb{R}$  irgendeine Zahl im Bereich  $1 \leq a < 10$ , so lässt sich die Lage von  $\ln a$  zwischen  $\ln 1 = 0$  und  $\ln 10 \approx 2.30$  auf der senkrechten Achse mittels dieser Hilfslinien recht gut lokalisieren, ohne dass man den Zahlwert von  $\ln a$  zuvor ausrechnen muss.

(Üblicherweise bereichert man das logarithmische Streifenmuster noch um (dünner eingetragene) Linien für  $y = \ln 1.1$   $y = \ln 1.2$   $\dots$   $y = \ln 1.9$  und weitere Hilfslinien.)

Jede **positive** reelle Zahl  $z$  lässt sich schreiben in dem Format

$$z = a \cdot 10^k, \quad \text{mit } 1 \leq a < 10 \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

**Beispiel:**  $3781.9 = 3.7819 \cdot 10^3$   
 $12.568 = 1.2568 \cdot 10^1$   
 $\pi \approx 3.14 \cdot 10^0$   
 $0.07635 = 7.635 \cdot 10^{-2}$

Nach den Rechenregeln für Logarithmen gilt

$$z = a \cdot 10^k \implies \ln z = \ln a + k \cdot \ln 10$$

Das bedeutet wegen  $B = \ln 10$  graphisch:

Hat man die Lage von  $\ln a$  mittels eines logarithmischen Streifenmusters gefunden, so erhält man die Lage von  $\ln z = \ln(a \cdot 10^k)$  durch Parallelverschiebung um den Wert  $k \cdot B$  (das ist eine Verschiebung nach oben, wenn  $k$  positiv ist, nach unten, wenn  $k$  negativ ist).

Setzt man nun mehrere logarithmische Streifenmuster optisch aneinander, indem man die oberste horizontale Linie des einen Streifens mit der untersten horizontalen Linie des nächsten Streifens identifiziert, so folgt hieraus:

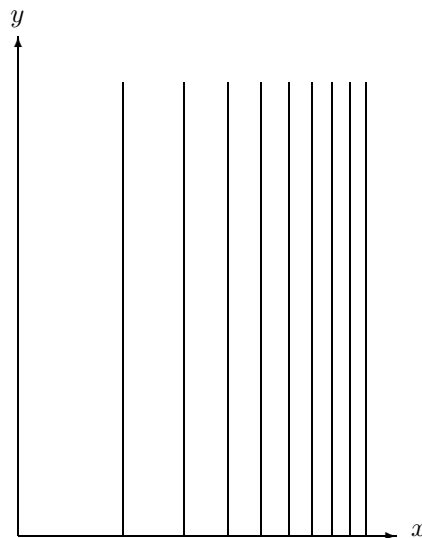
**Regel 1:** Innerhalb eines logarithmischen Streifenmuster liegen die  $\ln$ -Werte aller Zahlen der Bauart  $z = a \cdot 10^k$  mit demselben  $k$  und unterschiedlichem  $1 \leq a < 10$ .

**Regel 2:** Ist ein logarithmisches Streifenmuster der  $y$ -Achse für alle Zahlen  $z = a \cdot 10^k$  mit einem festen Wert von  $k$  reserviert, so ist das nächsthöhere logarithmische Streifenmuster für alle Zahlen  $z = a \cdot 10^{k+1}$  reserviert und das nächstniedrigere Streifenmuster für alle Zahlen  $z = a \cdot 10^{k-1}$ .

## 2 Die Lage der $\ln x$ -Werte auf der waagerechten Achse

Ganz analog kann man auf der waagerechten Achse die Lage von  $\ln$ -Werten finden, ohne diese zuvor berechnet zu haben, indem man die  $x$ -Achse mit logarithmischen Streifenmustern versieht. Die Hilfslinien verlaufen dann nicht waagerecht, sondern senkrecht, und mehrere Streifenmuster sind dann nicht von unten nach oben, sondern von links nach rechts angeordnet.

**logarithmisches Streifenmuster für die  $x$ -Achse:**



Wieder gilt Regel 1. In Analogie zu Regel 2 gilt

**Regel 3:** Ist ein logarithmisches Streifenmuster der  $x$ -Achse für alle Zahlen  $z = a \cdot 10^k$  mit einem festen Wert von  $k$  reserviert, so ist das rechts benachbarte logarithmische Streifenmuster für alle Zahlen  $z = a \cdot 10^{k+1}$  reserviert und das links benachbarte Streifenmuster für alle Zahlen  $z = a \cdot 10^{k-1}$ .

### 3 Die zwei Sorten von logarithmischem Papier und ihr Verwendungszweck

#### 3.1 Halb-logarithmisches Papier

Eine Achse ist mit einer üblichen Millimeterpapier-Einteilung versehen, die andere mit logarithmischen Streifenmustern.

**Häufigster Verwendungszweck: Test auf allgemeine Exponentialfunktion**

Gegeben ist eine Wertetabelle für zwei Variable  $x$  und  $y$ , und es soll graphisch getestet werden, ob, ja oder nein,  $y$  als Funktion von  $x$  eine allgemeine Exponentialfunktion ist, d.h. ob gilt  $y = y_0 \cdot e^{cx}$  mit irgendwelchen unbekanntenen Konstanten  $y_0$  und  $c$ . Charakteristisch hierfür ist, dass die Punkte  $(x|\ln y)$  ungefähr auf einer Geraden liegen (nicht auf einem Bogen), was mit Linealtest zu entscheiden ist (siehe Skript, Kap. 3.1.5). Man nimmt die millimeter-skalierte Achse als die waagerechte Achse, die logarithmisch skalierte Achse als senkrechte Achse und kann nun **die Punkte  $(x|\ln y)$  in das halblogarithmische Papier eintragen, ohne den Zahlwert von  $\ln y$  berechnet zu haben.**

**Weiterer Verwendungszweck: Test auf allgemeine Logarithmusfunktion**

Gegeben ist eine Wertetabelle für zwei Variable  $x$  und  $y$ , und es soll graphisch getestet werden, ob, ja oder nein,  $y$  als Funktion von  $x$  eine allgemeine Logarithmusfunktion ist, d.h. ob gilt  $y = c + \log_a x$  mit irgendwelchen unbekanntenen Konstanten  $c$  und  $a$ . Charakteristisch hierfür ist, dass die Punkte  $(\ln x|y)$  ungefähr auf einer Geraden liegen (nicht auf einem Bogen), was mit Linealtest zu entscheiden ist (siehe Skript, Kap. 3.1.5). Man nimmt die logarithmisch skalierte Achse als waagerechte Achse, die millimeter-skalierte Achse als senkrechte Achse und kann nun **die Punkte  $(\ln x|y)$  in das halblogarithmische Papier eintragen, ohne den Zahlwert von  $\ln x$  berechnet zu haben.**

#### 3.2 Doppelt-logarithmisches Papier

Beide Achsen sind mit logarithmischen Streifenmustern versehen.

**Einzigster Verwendungszweck: Test auf allgemeine Potenzfunktion**

Gegeben ist eine Wertetabelle für zwei Variable  $x$  und  $y$ , und es soll graphisch getestet werden, ob, ja oder nein,  $y$  als Funktion von  $x$  eine allgemeine Potenzfunktion ist, d.h. ob gilt  $y = a \cdot x^b$  mit irgendwelchen unbekanntenen Konstanten  $a$  und  $b$ . Charakteristisch hierfür ist, dass die Punkte  $(\ln x|\ln y)$  ungefähr auf einer Geraden liegen (nicht auf einem Bogen), was mit Linealtest zu entscheiden ist (siehe Skript, Kap. 3.1.5). In das doppeltlogarithmische Papier kann man **die Punkte  $(\ln x|\ln y)$  eintragen, ohne den Zahlwert von  $\ln x$  und  $\ln y$  berechnet zu haben.**

Ist mit logarithmischem Papier ein graphischer Test erfolgreich verlaufen, der Funktionstyp also erkannt worden, und sollen nun darüber hinaus die Konstanten in der Berechnungsformel für  $y$  als Funktion von  $x$  ausgerechnet werden, so müssen die einschlägigen  $\ln$ -Werte nachträglich doch noch berechnet werden. Anleitung siehe Skript, Anhang A, Schritte 4-6.

## 4 Zum praktischen Umgang mit logarithmischem Papier

Beim praktischen Gebrauch von halb- und doppelt-logarithmischem Papier sind folgende Besonderheiten zu beachten:

**Regel 4:** Da, wo auf einer logarithmisch skalierten Achse  $\ln a \cdot 10^k$  lokalisiert ist, schreibt man an die Achse einfach  $a \cdot 10^k$ . Also statt  $\ln 1$ ,  $\ln 10$ ,  $\ln 100$  usw. schreibt man einfach 1, 10, 100 usw. Daraus folgt:

**Regel 5:** Liest man von einem beliebigen Punkt des Spezialpapiers seine Koordinaten an den Achsen ab, so erhält man nicht die halb- oder doppelt-logarithmischen Zahlwerte, sondern das Wertepaar  $(x, y)$ , welches in der **ursprünglichen Wertetabelle** zu diesem Punkt gehören würde.

**Regel 6:** Auf einer logarithmisch skalierten Achse darf nirgends die Beschriftung "0" erscheinen, da  $\ln 0$  nicht existiert. Insbesondere folgt: Auf halb- und doppelt-logarithmischem Papier **gibt es keinen Punkt für den Ursprung**  $(x, y) = (0, 0)$ .

**Regel 7:** Während man auf einer Achse mit normaler Millimeterpapier-Skalierung jede Freiheit hat, wie man die vorgegebene Einteilung verwendet, etwa für Schrittlängen 0 0,01 0,02 usw. oder 0 5 10 15 usw. oder 600 800 1000 1200 usw., **hat man bei der Verwendung einer logarithmisch skalierten Achse keinerlei Wahlfreiheit:**

Enthält die ursprüngliche Wertetabelle eine Rubrik mit Zahlen  $z_1, \dots, z_n$ , und sollen die Werte  $\ln z_i$  die 1. oder 2. Koordinate von Punkten im graphischen Test bilden, so geht man wie folgt vor (gemäß Regel 2 und 3):

1. Schritt: Man bestimmt zunächst die kleinste **positive** Zahl in der Rubrik, sie heiße  $z_i$  (meist ist dies die erste oder letzte in der Rubrik). (Wertepaare mit  $z_i = 0$  werden beim graphischen Test weggelassen!)

2. Schritt: Man schreibt diese kleinste Zahl in der Form

$$z_i = a \cdot 10^n \quad \text{mit } 1 \leq a < 10.$$

3. Schritt: Nun schreibt man bei der entsprechenden logarithmischen Achse (1. Koordinate = waagerechte Achse, 2. Koordinate = senkrechte Achse) an die 1. Linie des 1. logarithmischen Streifens  $1 \cdot 10^n$ , an die 2. Linie des 1. logarithmischen Streifens  $2 \cdot 10^n$ , usw.

An die 1. Linie des 2. logarithmischen Streifens schreibt man  $1 \cdot 10^{n+1}$ , an die 2. Linie des 2. logarithmischen Streifens  $2 \cdot 10^{n+1}$  usw.

An die 1. Linie des 3. logarithmischen Streifens schreibt man  $1 \cdot 10^{n+2}$  usw.

4. Schritt: Sind die Achsen fertig beschriftet, so findet man die Lage des Punktes mit einer Koordinate  $\ln z$ , indem man die Zahl  $z$  zunächst auf das Format  $z = a \cdot 10^k$  bringt (mit  $1 \leq a < 10$ ) und anhand des Exponenten  $k$  auf der zuständigen Achse den zugehörigen logarithmischen Streifen bestimmt. Die Lage innerhalb dieses Streifens ergibt sich aus dem Vorfaktor  $a$ .