

Kapitel 5

Die wichtigsten nicht-elementaren Funktionen

5.1 Die natürlichen Wachstums- und Abbaugesetze

Ist $y = f(x)$ differenzierbar nach x und $z = y' = dy/dx$ die Ableitung von y nach x , so gibt z für jeden festen x -Wert die **momentane Änderungsrate von y bezüglich x** an.

Bezeichnung: *Das Größenverhältnis zwischen der momentanen Änderungsrate von y und y selbst, d.h. also der Quotient*

$$\frac{z}{y} = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

heißt die **momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x** .

Da y' und y jeweils Funktionen von x sind, ist auch y'/y i.a. wieder eine Funktion von x .

Beispiel: Untersucht man das Volumen V (in cm^3) eines Tumors als Funktion der Zeit t (in Tagen (=d)), so misst die momentane Änderungsrate $V' = dv/dt$ die augenblickliche Wachstumsgeschwindigkeit des Tumors in Kubikzentimeter pro Tag ($cm^3 \cdot d^{-1}$).

Misst man zu einem Zeitpunkt t die Werte $V = 10[cm^3]$ und $V' = 0,1[cm^3 \cdot d^{-1}]$, so erhält man

$$\frac{V'}{V} = \frac{0,1[cm^3 \cdot d^{-1}]}{10[cm^3]} = 0,01[d^{-1}] = 1[\% \cdot d^{-1}]$$

d.h. die momentane relative Änderungsrate beträgt, abhängig von dem gegebenen Zeitpunkt t , 1 Prozent pro Tag.

Merke: Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x beschreibt das momentane Änderungsverhalten von y in Prozent. Sie variiert i.a. in Abhängigkeit von x .

Häufig trifft man in der Empirie aber folgende besonders primitive Gesetzmäßigkeit an:

(1) **“Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x ist konstant.“**

Als Formel:

$$\frac{y'}{y} = c,$$

mit einer vom x -Wert unabhängigen, für die Funktion $y = f(x)$ **spezifischen Konstanten c** . Das besagt mit anderen Worten:

(2) **“Die momentane Änderungsrate von y bezüglich x ist proportional zur bisherigen Größe von y .“**

Als Formel:

$$y' = c \cdot y.$$

Für positives y folgt aus dieser Formel mit *Regel 18*¹

– Wenn c positiv ist, so ist y' permanent positiv, also $y = f(x)$ streng monoton wachsend.

– Wenn c negativ ist, so ist y' permanent negativ, also $y = f(x)$ streng monoton fallend.

Daraus erklärt sich folgende

Bezeichnung: $y = f(x)$ erfüllt ein **natürliches Wachstumsgesetz** (bzw. ein **natürliches Abbaugesetz**), wenn es eine **positive** (bzw. **negative**) Konstante c gibt, so dass

$$y' = \frac{dy}{dx} = c \cdot y \text{ ist.}$$

Mit *Regel 11*² folgt die für den Anwender sehr wichtige

Regel 21 (Kriterium zur Erkennung von natürlichem Wachstum bzw. Abbau):

R 21

$y = f(x)$ erfüllt genau dann ein natürliches Wachstums- bzw. Abbaugesetz, wenn es eine für die Funktion spezifische positive bzw. negative Konstante c gibt, so dass für alle kleinen Δx gilt:

$$\Delta y \approx c \cdot y \cdot \Delta x,$$

in Worten gesagt, wenn gilt:

(3) **“Bei kleinen Änderungen von x ist die Änderung von y proportional zur Änderung von x und zum bisherigen Wert von y .“**

Dividiert man beide Seiten noch durch y , so erhält man

$$\frac{\Delta y}{y} \approx c \cdot \Delta x,$$

in Worten:

(4) **“Bei kleinen Änderungen von x ist die relative Änderung von y proportional zur Änderung von x .“**

Die Formulierungen (1), (2), (3) und (4) beschreiben also alle dieselbe Gesetzmäßigkeit, nämlich natürliches Wachstum bzw. natürlichen Abbau.

¹siehe 4.6, S.56

²siehe 4.3.2, S.47

5.1.1 Beispiele für natürliche Wachstumsgesetze

Beispiele für das Wirken natürlicher Wachstumsgesetze finden sich vorwiegend in der Biologie und in der Ökonomie. Sie kommen stets nur in einem begrenzten Wertebereich der freien Variablen zur Entfaltung, danach tritt einer von folgenden zwei Fällen ein:

1. Entweder treten zunehmend wachstumshemmende äußere Faktoren auf, bis das Wachstum praktisch ganz aufhört und die abhängige Variable y gegen eine Konstante \hat{y} als Grenzwert strebt (= sog. "dynamisches Gleichgewicht")³ oder aber
2. das Wachstum bricht in einer Katastrophensituation zusammen.

Aus $\Delta y \approx c \cdot y \cdot \Delta x$ ist abzulesen, dass im Falle des natürlichen Wachstums das Wachstum von x und y sehr wenig koordiniert ist: Ist y nahe Null, so wächst y extrem schwach im Vergleich zu x , ist y im mehrstelligen Bereich, so wächst y extrem stark im Vergleich zu x , was das eigentliche Problem bildet, denn ist y schon sehr groß, so wird die momentane Wachstumsrate von y "unerträglich" groß.

Die Gesetzmäßigkeit des natürlichen Wachstums ist zu primitiv, um eine selbststeuernde Wachstumsregulierung zu leisten. Wachstumsabschwächung wird vielmehr durch äußere Umstände erzwungen, ohne Rücksicht auf die daraus folgende Dramatik bzw. Konfliktsituation (Überpopulation, Nahrungsmangel, explosionsartiges Wachstum großer Vermögen und großer Schulden). Zwei einfache Gesetze von gebremstem Wachstum (die aber nicht - wie bei der logistischen Differentialgleichung in der untenstehenden Fußnote - den Wert von y durch eine spezifische Konstante nach oben beschränken) sind das lineare Wachstum sowie die Allometrie. Beide werden näher behandelt in 5.8, S.91 ff.

1. Beispiel (Biologie):

Wächst eine Population (Zellen, Bakterien, Algen. . .) ungehemmt pro Zeiteinheit um p Prozent ($0 < p < 100$) und ist $m(t)[g]$ ihre Masse zum Zeitpunkt $t[h]$, so gilt für alle **kleinen Zeitspannen** $\Delta t[h]$ und den **innerhalb** dieser Zeitspanne eingetretenen Massenzuwachs $\Delta m[g]$ das Gesetz: **Der Massenzuwachs Δm ist proportional zur schon vorhandenen Masse m und zur Zeitspanne Δt .**

Mit *Regel 4*⁴ gibt es eine von t und m unabhängige Konstante c , so dass gilt:

$$\Delta m \approx c \cdot m \cdot \Delta t$$

$c \approx \frac{\Delta m[g]}{m[g] \cdot \Delta t[h]}$ hat dabei die Dimension $[h^{-1}]$ und einen Zahlwert, welcher ein wenig kleiner als p Prozent ist. (Genau gilt: $c = \ln(1 + \frac{p}{100}) \leq \frac{p}{100}$, wie mit den Mitteln von 5.4 folgt.)

Es folgt mit *Regel 11*⁵

$$\frac{dm}{dt} = m'(t) = c \cdot m$$

³Dieses Phänomen kann man beim Populationswachstum in der Biologie öfter beobachten, aber auch beim Wachstum von Volkswirtschaften. Es wird durch folgende Gesetzmäßigkeit beschrieben:

Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x ist proportional zum Abstand zwischen dem (kleineren) y und dem (größeren) Grenzwert \hat{y} .

Die zugehörige Formel

$$\frac{y'}{y} = c \cdot (\hat{y} - y)$$

ist unter dem Namen **logistische Differentialgleichung** bekannt. Sie besagt, dass die prozentuale Wachstumsrate am größten ist, je weiter y noch von seinem maximal möglichen Wert entfernt ist.

⁴siehe 2.3, S.20

⁵siehe 4.3.2, S.47

In Worten: Die **momentane Änderungsrate** der Masse m bezüglich der Zeit t ist **proportional** zur schon vorhandenen Masse, und die Proportionalitätskonstante c ist die **konstante momentane relative Änderungsrate der Masse bezüglich der Zeit**. Entsprechendes gilt in der Epidemiologie für in der Anfangsphase ungehemmt sich ausbreitende Seuchen.

2. Beispiel (Ökonomie):

In der Ökonomie wirken natürliche Wachstumsgesetze bei mit konstantem Zinssatz verzinstem Kapital, auch bei ebensolchen Schulden, allgemein bei jedem prozentualen Wachstum (z.B. Brutto sozialprodukt, Preissteigerungen, Umsatzsteigerungen), *solange der Prozentsatz p konstant bleibt*. Es gilt dann stets:

Die **momentane Änderungsrate** (des Kapitals, der Schulden,...) bezüglich der Zeit ist **proportional** zur schon vorhandenen Größe (des Kapitals, der Schulden,...), und die **momentane relative Änderungsrate** bezüglich der Zeit ist **konstant** $\approx p\%$ (genauer: $= \ln(1 + p/100)$).

Speziell für Schulden lässt sich das Gesetz mit *Regel 21*⁶ z.B. so formulieren:

Für alle kleineren Zeitspannen gilt:

Der Schuldenzuwachs ist proportional zur schon vorhandenen Schuldenhöhe und zur verstrichenen Zeitspanne.

3. Beispiel (Physik, Thermodynamik):

Im gemäßigten Temperaturbereich und für alle kleineren Temperaturänderungen ΔT gilt für gestreckte Festkörper:

Die Längenänderung ΔL ist proportional zur bisherigen Länge L und zur Temperaturänderung ΔT .

Mit *Regel 4* gibt es eine von T und L unabhängige positive Konstante α , so dass gilt:

$$\Delta L \approx \alpha \cdot L \cdot \Delta T$$

Es folgt mit *Regel 11*:

$$\frac{dL}{dT} = L'(T) = \alpha \cdot L$$

In Worten: **Die momentane Änderungsrate** der Länge bezüglich der Temperatur ist **proportional** zur schon vorhandenen Länge.

Die Proportionalitätskonstante α heißt der **Längenausdehnungskoeffizient**. $\alpha \approx \frac{\Delta L[m]}{L[m] \cdot \Delta T[K]}$ hat die Dimension $[K^{-1}]$ und ist eine Stoffkonstante. Sie ist die **konstante momentane relative Änderungsrate der Länge bezüglich der Temperatur**.

5.1.2 Beispiele für natürliche Abbaugesetze

Beispiele für das Wirken natürlicher Abbaugesetze finden sich vorwiegend in der Physik und in der Chemie. Sie sind im Unterschied zu den natürlichen Wachstumsgesetzen stets unbefristet wirksam, d.h. durch nichts außer Kraft zu setzen oder zu beeinflussen.

⁶siehe 5.1, S.64

1. Beispiel (Atomphysik):

Bei radioaktivem Zerfall gilt für alle **kleinen** Zeitspannen Δt :

Die Abnahme der Partikel ΔN (auch: die Strahlungsabnahme) ist proportional zur bisherigen Anzahl der Partikel (auch: zur bisherigen Strahlung) und zur verstrichenen Zeitspanne.

Nach *Regel 4* gibt es eine von N und t unabhängige positive Konstante λ , so dass gilt:

$$\Delta N \approx -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

Es folgt mit *Regel 11*:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

Die stoffspezifische Proportionalitätskonstante λ heißt die **Zerfallskonstante** der radioaktiven Substanz. Sie ist die **konstante momentane relative Änderungsrate der Partikelzahl N (und der Strahlung) bezüglich der Zeit**. Wird in der Proportionalitätsformel die Zeit in [h], [d] oder [a] gemessen, so hat λ entsprechend die Dimension $[h^{-1}]$, $[d^{-1}]$ oder $[a^{-1}]$.

2. Beispiel (Optik):

Die verbleibende Intensität I von monochromem Licht nach Eintritt in ein lichtdurchlässiges Medium ist eine Funktion der Eindringtiefe d in das Medium. Dabei gilt für alle **kleinen** Δd und die innerhalb dieser geringen Schichtdicke Δd erfolgte Intensitätsabnahme:

Die Intensitätsabnahme ΔI ist proportional zur bisher vorhandenen Lichtintensität I und zur durchdrungenen Schichtdicke Δd .

Nach *Regel 4* gibt es eine von I und D unabhängige positive Konstante μ , so dass gilt:

$$\Delta I \approx -\mu \cdot I \cdot \Delta d$$

Es folgt mit *Regel 11*:

$$\frac{dI}{dd} = I'(d) = -\mu \cdot I$$

In Worten: Die **momentane Änderungsrate** der Lichtintensität bezüglich der Eindringtiefe ist **proportional** zur noch vorhandenen Lichtintensität.

Die Proportionalitätskonstante μ heißt der **Absorptionskoeffizient**. μ ist nur vom Medium und der Wellenlänge des Lichts abhängig und ist die **konstante momentane relative Änderungsrate der Lichtintensität bezüglich der Eindringtiefe**. Wird in der Proportionalitätsformel die Eindringtiefe d in [cm] gemessen, so hat μ die Dimension $[cm^{-1}]$.

Bezeichnet $I_0 = I(0)$ die Anfangsintensität des Lichts vor Eindringen in das Medium, so heißt das Größenverhältnis $\frac{I(d)}{I_0}$ die **Transmission** τ (dimensionslos, mit Werten zwischen 0 und 1, evtl. in % ausgedrückt). Weil τ sich von I nur um einen konstanten Normierungsfaktor I_0^{-1} unterscheidet, gilt auch⁷

$$\tau'(d) = -\mu \cdot \tau$$

⁷denn nach der Faktorregel (D.1) gilt $\tau'(d) = (I_0^{-1} \cdot I(d))' = I_0^{-1} \cdot I'(d) = I_0^{-1} \cdot (-\mu \cdot I) = -\mu \cdot I_0^{-1} \cdot I = -\mu \cdot \tau$

In Worten: Die **momentane Änderungsrate** der Transmission bezüglich der Eindringtiefe ist **proportional** zur noch vorhandenen Transmission.

Der Absorptionskoeffizient μ ist also auch die **konstante momentane relative Änderungsrate der Transmission bezüglich der Eindringtiefe**.

Dieses optische Gesetz hat eine **wichtige Anwendung in der Chemie**:

Ist das Medium eine spezifisch eingefärbte Lösung des Stoffes A , so ist die Farbtintensität ein Indikator für die Konzentration der Lösung. Die Farbkraft wächst proportional zur Konzentration der Lösung, die Lichtdurchlässigkeit nimmt dabei ab. Genauer gilt dann:

Der Absorptionskoeffizient μ ist proportional zur Stoffmengenkonzentration c (Lambert⁸).

Da man μ durch Messungen bestimmen und dann daraus c errechnen kann, liefert dies die Grundlage für alle Techniken der **Konzentrationsbestimmung von Lösungen mittels Photometrie**⁹.

3. Beispiel (Reaktionskinetik):

Bei chemischen Reaktionen $A \longrightarrow$ Produkte verringert sich die Konzentration c_A des Edukts A (und seine Masse m , sein Volumen V) in Abhängigkeit von der Zeit t . Erfolgt der Abbau, was häufig, aber nicht immer der Fall ist, bei konstant gehaltener Temperatur nach einem natürlichen Abbaugesetz, so gilt

$$c_A'(t) = -k \cdot c_A(t)$$

mit einer (positiven) reaktionsspezifischen Konstanten k , welche temperatur-, aber nicht zeitabhängig ist. Wird die Zeit t in Sekunden gemessen, so hat k die Dimension s^{-1} . Die momentane Änderungsrate $c_A'(t)$ ohne ihr negatives Vorzeichen, also

$$\left| \frac{dc_A}{dt} \right| = |c_A'(t)| = -c_A'(t)$$

ist bekanntlich ein Maß für die **momentane Reaktionsgeschwindigkeit v** der chemischen Reaktion.¹⁰ Es gilt bei natürlichem Abbau von A daher die Gleichung

$$v = k \cdot c_A$$

Diese Formel heißt das **Geschwindigkeitsgesetz** der Reaktion, die spezifische Konstante k heißt die **Geschwindigkeitskonstante**.

Ersetzt man in dieser Formel c_A durch $0,99 \cdot c_A$, so ändert sich v in $0,99 \cdot v$, in Worten: Reduziert man die Konzentration des (einzigsten) Edukts um 1%, so reduziert sich auch die Geschwindigkeit der Reaktion um 1%. Mit dem Begriff der Ordnung einer chemischen Reaktion¹¹ folgt:

Verläuft eine chemische Reaktion $A \longrightarrow$ Produkte nach einem natürlichen Abbaugesetz, so ist sie eine chemische Reaktion 1. Ordnung.

⁸Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), elsässischer Mathematiker, Naturforscher und Philosoph, Begründer der Photometrie

⁹siehe 5.7.1, S.90 ff

¹⁰siehe 4.3.3, S.47

¹¹siehe 1.2.2

Erst im Abschnitt 5.10.2, S.103 werden wir nachweisen können, dass darüber hinaus keine anderen Reaktionen $A \rightarrow$ Produkte die Reaktionsordnung 1 haben.

Weil die Masse m , das Volumen V und die Stoffmenge n von A proportional zur Konzentration von A sind, genügen dann auch sie alle einem natürlichen Abbaugesetz mit der selben Konstanten k .

Die **Abhängigkeit** der Geschwindigkeitskonstanten k **von der Temperatur T** genügt, ganz grob gesagt, stets dem Muster "hohe Temperatur \Rightarrow schnelle Reaktion \Rightarrow großes k ". Bei vielen chemischen Reaktionen gibt es aber sogar eine präzise Berechnungsformel für k als Funktion von T in Form der sog. "Arrheniusgleichung".¹²

5.2 Berechnungsformel für natürliche Wachstumsgesetze

Problem: Seien c und y_0 beliebige reelle Konstante. Sei $y = f(x)$ eine Funktion von x , von welcher man nur weiß, dass sie das natürliche Wachstums-/Abbaugesetz

$$y' = c \cdot y$$

erfüllt und den

$$\text{Anfangswert } y(0) = y_0$$

hat.

Gesucht ist ein **Algorithmus**, um y aus x zu berechnen.

5.2.1 Fall $c = 1$ und $y_0 = 1$: Die Exponentialfunktion $y = \exp(x)$

Da alle stetigen Funktionen näherungsweise durch Polynome berechenbar sind,¹³ folgender

Lösungsansatz: Suche ein **Näherungspolynom**

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (5.1)$$

also ein Polynom n -ten Grades mit der Bedingung $y = f(x) \approx f_n(x)$.

1. Frage: Welches sind die optimalen Zahlwerte für die Konstanten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$?

- f hat die Eigenschaft $f(0) = y_0 = 1$, andererseits ist $f_n(0) = a_0$ nach (5.1). Wähle also

$$a_0 = 1.$$

- f hat wegen $y' = c \cdot y = y$ die Eigenschaft $f'(x) = f(x)$. Deshalb soll das Polynom f_n die Eigenschaft

$$f'_n(x) \approx f_n(x)$$

¹²siehe unten, 5.5.2, S.83 ff

¹³siehe 2.2.6, S.20

haben. Aus dieser Forderung folgt durch Differenzieren von (5.1) gemäß *Regel 14*¹⁴

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1} \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Koeffizientenvergleich ergibt: Wähle

$$\begin{aligned} a_1 = a_0 &\implies && a_1 = 1 \\ 2a_2 = a_1 &\implies & a_2 = \frac{a_1}{2} &\implies & a_2 = \frac{1}{2} \\ 3a_3 = a_2 &\implies & a_3 = \frac{a_2}{3} &\implies & a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \\ 4a_4 = a_3 &\implies & a_4 = \frac{a_3}{4} &\implies & a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ && \vdots && \\ na_n = a_{n-1} &\implies & a_n = \frac{a_{n-1}}{n} &\implies & a_n = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Resultat: Wählt man

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n, \quad (5.2)$$

so gilt $f_n(0) = 1$ und $f'_n(x) \approx f_n(x)$ mit dem

$$\text{absoluten Fehler } |f'_n(x) - f_n(x)| = \left| \frac{1}{n!}x^n \right|$$

Nenne diesen absoluten Fehler d_n . Dann liefern die unendlich vielen Polynome aus (5.2) ein Angebot von näherungsweise Berechnungsformeln für $y = f(x)$ nur dann, wenn der absolute Fehler d_n hinreichend klein wird. Dessen Wert hängt aber von x ab.

2. Frage: Sei für x ein fester Zahlwert eingesetzt. Wann wird der absolute Fehler d_n besonders klein?

- 1. Fall: $x = 0$: Dann ist $d_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 2. Fall: $x > 0$: Nimm ein $N \geq 2x$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned} 2x \leq n & \quad | : 2n \\ \frac{x}{n} & \leq \frac{1}{2} \\ d_n = \frac{1}{n!}x^n & = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} \cdot \frac{x}{n} = d_{n-1} \cdot \frac{x}{n} \leq \frac{1}{2} \cdot d_{n-1}. \end{aligned}$$

¹⁴siehe 4.4.1, S.50

$$\begin{aligned}
\text{Daraus folgt } d_{N+1} &\leq \frac{1}{2} \cdot d_N \\
d_{N+2} &\leq \frac{1}{2} \cdot d_{N+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot d_N \\
d_{N+3} &\leq \frac{1}{2} \cdot d_{N+2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot d_N \\
&\vdots \\
d_{N+k} \dots &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot d_N \\
&\vdots
\end{aligned}$$

d.h. ab $n \geq N \geq 2|x|$ bilden die absoluten Fehler d_n eine monoton fallende Folge mit Grenzwert Null, die rascher gegen Null strebt, als die Folge $\left(\frac{1}{2}\right)^k d_N$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

- 3. Fall: $x < 0$: Da der Fehler absolut genommen wird, hat er denselben Wert wie für $|x|$, also gilt: Ab $n \geq N \geq 2|x|$ bilden die absoluten Fehler d_n eine monoton fallende Folge mit Grenzwert Null.

Daraus folgt: Für $x = 0$ tritt kein Fehler auf, für $x \neq 0$ werden die näherungsweisen Berechnungsformeln (5.2) ab $n \geq 2|x|$ allmählich brauchbar, und zwar umso besser, je größer n ist.

Sei für x ein fester Zahlwert gewählt und dazu der Zahlwert von $y = f(x)$ gesucht. Dann ist also

$$y_n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \quad (5.3)$$

eine Folge von Zahlen, die ab $n \geq 2|x|$ immer bessere Näherungswerte für y liefert.

3. Frage: Konvergiert die Folge y_1, y_2, y_3, \dots gegen einen Grenzwert \hat{y} ? Das wäre der exakte Wert von y !

- $x = 0$: Dann ist nach (5.3) $y_n = 1$ für alle n , die Folge y_1, y_2, y_3, \dots also konstant und somit konvergent gegen den Grenzwert $\hat{y} = 1 = y$.
- $x > 0$: Aus (5.3) ersieht man, dass

$$y_n = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n$$

gilt, d.h. die Folge y_1, y_2, y_3, \dots ist die **summatorische Folge** zur Folge der d_n . Da die d_n alle positiv sind, ist die Folge y_1, y_2, y_3, \dots also **monoton wachsend**. Sie konvergiert nach *Regel 5 über monotone Konvergenz*¹⁵ nur dann, wenn sie eine obere Schranke besitzt.

¹⁵siehe 3.3.2, S.33

Nun gilt aber für alle $n \geq N \geq 2x$, wenn man $n = N + k$ setzt,

$$\begin{aligned} y_n &= y_N + d_{N+1} + d_{N+2} + d_{N+3} + \dots + d_n \\ &= y_N + d_{N+1} + d_{N+2} + d_{N+3} + \dots + d_{N+k} \\ &\leq y_N + \frac{1}{2}d_N + \left(\frac{1}{2}\right)^2 d_N + \left(\frac{1}{2}\right)^3 d_N + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{N+k} d_N \\ &= y_N + \frac{1}{2}d_N \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{N+k} \right) \\ &\stackrel{\text{Regel 8}}{=} y_N + \frac{1}{2}d_N \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+k+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< y_N + \frac{1}{2}d_N \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = y_N + d_N \end{aligned}$$

Für alle $n \geq N \geq 2x$ gilt somit $y_N \leq y_n \leq y_N + d_N$. Die Konstante $C = y_N + d_N$ ist also eine obere Schranke, und mit *Regel 5* ergibt sich: Für $x > 0$ konvergiert die Folge y_1, y_2, y_3, \dots monoton wachsend gegen einen Grenzwert \hat{y} , welcher zwischen den Eckwerten y_N und $y_N + d_N$ liegt. **Der Abstand zwischen \hat{y} und y_N ist also kleiner als d_N .**

- $x < 0$: Da sich $\frac{1}{n!}x^n$ vom absoluten Fehler $d_n = \left| \frac{1}{n!}x^n \right|$ nur bei allen ungeraden n durch das Vorzeichen unterscheidet, erkennt man aus (5.3), dass die Folge y_1, y_2, y_3, \dots nun dadurch entsteht, dass man die absoluten Fehler d_n abwechselnd addiert und subtrahiert. Die bilden aber ab $n \geq N \geq 2|x|$ eine monoton fallende Folge mit Grenzwert Null. Jetzt besagt *Regel 6 über alternierende Konvergenz*¹⁶ : Die Folge y_1, y_2, y_3, \dots konvergiert ab $n \geq N \geq 2|x|$ alternierend gegen einen Grenzwert \hat{y} , der zwischen den Eckwerten y_{N-1} und y_N liegt. Deren Abstand ist gerade $= d_N$. **Also ist der Abstand zwischen \hat{y} und y_N wieder kleiner als d_N .**

Damit ist das Problem der Berechnung der Funktion $y = f(x)$, welche ein natürliches Wachstums-/Abbaugesetz $y' = c \cdot y$ erfüllt und den Anfangswert $y(0) = y_0$ hat, im Spezialfall $c = 1$ und $y_0 = 1$ vollständig gelöst. Wir erhalten:

Regel 22 (Algorithmus zur Berechnung der Exponentialfunktion):

R 22

Sei eine beliebige reelle Zahl als fester x -Wert gewählt. Für $n = 1, 2, 3, \dots$ berechne die Zahlen

$$y_n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n,$$

kurz:

$$y_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k.$$

Dann konvergiert die Folge y_1, y_2, y_3, \dots (=die summatorische Folge¹⁷ zur Folge der $d_k = \frac{1}{k!}x^k$) stets gegen einen Grenzwert \hat{y} . Der Zahlwert von \hat{y} ist durch den Zahlwert von x total determiniert.

¹⁶siehe 3.3.2, S.34

¹⁷siehe 3.3.3, S.34

\hat{y} ist also eine Funktion von x und besitzt ganz \mathbb{R} als Definitionsbereich. Sie heißt **die natürliche Wachstumsfunktion** oder **die Exponentialfunktion** (ältere Sprechweise: **e-Funktion**).

Schreibweisen:

$$\hat{y} = \exp(x) \text{ oder (älter) } y = e^x. \text{ Für } \hat{y} \text{ schreibt man vereinfacht } y.$$

$y = \exp(x)$ ist die einzige Funktion, welche die Eigenschaften

$$y' = y \quad \text{und} \quad f(0) = y_0 = 1$$

besitzt. Sie ist durch diese beiden Eigenschaften vollständig determiniert.

Regel 23 (Absoluter Fehler bei der Berechnung der Exponentialfunktion):

R 23

Für $y = \exp(x)$ gibt es keine elementare Berechnungsmethode, d.h. kein Verfahren, den exakten Wert in endlich vielen Schritten mit Punkt- und Strichrechnung auszurechnen, sondern nur Näherungsverfahren.

Bei der näherungsweise Berechnung mittels

$$y_n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

gilt für den absoluten Fehler $\Delta y = |y_n - \exp(x)|$ die Abschätzung

$$|\Delta y| \leq \frac{|x|^n}{n!} \quad \text{sobald nur } n \geq 2|x| \text{ ist.}$$

Regel 24 (Wert der Exponentialfunktion an der Stelle 0):

R 24

$$\exp(0) = 1.$$

Regel 25 (Ableitung der Exponentialfunktion):

R 25

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

5.2.2 Fall c und y_0 im Wert beliebig: Allgemeine Exponentialfunktionen

Regel 26 (Berechnungsformel für alle natürlichen Wachstums-/Abbauprozesse):

R 26

Ist x irgendeine Variable und sind c und y_0 beliebige Konstanten (auch negativ möglich), so gibt es stets genau eine einzige mathematische Funktion $y = f(x)$, welche das natürliche Wachstums- bzw. Abbaugesetz $y' = c \cdot y$ mit dem Anfangswert $f(0) = y_0$ erfüllt.

Ihr Name: **allgemeine Exponentialfunktion**

Ihre Berechnungsformel: $y = y_0 \cdot \exp(cx)$ ältere Schreibweise: $y = y_0 \cdot e^{cx}$.

Ihre Ableitung: $y' = c \cdot y_0 \cdot \exp(cx)$ bzw. $y' = c \cdot y_0 \cdot e^{cx}$.

Eine Stammfunktion: $u = \frac{1}{c} \cdot y_0 \cdot \exp(cx)$ bzw. $u = \frac{1}{c} \cdot y_0 \cdot e^{cx}$.

Beweis von Regel 26: Die Bedingungen

$$y' = c \cdot y \quad \text{und} \quad y(0) = y_0 \quad (5.4)$$

werden von der Funktion $y = y_0 \cdot \exp(cx)$ erfüllt, wie Nachrechnen¹⁸ zeigt:

$$\begin{aligned} y' &= (y_0 \cdot \exp(cx))' && | \text{Faktorregel (D.1)} \\ &= y_0 \cdot (\exp(cx))' && | \text{Kettenregel (D.5)} \\ &= y_0 \cdot \exp'(cx) \cdot (cx)' && | \text{Regel 25 und Regel 12} \\ &= y_0 \cdot \exp(cx) \cdot c \\ &= c \cdot (y_0 \cdot \exp(cx)) \\ &= c \cdot y \\ y(0) &= y_0 \cdot \exp(0) && | \text{Regel 24} \\ &= y_0 \cdot 1 \\ &= y_0 \end{aligned}$$

Einzigkeit dieser Funktion: Sei $u = g(x)$ noch eine Funktion von x mit den entsprechenden Eigenschaften, also

$$u' = c \cdot u \quad \text{und} \quad u(0) = y_0 \quad (5.5)$$

Für die Quotientenfunktion $q(x) = \frac{u(x)}{y(x)}$ (= das Größenverhältnis $u : y$) gilt:

$$\begin{aligned} q' &= \left(\frac{u}{y}\right)' && | \text{Quotientenregel (D.4)} \\ &= \frac{u' \cdot y - u \cdot y'}{y^2} && | \text{Einsetzen von (5.4) und (5.5)} \\ &= \frac{c \cdot u \cdot y - u \cdot c \cdot y}{y^2} \\ &= 0, && \text{und zwar für alle Zahlwerte von } x. \end{aligned}$$

Eine Funktion von x , deren Ableitung konstant $= 0$ ist, besitzt als Graph eine horizontale Gerade, d.h. es gibt eine Konstante a , so dass $q(x) = a$ gilt für alle Werte von x .

Berechnung von a : Setze $x = 0$ ein. Dann gilt nach (5.4) und (5.5)

$$a = q(0) = \frac{u(0)}{y(0)} = \frac{y_0}{y_0} = 1,$$

also ist $q(x) = 1$ und somit $u(x) = y(x)$ für alle Zahlwerte von x , was zu zeigen war. \square

5.2.3 Beispiele

1. Beispiel (Biologie):¹⁹

Wächst die Masse $m[g]$ einer Bakterienpopulation mit der Anfangsmasse $m(0) = m_0[g]$ im Laufe der Zeit $t[h]$ ungehemmt nach einem natürlichen Wachstumsgesetz $m'(t) = c \cdot m$,

¹⁸zu den zitierten Rechenregeln siehe 4.4.1, S.49 ff

¹⁹siehe 5.1.1, S.65

so hat die konstante momentane relative Änderungsrate c die Dimension $[h^{-1}]$, und die Masse berechnet sich aus der Zeit nach der Formel

$$m[g] = m_0[g] \cdot \exp(c[h^{-1}] \cdot t[h]),$$

kurz:

$$m = m_0 \cdot \exp(ct) [g].$$

2. Beispiel (Optik):²⁰

Ist τ (dimensionslos) die Transmission von monochromem Licht bei Durchtritt durch ein Medium und $\mu[cm^{-1}]$ der Absorptionskoeffizient, so gilt, weil $\tau(0) = \tau_0 = 1$ ist und das Abbaugesetz $\tau'(t) = -\mu \cdot \tau$ erfüllt ist, folgende Berechnungsformel für τ als Funktion der Eindringtiefe d :

$$\tau = \exp(-\mu[cm^{-1}] \cdot d[cm]),$$

kurz:

$$\tau = \exp(-\mu d).$$

3. Beispiel (Reaktionskinetik):²¹

Genügt die Reaktion $A \rightarrow$ Produkte einem natürlichen Abbaugesetz (und ist somit eine chemische Reaktion 1. Ordnung), und ist $k[s^{-1}]$ bei gegebener konstanter Temperatur ihre Geschwindigkeitskonstante, so gilt für die Konzentration $c_A([mol \cdot l^{-1}])$ als Funktion der Zeit $t[s]$ das natürliche Abbaugesetz

$$c_A'(t) = -k \cdot c_A(t).$$

Ist $(c_A)_0$ die Anfangskonzentration, so berechnet sich folglich die Konzentration als Funktion der Zeit nach der Formel

$$c_A[mol \cdot l^{-1}] = (c_A)_0[mol \cdot l^{-1}] \cdot \exp(-k[s^{-1}] \cdot t[s]),$$

kurz:

$$c_A = (c_A)_0 \cdot \exp(-kt) \quad [mol \cdot l^{-1}].$$

Entsprechende Berechnungsformeln besitzen die übrigen Beispiele von natürlichen Wachstums- bzw. Abbauprozessen aus 5.1.1 und 5.1.2.

5.3 Eigenschaften der Exponentialfunktion $y = \exp(x)$

Wähle eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{R}$ und errechne dazu die Zahl $y_0 = \exp(a)$. Dann hat die Funktion

$$y = \exp(a + x) \tag{5.6}$$

den Anfangswert $y(0) = \exp(a) = y_0$, und für ihre Ableitung gilt nach der *Kettenregel* (D.5)

$$y' = (\exp(a + x))' = \exp'(a + x) \cdot (a + x)' \stackrel{\text{Regel 25}}{=} \exp(a + x) \cdot 1 \stackrel{(5.6)}{=} 1 \cdot y$$

²⁰siehe 5.1.2, S.67

²¹siehe ebenda, S.68

Die Funktion erfüllt also das Wachstumsgesetz $y' = 1 \cdot y$ mit dem Anfangswert $y(0) = y_0$. Nach *Regel 26*²² gibt es aber nur eine einzige solche Funktion, und die hat die Berechnungsformel

$$y = y_0 \cdot \exp(1 \cdot x) = \exp(a) \cdot \exp(x). \tag{5.7}$$

Daher sind (5.6) und (5.7) gleichzusetzen, und es ergibt sich

$$\exp(a + x) = \exp(a) \cdot \exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da aber auch a beliebig in \mathbb{R} gewählt war, erhalten wir

Regel 27 (Additionstheorem der Exponentialfunktion):

R 27

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b).$$

Setzt man in dieser Formel speziell $b = -a$ ein, so erhält man

$$\exp(a) \cdot \exp(-a) = \exp(a + (-a)) = \exp(0) \underset{\text{Regel 24}}{=} 1$$

und daraus

Regel 28 (Wert von $\exp(-a)$):

R 28

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}.$$

5.3.1 Historischer Exkurs: Erklärung der Namen “Exponentialfunktion“ und “e-Funktion“ für die natürliche Wachstumsfunktion $y = \exp(x)$

Bezeichnung: Die Konstante

$$\exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

heißt die **Eulersche**²³ **Zahl e**.

Nach *Regel 23*²⁴ ist der absolute Fehler $|\Delta e|$ zwischen e und dem Näherungswert $y_7 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7!} = 2,71825\dots$ kleiner als $d_7 = \frac{1}{7!} < 2 \cdot 10^{-4}$. Also liegt e zwischen den Eckwerten $2,71805\dots$ und $2,71845\dots$. Damit ist e auf 3 Stellen gerundet berechnet:

$$e \approx 2,718$$

(Es gilt $e \notin \mathbb{Q}$, d.h. e hat unendlich viele, nicht periodisch geordnete Nachkommastellen).

Die Funktion $y = \exp(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt und beliebig genau näherungsweise berechenbar (siehe *Regeln 22, 23*). Potenzen e^n der Konstante e sind hingegen ursprünglich nur für

²²siehe 5.2.2, S.73

²³Leonhard Euler (1707 - 1783), schweizer Mathematiker

²⁴siehe 5.2.1, S.73

ganzzahlige Exponenten n erklärt und durch einfaches Ausmultiplizieren berechenbar. Dabei ergibt sich aber aufgrund des *Additionstheorems Regel 27* folgender Zusammenhang:

$$\begin{array}{ll}
 \exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e \cdot e, \text{ also} & \exp(1) = e \\
 \exp(3) = \exp(2 + 1) = \exp(2) \cdot \exp(1) = e^2 \cdot e, \text{ also} & \exp(2) = e^2 \\
 \exp(4) = \exp(3 + 1) = \exp(3) \cdot \exp(1) = e^3 \cdot e, \text{ also} & \exp(3) = e^3 \\
 & \exp(4) = e^4 \\
 & \vdots \\
 \text{insgesamt:} & \exp(n) = e^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \\
 \exp(-n) \underset{\text{Regel 28}}{=} \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n}, \text{ also} & \exp(-n) = e^{-n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.
 \end{array}$$

Zwischen der Eulerschen Konstanten e und der natürlichen Wachstumsfunktion $y = \exp(x)$ besteht also die Beziehung

$$\exp(n) = e^n \quad \text{für alle **ganzen Zahlen** } n \in \mathbb{Z}.$$

Das hat der natürlichen Wachstumsfunktion $y = \exp(x)$ den Namen “e-Funktion“ beschert und zur symbolischen Schreibweise “ e^x “ anstelle von $\exp(x)$ auch dann geführt, wenn der Wert von x nicht ganzzahlig ist und somit $\exp(x)$ gar nicht durch mehrfaches Multiplizieren der Zahl e mit sich selbst berechenbar ist. Da bei der traditionellen Schreibweise $y = e^x$ die freie Variable x im Exponenten auftaucht, hat sich darüber hinaus für diese Funktion der Name “Exponentialfunktion“ eingebürgert.

Merke: Für nicht ganzzahliges x ergibt sich der Sinn und die beliebig genaue Berechnungsmöglichkeit von e^x nur mit Hilfe der *Regeln 22 und 23*:

$$“e^x“ \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

wobei der absolute Fehler kleiner als $|x^n|/n!$ ist, sobald $n \geq 2|x|$ ist.

Heute berechnet der Taschenrechner e^x mit dieser Näherungsformel.

5.3.2 Graph und qualitative Eigenschaften der Exponentialfunktion

Weil die Exponentialfunktion ein natürliches Wachstumsgesetz erfüllt, also streng monoton wachsend ist²⁵, und für $x = 0$ den Wert 1 hat, gilt

$$\exp(x) > 1 \quad \text{für alle } x > 0$$

und folglich mit *Regel 28*: $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ist größer als 0 und kleiner als 1 für $x > 0$. Daraus folgt

Regel 29 (Vorzeichen der Exponentialfunktion):

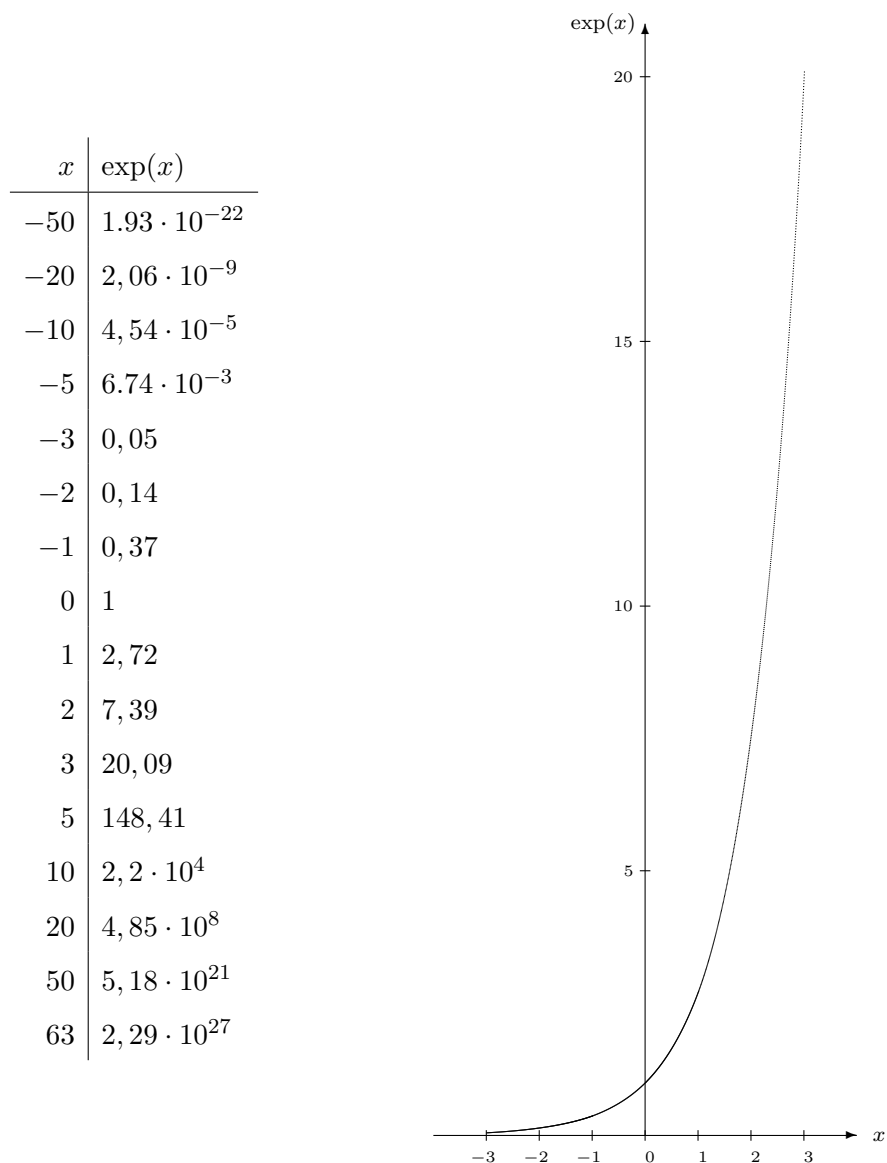
$y = \exp(x)$ nimmt für alle $x \in \mathbb{R}$ nur positive Werte an, d.h.

$$\exp(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

R 29

²⁵siehe 5.1, S.64

Abbildung 5.1: Wertetabelle und Graph der Exponentialfunktion

**Das Verhalten der Exponentialfunktion ist für $x > 1$ katastrophal:**

Während der Graph über der halben x -Achse (nämlich für alle negativen x) nahezu bei $y = 0$ verläuft und das Wachstum extrem schwach ist, biegt der Graph für $x > 1$ plötzlich fast senkrecht nach oben mit einer Steigung, die dramatisch schnell immer mehr zunimmt.

Würde man den Graphen an einer Wandtafel veranschaulichen im Maßstab $1 \hat{=} 10\text{cm}$, so entspräche $\exp(10)$ schon mehr als 2km und $\exp(63)$ dem doppelten Durchmesser des Universums, welcher ungefähr 10^{10} Lichtjahre beträgt ($1 \text{ Lichtjahr} = 9,46 \cdot 10^{12}\text{km} \approx 10^{16}\text{m}$).

Das hat eine für den Anwender sehr wichtige Konsequenz hinsichtlich der Fehlerrechnung: Für $x > 1$ hat schon ein kleiner absoluter Fehler $|\Delta x|$ einen sehr großen absoluten Fehler $|\Delta y|$ zur Folge!

WARNUNG: Soll auf eine Zahl $x > 1$ später noch die Exponentialfunktion angewandt werden, so muss diese Zahl zunächst auf möglichst viele Nachkommastellen genau bestimmt werden. Andernfalls ergibt sich für $\exp(x)$ ein unbrauchbarer, weil zu ungenauer Wert.

Trägt man auf der waagerechten Achse statt der Variablen x die Variable $u = c \cdot x$ ab (das entspricht einer Maßstabsänderung auf der waagerechten Achse) und auf der senkrechten Achse statt der Variablen y die Variable $w = \frac{y}{y_0}$ (das entspricht einer Maßstabsänderung auf der senkrechten Achse), so ist der Graph von $y = y_0 \cdot \exp(cx)$ identisch mit dem Graphen von $w = \exp(u)$. Das bedeutet:

Typischer Graph bei natürlichem Wachstum:

Der Graph einer beliebigen allgemeinen Exponentialfunktion

$$y = y_0 \cdot \exp(cx) \text{ mit } c > 0$$

unterscheidet sich von dem der Exponentialfunktion $y = \exp(x)$ nur durch Maßstabsänderungen auf beiden Achsen. Das katastrophale Wachstumsverhalten bleibt dabei prinzipiell erhalten.

Die Abbaufunktion $y = y_0 \cdot \exp(-cx)$ kann aus der Wachstumsfunktion $y = y_0 \cdot \exp(cx)$ dadurch erzeugt werden, dass man x durch $-x$ ersetzt. Daraus folgt:

Typischer Graph bei natürlichem Abbau:

Der Graph einer beliebigen allgemeinen Exponentialfunktion

$$y = y_0 \cdot \exp(-cx) \text{ mit } c > 0$$

entsteht aus dem Graphen von $y = y_0 \cdot \exp(cx)$ durch Spiegelung an der senkrechten Achse:

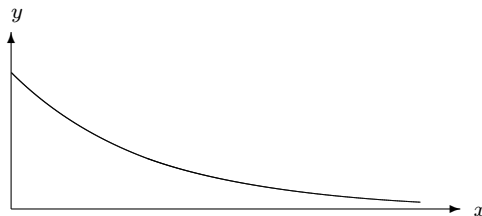


Abbildung 5.2: Graph bei natürlichem Abbau, Verlauf für $x \geq 0$

5.4 Der natürliche Logarithmus \ln (= logarithmus naturalis)

Da streng monoton wachsend, besitzt die Funktion $y = \exp(x)$ gemäß *Regel 1*²⁶ eine Umkehrfunktion.

Bezeichnung: *Die Umkehrfunktion der natürlichen Wachstumsfunktion $y = \exp(x)$ heißt der natürliche Logarithmus \ln , d.h.*

$$y = \exp(x) \text{ und } x = \ln y \text{ sind gleichbedeutend.}$$

²⁶siehe 2.2, S.15

Der Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunktion²⁷ liefert:

Graph und Wertebereich des natürlichen Logarithmus \ln :

Der Graph des natürlichen Logarithmus \ln entsteht aus dem Graphen der Exponentialfunktion $y = \exp(x)$ durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

Insbesondere ist $\ln(x)$ nur für positive x definiert.

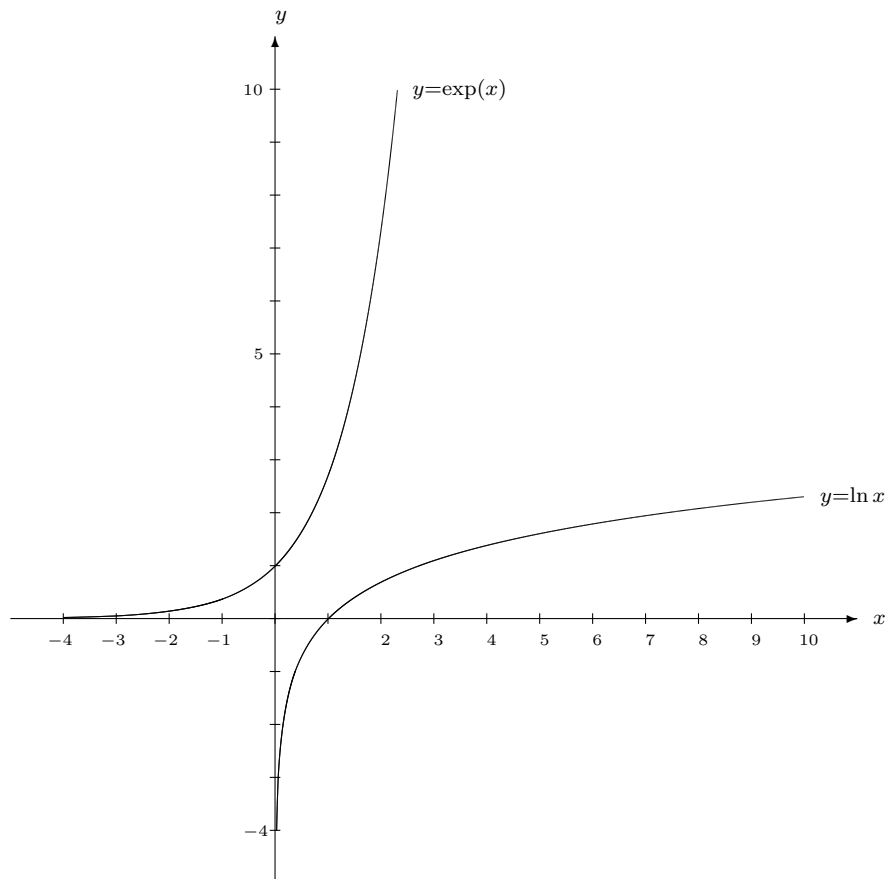


Abbildung 5.3: Graph von \exp und \ln

Regel 30 (ln hebt exp auf und umgekehrt):

R 30

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x)) &= x && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ \exp(\ln(x)) &= x && \text{für alle } x > 0. \end{aligned}$$

Regel 31 (Vorzeichen von ln):

R 31

$$\begin{aligned} \ln 1 &= 0. \\ \text{Für } 0 < x < 1 &\text{ ist } \ln x \text{ negativ.} \\ \text{Für } x > 1 &\text{ ist } \ln x \text{ positiv.} \end{aligned}$$

²⁷siehe 2.2, S.14

Wachstumsverhalten des ln:

Der natürliche Logarithmus \ln ist eine streng monoton wachsende Funktion. Für x -Werte zwischen 0 und 1 ist dieses Wachstum extrem stark, für $x > 1$ extrem schwach.

Das hat eine für den Anwender sehr wichtige Konsequenz hinsichtlich der Fehlerrechnung: Für $x < 1$ hat schon ein kleiner absoluter Fehler $|\Delta x|$ einen sehr großen absoluten Fehler $|\Delta y|$ zur Folge!

WARNUNG: Soll auf eine Zahl $x < 1$ später noch der Logarithmus angewandt werden, so muss diese Zahl zunächst auf möglichst viele Nachkommastellen genau bestimmt werden. Andernfalls ergibt sich für $\ln(x)$ ein unbrauchbarer, weil zu ungenauer Wert.

Die Rechenregeln des natürlichen Logarithmus folgen aus denen der Exponentialfunktion:

- Zu $a, b > 0$ bilde $c = \ln a$ und $d = \ln b$. Also gilt
 $\exp(c) = \exp(\ln a) \stackrel{\text{Regel 30}}{=} a$ und $\exp(d) = \exp(\ln b) \stackrel{\text{Regel 30}}{=} b$. Daraus folgt
 $\ln(a \cdot b) = \ln(\exp(c) \cdot \exp(d)) \stackrel{\text{Regel 27}}{=} \ln \exp(c + d) \stackrel{\text{Regel 30}}{=} c + d = \ln a + \ln b$.

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \text{für alle positiven } a \text{ und } b. \tag{5.8}$$

- Wähle speziell $b = \frac{1}{a}$. Dann gilt
 $\ln \frac{1}{a} = \ln \frac{1}{a} + \ln a - \ln a \stackrel{(5.8)}{=} \ln\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) - \ln a = \ln 1 - \ln a \stackrel{\text{Regel 31}}{=} -\ln a$.

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \text{für alle positiven } a. \tag{5.9}$$

- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \stackrel{(5.8)}{=} \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \stackrel{(5.9)}{=} \ln a - \ln b$.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \tag{5.10}$$

Mit (5.8), (5.9) und (5.10) erhalten wir die

Rechenregeln des natürlichen Logarithmus:

- (L.1) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ für alle positiven a und b .
- (L.2) $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ für alle positiven a .
- (L.3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ für alle positiven a und b .

WARNUNG: ~~$\ln(a \pm b) = ?$~~

Für alle $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} x &= \exp(\ln x) && \text{(nach Regel 30)} \\ x' &= (\exp(\ln x))' \\ 1 &= \exp'(\ln x) \cdot \ln'(x) && \text{(nach der Kettenregel)} \\ 1 &= \exp(\ln x) \cdot \ln'(x) && \text{(nach Regel 25)} \\ 1 &= x \cdot \ln'(x) && \text{(nach Regel 30)} \end{aligned}$$

Dividiert man die letzte Gleichung auf beiden Seiten durch x , so folgt

Regel 32 (Ableitung des natürlichen Logarithmus):

R 32

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle positiven } x.$$

5.5 Drei Anwendungen des natürlichen Logarithmus

5.5.1 Graphischer Test für natürliches Wachstum/Abbau

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$y = f(x)$ genügt einem natürlichen Wachstum-/Abbaugesetz $y' = c \cdot y$ mit dem Anfangswert $y(0) = y_0$

$$\begin{array}{l} \iff \\ \text{Regel 26} \end{array} \quad y = y_0 \cdot \exp(cx)$$

$$\begin{array}{l} \iff \\ \text{(L.1)} \end{array} \quad \ln y = \ln y_0 + \ln(\exp(cx))$$

$$\begin{array}{l} \iff \\ \text{Regel 30} \end{array} \quad \ln y = \ln y_0 + cx$$

$$\iff \quad \ln y = A + B \cdot x$$

$$\iff \quad \text{Geradengleichung für } \ln y \text{ als Funktion von } x \\ \text{mit } A = \ln y_0 \text{ und } B = c.$$

Regel 33 (Graphischer Test auf allgemeine Exponentialfunktion und Bestimmung einer bestmöglichen Berechnungsformel):

R 33

Von $y = f(x)$ sei keine Berechnungsformel, aber eine Wertetabelle bekannt. Dann gilt:

a) $y = f(x)$ erfüllt dann, aber auch nur dann, ein natürliches Wachstums-/Abbaugesetz $y' = c \cdot y$ mit dem Anfangswert $y(0) = y_0$ und hat somit die Berechnungsformel $y = y_0 \cdot \exp(cx)$, wenn die Punkte $(x | \ln y)$ ungefähr auf einer Geraden liegen: $\ln y = A + B \cdot x$.

Dies testet man graphisch entweder, indem man zunächst in einer dritten Rubrik der Wertetabelle zu den gegebenen y -Werten die zugehörigen $\ln y$ -Werte berechnet und dann in einem selbstkonstruierten Koordinatensystem mit normaler äquidistanter Skalierung auf jeder der beiden Achsen die Punkte $(x | \ln y)$ einträgt,

oder schneller, indem man direkt die vorgegebenen Punkte $(x | y)$ der Wertetabelle in halblogarithmisches Papier²⁸ einträgt, wobei die senkrechte Achse (= y -Achse) eine logarithmische Skalierung besitzen muss.

Ob die Punkte im Graphen ungefähr auf einer Geraden liegen, muss durch **Linealtest** geklärt werden.²⁹

b) Liegen die Punkte im Testgraphen auf einer Geraden, so kann man anschließend eine nach Datenlage **bestmögliche Berechnungsformel** $y = y_0 \cdot \exp(cx)$ ermitteln wie folgt: Man berechnet zunächst durch Lineare Regression (Drei-Schritt-Verfahren), angewandt auf $v = x$ und $w = \ln y$, die Konstanten B und A der Geradengleichung (Beachte: Hat man den graphischen Test mit halblogarithmischem Papier ausgeführt, so muss man jetzt ggf. zunächst die $\ln y$ -Werte berechnen). Daraus bestimmt man sodann $c = B$ und $y_0 = e^A$. (Achtung! Ist A größer als 1, so muss A sehr genau berechnet werden.³⁰)

²⁸Näheres zur Benutzung dieses Spezialpapiers im Anhang A, S.202ff

²⁹siehe 3.1.5, S.23

³⁰siehe Warnung in 5.3.2, S.77ff

Weiß man, dass y als Funktion von x einem natürlichen Wachstums- oder Abbaugesetz genügt (aus naturwissenschaftlicher Fachkenntnis oder als Ergebnis des graphischen Tests in *Regel 33a*) und will man den Aufwand einer Linearen Regressionsrechnung vermeiden, so kann man folgende Regel ausnutzen:

Regel 34 (Berechnung allgemeiner Exponentialfunktionen aus 2 Wertepaaren):

R 34

Ist dem Fachwissenschaftler prinzipiell schon bekannt, dass $y = f(x)$ einem natürlichen Wachstums- oder Abbaugesetz genügt, also eine Berechnungsformel vom Typ $y = y_0 \cdot \exp(cx)$ besitzt, so kann man den Zahlwert der Konstanten c und y_0 schon aus zwei Wertepaaren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) wie folgt berechnen:

$$1. \text{ Schritt: } c = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Steigung der Geraden durch } (x_1 | \ln y_1) \text{ und } (x_2 | \ln y_2)),$$

$$2. \text{ Schritt: } y_0 = \frac{y_i}{\exp(cx_i)} \quad (\text{wahlweise für } i = 1 \text{ oder } 2).$$

Da nur ein Minimum an Wertepaaren der Funktion verwendet wurde, liefert dieses Verfahren evtl. eine nicht besonders genau passende Formel.

5.5.2 Die Arrheniusgleichung

Erfolgt eine chemische Reaktion $A \longrightarrow$ Produkte nach einem natürlichen Abbaugesetz (und ist somit von 1. Ordnung³¹), dann liegen nach *Regel 33a* die Punkte $(t | \ln c_A)$ auf einer Geraden. Es gilt dann

$$c_A = (c_A)_0 \cdot \exp(-kt) \quad \text{mit der Geschwindigkeitskonstanten } \mathbf{k}.$$

k ist (bis auf das fehlende negative Vorzeichen) die konstante momentane relative Änderungsrate der Konzentration c_A (auch der Masse, des Volumens) bezüglich der Zeit und berechnet sich, wenn man nur zwei Wertepaare benutzt, nach *Regel 34* wie folgt:

$$-k = \frac{\ln(c_A)_2 - \ln(c_A)_1}{t_2 - t_1} \quad \left(\text{oder speziell für } t_1 = 0 : -k = \frac{\ln(c_A)_2 - \ln(c_A)_0}{t_2} \right). \quad (5.11)$$

Auch bei chemischen Reaktionen, die nicht von 1. Ordnung sind, ist die Reaktionsgeschwindigkeit unter anderem durch eine sog. Geschwindigkeitskonstanten k charakterisiert (Genauerer dazu s.u., 5.10.3, S.104). Stets gilt dabei: Je größer k , umso schneller die Reaktion.

Es wurde zu Recht vermutet, dass der Zahlwert von k nicht nur von der chemischen Reaktion abhängt, sondern auch von der Temperatur $T[\text{K}]$, unter der die Reaktion abläuft. Schon Ende des 19. Jahrhunderts wurde von Arrhenius³² für verschiedene Reaktionen die Temperaturabhängigkeit von k untersucht. Für viele chemische Reaktionen (auch solche, die nicht von 1. Ordnung sind) ergab sich: Bestimmt man für verschiedene Temperaturwerte die zugehörigen k -Werte gemäß Formel (5.11), so gilt:

$$\text{Die Punkte } (T^{-1} | \ln k) \text{ liegen auf einer Geraden mit der Steigung } -b. \quad (5.12)$$

³¹siehe 5.1.2, S.68 f, und 5.2.3, S.75

³²Svante Arrhenius (1859 - 1927), schwedischer Physiker und Chemiker

Das bedeutet nach *Regel 33*: Die Geschwindigkeitskonstante k als Funktion der Variablen $x = T^{-1}$ erfüllt das natürliche Abbaugesetz $k' = \frac{dk}{dx} = -b \cdot k$ und genügt daher der Formel

$$k = k_0 \cdot \exp\left(-b \cdot \frac{1}{T}\right) \quad (\text{Arrhenius-Gleichung, 1889}) \quad (5.13)$$

Dabei ist

- k_0 der Wert der Geschwindigkeitskonstante für $T^{-1} = 0$, d.h. bei Temperatur $T = \infty$ (wird nie erreicht!); in die Nähe dieses Maximalwertes für k kommt man etwa bei Temperaturen von weit über 1000 Kelvin.
- b eine reaktionsspezifische Konstante der Dimension [K], für die gilt:

$$b = \frac{E_a}{R},$$

wobei E_a die Aktivierungsenergie [$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$] und $R = 8,3144\,126$ [$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$] die universelle Gaskonstante ist.

Abbildung 5.4: Arrheniusgleichung: k als Funktion von T^{-1}

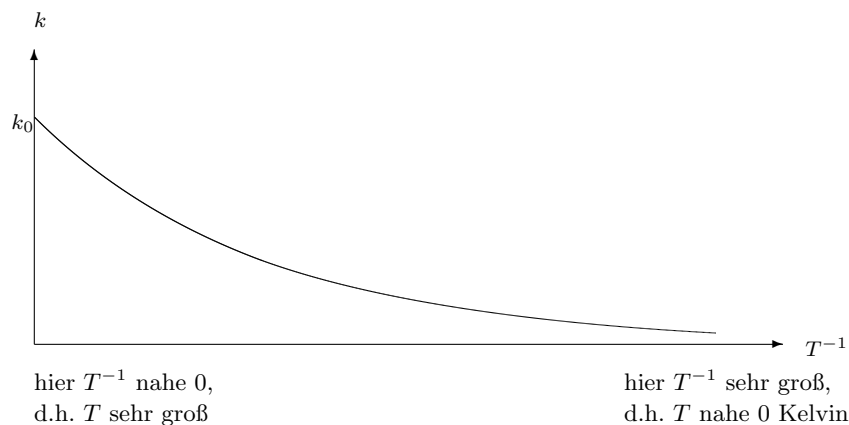
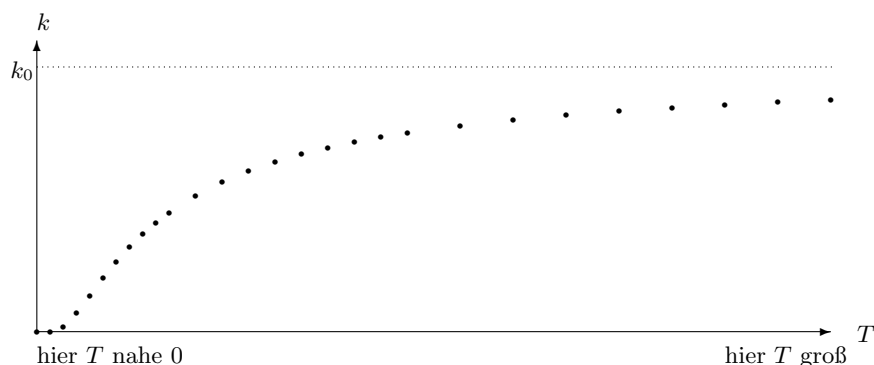


Abbildung 5.5: Arrheniusgleichung: Graph einiger Wertepaare $(T|k)$



Merke: Da Chemiker die **Aktivierungsenergie** $E_a = R \cdot b$ eines chemischen Prozesses häufig kennen möchten, ist die Berechnung von b mittels (5.12) von großem Interesse.

5.5.3 Der Begriff der Halbwertzeit

Bezeichnung: In der Physik und in der Chemie bezeichnet man bei Abbauprozessen aller Art diejenige Zeitspanne als **Halbwertzeit** $t_{1/2}$, die erforderlich ist, um einen Stoff bis auf die Hälfte seiner Ausgangsmenge abzubauen.

Mathematisch gesprochen: Ist $y = f(t)$ eine streng monoton fallende Funktion der Zeit t und $f(0) = y_0$ der Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$, so ist $t_{1/2}$ die Lösung der Bestimmungsgleichung

$$f(t_{1/2}) = \frac{y_0}{2}.$$

Hieraus ersieht man, daß die Halbwertzeit i.a. nicht nur von dem Abbauprozess (also der Funktion f) abhängt, sondern auch von dem Anfangswert y_0 .³³

Eine spezielle Situation findet man bei allen natürlichen Abbauprozessen. Nach *Regel 26* ist die Funktion $y = f(t)$ dann von der Bauart $y = y_0 \cdot \exp(-ct)$ mit einer abbauspezifischen positiven Konstante c .³⁴ Die Bestimmungsgleichung zur Berechnung von $t_{1/2}$ lautet dann

$$\begin{aligned} y_0 \cdot \exp(-c \cdot t_{1/2}) &= \frac{y_0}{2} && |: y_0 \\ \exp(-c \cdot t_{1/2}) &= \frac{1}{2} && | \text{Regel 28} \\ \frac{1}{\exp(c \cdot t_{1/2})} &= \frac{1}{2} && | \text{Kehrwert} \\ \exp(c \cdot t_{1/2}) &= 2 && | \ln, \text{ Regel 30} \\ c \cdot t_{1/2} &= \ln 2 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile entnimmt man

Regel 35 (Halbwertzeit bei natürlichen Abbauprozessen):

R 35

Bei allen natürlichen Abbauprozessen

$$y = y_0 \cdot \exp(-ct)$$

sind die abbauspezifische positive Konstante c und die Halbwertzeit $t_{1/2}$ antiproportional zueinander mit der Proportionalitätskonstante $\ln 2$, d.h. es gilt

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} \quad \text{und} \quad c = \frac{\ln 2}{t_{1/2}},$$

insbesondere ist die Halbwertzeit bei dieser Art von Abbauprozessen unabhängig vom Anfangswert.

Beispiele: Bei chemischen Reaktionen $A \longrightarrow$ Produkte, die nach einem natürlichen Abbaugesetz erfolgen, ist $c = k$ die Geschwindigkeitskonstante, welche ja temperaturabhängig³⁵ ist. Also ist hier die Halbwertzeit $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$ ebenfalls temperaturabhängig. Bei radioaktivem Zerfall ist $c = \lambda$ die temperaturunabhängige Zerfallskonstante, somit ist hier die Halbwertzeit $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ anfangswert- und temperaturunabhängig, also eine Stoffkonstante.

³³Näheres hierzu in 5.10.7, S.112 ff.

³⁴siehe die Beispiele in 5.2.3, S.67 ff

³⁵s.o., Arrheniusgleichung, S.84

5.6 Die Schreibweise a^b für beliebige $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$

Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt nach der Logarithmusregel (L.1)³⁶

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln a \quad | \text{ exp, Regel 30 (siehe S.80)}$$

$$a^n = \exp(n \cdot \ln a)$$

und $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{\exp(n \cdot \ln a)}$ | Kehrwert, Regel 28 (siehe S.76)

$$a^{-n} = \exp(-n \ln a)$$

Insgesamt ergibt sich folgende Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und den **ganzzahligen** Potenzen der Zahl $a > 0$:

$$a^n = \exp(n \ln a) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Das hat zur folgenden verallgemeinerten Schreibweise auch im Falle nicht ganzzahliger Exponenten geführt:

Bezeichnung: Sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$y = a^b \text{ ist eine traditionelle abkürzende Schreibweise für } y = \exp(b \ln a). \quad (5.14)$$

Daraus folgen die

Allgemeinen Potenzregeln

$$(P.1) \quad \ln(a^b) = b \cdot \ln a \quad \text{für alle } a > 0 \text{ und } b \in \mathbb{R},$$

$$(P.2) \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c} \quad \text{für alle } a > 0 \text{ und } b, c \in \mathbb{R},$$

$$(P.3) \quad a^b \cdot a^c = a^{b+c} \quad \text{für alle } a > 0 \text{ und } b, c \in \mathbb{R},$$

$$(P.4) \quad a^c \cdot b^c = (ab)^c \quad \text{für alle } a, b > 0 \text{ und } c \in \mathbb{R}.$$

WARNUNG: a^{b^c} bedeutet $a^{(b^c)}$ und ist i.a. $\neq (a^b)^c$.

Beweis der Allgemeinen Potenzregeln:

$$\text{Zu (P.1): } \ln(a^b) \stackrel{(5.14)}{=} \ln(\exp(b \ln a))$$

$$\stackrel{\text{Regel 30}}{=} b \ln a$$

$$\text{Zu (P.2): } (a^b)^c \stackrel{(5.14)}{=} \exp(c \cdot \ln(a^b))$$

$$\stackrel{(P.1)}{=} \exp(c \cdot (b \cdot \ln a))$$

$$= \exp((bc) \cdot \ln a)$$

$$\stackrel{(5.14)}{=} a^{bc}$$

³⁶siehe 5.4, S.81

$$\begin{aligned}
\text{Zu (P.3): } a^b \cdot a^c &\stackrel{(5.14)}{=} \exp(b \ln a) \cdot \exp(c \ln a) \\
&\stackrel{\text{Regel 27}}{=} \exp(b \ln a + c \ln a) \\
&= \exp((b+c) \ln a) \\
&\stackrel{(5.14)}{=} a^{b+c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Zu (P.4) } a^c \cdot b^c &\stackrel{(5.14)}{=} \exp(c \ln a) \cdot \exp(c \ln b) \\
&\stackrel{\text{Regel 27}}{=} \exp(c \ln a + c \ln b) \\
&= \exp(c \cdot (\ln a + \ln b)) \\
&\stackrel{(L.1)}{=} \exp(c \cdot \ln(ab)) \\
&\stackrel{(5.14)}{=} (ab)^c
\end{aligned}$$

□

Läßt man in dem Ausdruck a^b , der eine Funktion von **zwei** Variablen a und b ist, die eine der beiden Größen a, b künstlich auf konstantem Wert und die andere von beiden frei variieren, so erhält man jeweils eine Funktion **einer** Variablen.

Man gelangt aber zu zwei ganz unterschiedlichen Klassen von Funktionen, je nachdem, ob man die Basis a konstant hält oder den Exponenten b konstant hält, nämlich einerseits zu den allgemeinen Exponentialfunktionen (Basis konstant), andererseits zu den allgemeinen Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen (Exponent konstant):

5.7 Exponentialfunktion zur Basis a , Logarithmus zur Basis a

Bezeichnung: Die Funktion

$$y = a^x \quad (\text{Basis } a > 0 \text{ konstant, Exponent } x \text{ variabel in ganz } \mathbb{R})$$

heißt **Exponentialfunktion zur Basis a** und ist identisch mit der

$$\text{allgemeinen Exponentialfunktion } y = \exp(\ln a \cdot x) \text{ zum Anfangswert } y_0 = y(0) = 1.$$

Da sie das natürliche Wachstums-/Abbaugesetz $y' = \ln a \cdot y$ erfüllt und $\ln a$ nach *Regel 31* positiv ist, wenn $a > 1$, negativ, wenn $a < 1$, folgt sofort

Regel 36 (Ableitung, Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion zur Basis a):

R 36

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x.$$

$y = a^x$ ist streng monoton wachsend, falls $a > 1$, aber streng monoton fallend, wenn $0 < a < 1$.

Nach *Regel 1*³⁷ existiert eine Umkehrfunktion.

³⁷siehe 2.2, S.15

Bezeichnung: Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a ,

$$y = a^x = \exp(\ln a \cdot x),$$

heißt der **Logarithmus zur Basis a** ,

Schreibweise: $y = \log_a(x)$ oder kürzer ohne Klammern: $y = \log_a x$,

d.h. $y = a^x$ ist gleichbedeutend mit $x = \log_a y$.

Insbesondere ist der natürliche Logarithmus \ln identisch mit dem Logarithmus zur Basis e .

Sei nun $a > 0$, $a \neq 1$, $y = a^x$, also $x = \log_a y$.

$$y = a^x \quad | \ln$$

$$\ln y = \ln(a^x)$$

$$\ln y \stackrel{(P.1)}{=} x \cdot \ln a \quad | : \ln a \quad (\neq 0)$$

$$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

Daraus folgt:

Regel 37 (Umrechnung zwischen \log_a und \ln):

R 37

Der Logarithmus zur Basis a , \log_a , ist **proportional** zum natürlichen Logarithmus \ln mit der Proportionalitätskonstante $\frac{1}{\ln a}$, d.h.

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \quad \text{für alle } x > 0.$$

Da sich somit alle Logarithmen vom natürlichen Logarithmus \ln jeweils nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, übertragen sich die Rechenregeln (L.1) - (L.4) auf alle Logarithmen:

Rechenregeln für \log_a ($a > 0$):

$$(LOG.1) \quad \log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d \quad \text{für alle positiven } c \text{ und } d.$$

$$(LOG.2) \quad \log_a \frac{1}{c} = -\log_a c \quad \text{für alle positiven } c.$$

$$(LOG.3) \quad \log_a \left(\frac{c}{d}\right) = \log_a c - \log_a d \quad \text{für alle positiven } c \text{ und } d.$$

Außerdem folgt für die Ableitung von \log_a mit der Faktorregel (D.1) und *Regel 32*³⁸ sofort:

Ableitung von $\log_a x$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

An dieser Ableitungsformel erkennt man das typisch logarithmische Wachstumsgesetz:

Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ erfüllt ein

³⁸siehe 5.4, S.82

Logarithmisches Wachstums-/Abbaugesetz:

- (1) “Die momentane Änderungsrate von y bezüglich x ist antiproportional zur bisherigen Größe von x .“

Als Formel:

$$y' = c \cdot \frac{1}{x} \quad \text{mit } c = \frac{1}{\ln a} \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 1, \\ < 0 & \text{für } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch y , so erhält man die gleichwertige Aussage

- (2) “Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x ist antiproportional zur bisherigen Größe von x und von y .“

Als Formel:

$$\frac{y'}{y} = c \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}.$$

Gibt es noch weitere Funktionen, die dieses Gesetz erfüllen? Das können nur alle Funktionen $y = f(x)$ sein, welche die Ableitung $y' = c \cdot \frac{1}{x}$ besitzen, also alle Stammfunktionen³⁹ von $c \cdot \frac{1}{x}$. Das sind aber einfach die Funktionen der Bauart $y = c \cdot \ln x + \text{const}$. Das ist eine Geradengleichung der Bauart $y = B \cdot \ln x + A$ mit $B = c$.

Bezeichnung: Jede Funktion der Bauart $y = A + B \cdot \ln x$ heißt eine **allgemeine Logarithmusfunktion**.

Regel 38 (Graphischer Test auf Allgemeine Logarithmusfunktion und Bestimmung einer bestmöglichen Berechnungsformel):

R 38

Von $y = f(x)$ sei keine Berechnungsformel, aber eine Wertetabelle bekannt. Dann gilt:

a) $y = f(x)$ erfüllt genau dann ein logarithmisches Wachstumsgesetz $y' = c \cdot \frac{1}{x}$ und hat somit die Berechnungsformel $y = c \cdot \ln x + \text{const}$, wenn die Punkte $(\ln x | y)$ ungefähr auf einer Geraden liegen: $y = A + B \cdot \ln x$ mit Steigung $B = c$.

Dies **testet man graphisch** entweder, indem man zunächst in einer dritten Rubrik der Wertetabelle zu den gegebenen x -Werten die zugehörigen $\ln x$ -Werte berechnet und dann in einem selbstkonstruierten Koordinatensystem mit normaler äquidistanter Skalierung auf jeder der beiden Achsen die Punkte $(\ln x | y)$ einträgt,

oder schneller, indem man direkt die vorgegebenen Punkte $(x | y)$ der Wertetabelle in halblogarithmisches Papier⁴⁰ einträgt, wobei die waagerechte Achse (= x -Achse) eine logarithmische Skalierung besitzen muss.

Ob die Punkte im Graphen ungefähr auf einer Geraden liegen, muss durch **Linealtest** geklärt werden.⁴¹

b) Liegen die Punkte im Testgraphen auf einer Geraden, so kann man anschließend eine nach Datenlage **bestmögliche Berechnungsformel** $y = A + B \cdot \ln x$ ermitteln wie folgt: Man berechnet durch Lineare Regression (Drei-Schritt-Verfahren), angewandt auf $v = \ln x$ und $w = y$, die Konstanten B und A der Geradengleichung (Beachte: Hat man den graphischen Test mit halblogarithmischem Papier ausgeführt, so muss man jetzt ggf. zunächst die $\ln x$ -Werte berechnen). Damit ist man bereits fertig. Ist $B \neq 1$, so kann man wahlweise noch probieren, ob vielleicht $B = \frac{1}{\ln 10}$ ist. In diesem Fall erhält man die Formel $y = \lg x + A$.

³⁹siehe 6.2, S.135ff

⁴⁰Näheres zur Benutzung dieses Spezialpapiers im Anhang A, S.202ff

⁴¹siehe 3.1.5, S.23

5.7.1 Anwendung: Photometrie

Der nach dem natürlichen Logarithmus \ln am häufigsten benutzte Logarithmus ist der Logarithmus zur Basis 10:

$$\log_{10} = \lg \quad (\text{Zehnerlogarithmus, dekadischer Logarithmus})$$

mit der Ableitung

$$\lg'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}.$$

Seine Anwendung in der Photometrie ergibt sich wie folgt:

Ist τ (dimensionslos) die Transmission eines monochromen Lichts, das ein homogenes Medium der Schichtdicke $d[\text{cm}]$ durchdringt, so gilt bekanntlich⁴²

$$\tau = \exp(-\mu \cdot d) \quad (\mu[\text{cm}^{-1}] \text{ Absorptionskoeffizient}),$$

folglich

$$\ln \tau = -\mu \cdot d. \quad (5.15)$$

Ist das Medium die spezifisch eingefärbte Lösung eines Stoffes A , so gilt: μ ist proportional zur Konzentration $[A]$ (in mol/l), als Formel:

$$\mu = \varepsilon_0 \cdot [A], \quad (5.16)$$

dabei ist $\varepsilon_0[\text{l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}]$ eine stoffspezifische Konstante (abhängig vom Färbeverfahren). Setzt man (5.16) in (5.15) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \ln \tau &= -\varepsilon_0 \cdot [A] \cdot d \\ \lg \tau &\stackrel{\text{Regel 37}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{\ln 10} \cdot [A] \cdot d \end{aligned} \quad (5.17)$$

Bezeichnung: Die Größe

$$E = -\lg \tau$$

(positiv, da $\tau < 1$, und dimensionslos) heißt die **dekadische Extinktion**, der Faktor

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\ln 10} \left[\frac{\text{l}}{\text{mol} \cdot \text{cm}} \right]$$

heißt der **molare dekadische Extinktionskoeffizient**.

Mit diesen Bezeichnungen lautet die grundlegende Formel der Photometrie

$$\boxed{E = \varepsilon \cdot [A] \cdot d}$$

Ihre Benutzung geschieht wie folgt:

⁴²siehe 5.1.2, S.67 f und 5.1.2, S.75

1. Schritt: **(Justierung des Geräts)**

Man nimmt zunächst eine spezifisch eingefärbte Lösungsportion von A , deren Konzentration $[A]$ [mol/l] sehr genau bekannt ist, füllt sie in eine Küvette genau bekannter Schichtdicke d [cm] und misst nun in einem Photometer die Transmission τ . Man berechnet zunächst aus τ die Extinktion $E = -\lg \tau$, sodann hiermit den molaren dekadischen Extinktionskoeffizienten

$$\varepsilon = \frac{E}{[A] \cdot d} \left[\frac{l}{\text{mol} \cdot \text{cm}} \right]$$

des Messverfahrens für A .

2. Schritt: **(photometrische Konzentrationsbestimmung)**

Danach misst man die Transmission τ für beliebig viele eingefärbte Lösungsportionen unbekannter Konzentration $[A]$ in Küvetten immer derselben Schichtdicke d , berechnet daraus zuerst $E = -\lg \tau$ und dann die Konzentration

$$[A] = \frac{E}{\varepsilon \cdot d} [\text{mol/l}].$$

5.8 Verschiedene Wachstumsgesetze im Vergleich, Allometrie

Erinnerung: Ist x eine Variable, so heißt bekanntlich das Größenverhältnis zwischen der Änderung von x und dem früheren Wert von x , also $\frac{\Delta x}{x}$ (dimensionslos, meist in % ausgedrückt), die **relative Änderung von x** ⁴³. Dagegen heißt das Größenverhältnis zwischen der momentanen Änderungsrate $y' = f'(x)$ einer Funktion und ihrem Wert y , also $\frac{y'}{y}$ (mit der Dimension $(\dim x)^{-1}$) die **momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x** .

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Wachstums-/Abbaugesetze zwischen zwei Variablen x und y studiert man meist zuerst anhand der momentanen relativen Änderungsrate $\frac{y'}{y}$ der Funktion $y = f(x)$.

5.8.1 Natürliches (exponentielles, prozentuales) Wachstum/Abbau

$$\frac{y'}{y} = c \quad \text{“ungebremstes Wachstum/Abbau“}$$

In Worten:

- (1) **“Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x ist konstant.“**

Dies ist das primitivste in der Natur zu beobachtende Wachstums-/Abbaugesetz. Multiplikation beider Seiten mit y ergibt

$$y' = c \cdot y$$

In Worten:

- (2) **Die momentane Änderungsrate von y bezüglich x ist proportional zum augenblicklichen Wert von y .“**

⁴³siehe 1.2.2, S.5

Für kleine Δx gilt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx c \cdot y$$

In Worten:

- (3) **“Das Größenverhältnis der Änderungen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist ungefähr proportional zum bisherigen Wert von y (nur für kleine Δx).“**

sowie

$$\Delta y \approx c \cdot y \cdot \Delta x$$

In Worten:

- (4) **“Die Änderung von y ist ungefähr proportional zur Änderung von x und zum bisherigen Wert von y (nur für kleine Δx).“**

und

$$\frac{\Delta y}{y} \approx c \cdot \Delta x$$

In Worten:

- (5) **“Die relative Änderung von y ist ungefähr proportional zur Änderung von x (nur für kleine Δx).“**

Die Regeln (1) bis (5) sind gleichbedeutend und charakteristisch für allgemeine Exponentialfunktionen.

Eigenschaften im Falle von Wachstum ($c > 0$):⁴⁴

Für $x < 0$ extrem schwaches, dissoziiertes Wachstum (riesigem Δx entspricht winziges Δy).

Beispiel (Fall $c = 1$): Für $x = -80$ gilt: Erhöht man den x -Wert um $\Delta x = 50$, so erhöht sich der zugehörige y -Wert bloß um $\Delta y \approx 9,3 \cdot 10^{-14}$.

Für $x > 1$ extrem starkes, dissoziiertes Wachstum (winzigem Δx entspricht riesiges Δy).

Beispiel (Fall $c = 1$): Für $x = 10$ gilt: Erhöht man den x -Wert um bloß $\Delta x = 0,1$, so erhöht sich der zugehörige y Wert bereits um $\Delta y \approx 2316,5$.

5.8.2 Logarithmisches Wachstum/Abbau

$$\frac{y'}{y} = c \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \quad \text{“doppelt gebremstes Wachstum/Abbau“}$$

 doppelte Wachstumsbremse

In Worten:

- (1) **“Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x ist antiproportional zu den augenblicklichen Werten von x und y .“**

Multiplikation beider Seiten mit y liefert

$$y' = c \cdot \frac{1}{x}$$

⁴⁴siehe Abb.5.1, S.78, Graph der Exponentialfunktion

In Worten:

- (2) **“Die momentane Änderungsrate von y bezüglich x ist antiproportional zum augenblicklichen Wert von x .“**

Für kleine Δx gilt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx c \cdot \frac{1}{x}$$

In Worten:

- (3) **“Das Größenverhältnis der Änderungen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist ungefähr antiproportional zum bisherigen Wert von x (nur für kleine Δx).“**

sowie

$$\Delta y \approx c \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

In Worten:

- (4) **“Die Änderung von y ist ungefähr proportional zur relativen Änderung von x (nur für kleine Δx).“**

und

$$\frac{\Delta y}{y} \approx c \cdot \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{1}{y}$$

In Worten:

- (5) **“Die relative Änderung von y ist ungefähr proportional zur relativen Änderung von x und antiproportional zum bisherigen Wert von y (nur für kleine Δx).“**

Die Eigenschaften (1) bis (5) sind gleichbedeutend und charakteristisch für allgemeine Logarithmusfunktionen.

Eigenschaften im Falle von Wachstum ($c > 0$):⁴⁵

Für $0 < x < 1$ extrem starkes, dissoziiertes Wachstum (kleinem Δx entspricht großes Δy).

Beispiel (Fall $c = 1$): Für $x = 10^{-8}$ gilt: Erhöht man den x -Wert um $\Delta x = 0,9 \cdot 10^{-7}$, so erhöht sich der zugehörige y -Wert um $\Delta y \approx 2,3$.

Für $x > 1$ extrem schwaches, dissoziiertes Wachstum (riesigem Δx entspricht kleines Δy).

Beispiel (Fall $c = 1$): Für $x = 100$ gilt: Erhöht man den x -Wert um $\Delta x = 1000$, so erhöht sich der zugehörige y -Wert um $\Delta y \approx 2,4$.

Zwischen diesen zwei extremen, schlecht koordinierten Wachstumsformen liegen **zwei Varianten von gut koordiniertem Wachstum/Abbau** der Variablen x und y . Beide entstehen aus dem logarithmischen Wachstums-/Abbaugesetz, indem man von den zwei Wachstumsbremsen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ jeweils nur eine beibehält:

5.8.3 Lineares Wachstum/Abbau

$$\frac{y'}{y} = c \cdot \frac{1}{y} \quad \text{“einfach gebremstes Wachstum/Abbau“}$$

↙
einfache Wachstumsbremse

⁴⁵siehe Abb.5.3, S.80, Graph des natürlichen Logarithmus

In Worten:

- (1) **“Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x ist antiproportional zum bisherigen Wert von y .“**

Multiplikation der Gleichung mit y ergibt

$$y' = c$$

In Worten:

- (2) **“Die momentane Änderungsrate von y bezüglich x ist konstant.“**

Eine Funktion mit konstanter Ableitung c ist aber eine Gerade (mit der Steigung c):

$$y = a + cx \quad \text{Geradengleichung}$$

Für beliebig große Δx gilt also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c$$

In Worten:

- (3) **“Das Größenverhältnis der Änderungen $\Delta y : \Delta x$ ist konstant.“**

sowie

$$\Delta y = c \cdot \Delta x$$

In Worten:

- (4) **“Die Änderung von y ist proportional zur Änderung von x .“**

Die Regeln (1) bis (4) sind gleichbedeutend und charakteristisch für Geradengleichungen. Es besteht das folgende

Symmetriegesetz für Lineares Wachstum:

Erfüllt y als Funktion von x ein lineares Wachstums-/Abbaugesetz mit der Proportionalitätskonstanten c , so erfüllt auch x als Funktion von y ein lineares Wachstums-/Abbaugesetz, aber mit der Proportionalitätskonstanten $\frac{1}{c}$.

5.8.4 Allometrisches (potentielles) Wachstum/Abbau

$$\frac{y'}{y} = c \cdot \frac{1}{x} \quad \text{“einfach gebremstes Wachstum/Abbau“}$$

↙
einfache Wachstumsbremse

In Worten:

- (1) **“Die momentane relative Änderungsrate von y bezüglich x ist antiproportional zum augenblicklichen Wert von x .“**

Multipliziert man diese Gleichung mit y , so erhält man

$$y' = c \cdot \frac{y}{x}$$

In Worten:

- (2) “Die momentane Änderungsrate von y bezüglich x ist proportional zum augenblicklichen Größenverhältnis der Variablen $y : x$.“

Beachtet man, dass $y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist für kleine Änderungen Δx , so erhält man weiter:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx c \cdot \frac{y}{x}$$

In Worten:

- (3) Das Größenverhältnis der Änderungen $\Delta y : \Delta x$ ist ungefähr proportional zum bisherigen Größenverhältnis der Variablen $y : x$ (nur für kleine Δx).“

Multipliziert man letztere Gleichung mit Δx und dividiert sie durch y , so ergibt sich:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx c \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

In Worten:

- (4) “Die relative Änderung von y ist ungefähr proportional zur relativen Änderung von x (nur für kleine Δx).“

Die Regeln (1) bis (4) sind gleichbedeutend und, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, charakteristisch für allgemeine Potenzfunktionen.

Bezeichnung: Die Regeln (1) bis (4) heißen **allometrische Wachstumsgesetze** (im Falle $c > 0$) bzw. **Abbaugesetze** (im Falle $c < 0$). Genügen zwei Variablen x und y einer dieser Regeln (und damit allen), so sagt man, zwischen ihnen herrsche **Allometrie**.

Man beobachtet Allometrie vielfach bei der Größe von verschiedenen Körperorganen desselben Organismus, auch beim Zusammenhang zwischen Größe und Artenvielfalt eines Biotops, insgesamt bei höher organisiertem, gut koordiniertem Wachstum in Biologie und Medizin⁴⁶. Dieses Vorkommen, sowie die mathematische Beziehung zu den allgemeinen Potenzfunktionen erklären, dass man gelegentlich auch von **potentiellen** oder **organischen Wachstumsgesetzen** bzw. **Abbaugesetzen** spricht.

Aus den Formulierungen (3) und (4) erkennt man das

Symmetriegesetz für Allometrie:

Erfüllt y als Funktion von x ein allometrisches Wachstumsgesetz mit der Proportionalitätskonstanten c , so erfüllt auch x als Funktion von y ein allometrisches Wachstumsgesetz, aber mit der Proportionalitätskonstanten $\frac{1}{c}$.

⁴⁶In der Biologie und Medizin bezeichnet Allometrie (= “andere Abmessung“) die unterschiedliche Größe verschiedener Körperorgane.

5.9 Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen

5.9.1 Potenzfunktionen

Bezeichnung: *Die Funktion*

$$y = x^b \quad (\text{Basis } x > 0 \text{ variabel, Exponent } b \in \mathbb{R} \text{ konstant})$$

heißt eine **Potenzfunktion**.

Jede dazu proportionale Funktion $y = a \cdot x^b$ heißt eine **allgemeine Potenzfunktion**.

Ist der Exponent b ganzzahlig, so ist eine Potenzfunktion dasselbe wie ein Monom⁴⁷ und die freie Variable x darf in ganz \mathbb{R} variieren. Für nicht ganzzahliges b berechnet sich die Potenzfunktion mittels der Gleichung⁴⁸

$$y = x^b = \exp(b \cdot \ln x). \quad (5.18)$$

Daraus folgt, dass x nur Werte > 0 annehmen darf.⁴⁹ Weiterhin ergibt sich für die Ableitung:

$$\begin{aligned} y' &= (\exp(b \cdot \ln x))' && | \text{ Kettenregel} \\ y' &= \exp'(b \cdot \ln x) \cdot (b \cdot \ln x)' && | \text{ Regel 25, Faktorregel, Regel 32} \\ y' &= \exp(b \cdot \ln x) \cdot b \cdot \frac{1}{x} && | (5.18) \\ y' &= x^b \cdot b \cdot x^{-1} \stackrel{(P.3)}{=} bx^{b-1} \end{aligned}$$

Regel 39 (Ableitung der Potenzfunktionen):

R 39

$$(x^b)' = bx^{b-1} \quad \text{für variables } x > 0 \text{ und beliebiges konstantes } b \in \mathbb{R}.$$

Die Wichtigkeit der allgemeinen Potenzfunktionen und ihr weit verbreitetes Vorkommen in den Naturwissenschaften ergibt sich daraus, dass sie und nur sie die allometrischen Wachstums- bzw. Abbaugesetze erfüllen, wie gleich gezeigt wird.

Im Einzelnen gilt:

Regel 40 (Berechnungsformel für beliebige Allometrien):

R 40

Ist x irgendeine Variable und sind $a \neq 0$ und $b \neq 0$ beliebige reelle Konstanten (auch negativ möglich), so gibt es stets genau eine einzige mathematische Funktion $y = f(x)$, welche für $x = 1$ den Wert a annimmt und die allometrischen Wachstums- bzw. Abbaugesetze mit der Proportionalitätskonstante b erfüllt, also z.B.

$$\frac{\Delta y}{y} = b \cdot \frac{\Delta x}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{y'}{y} = b \cdot \frac{1}{x}.$$

⁴⁷siehe 2.2.5, S.19

⁴⁸siehe Formel (5.14), S.86

⁴⁹siehe 5.4, S.80

Ihr Name: **allgemeine Potenzfunktion**

Ihr Definitionsbereich: nur alle $x > 0$

Ihre Berechnungsformel: $y = a \cdot \exp(b \cdot \ln x)$ ältere Schreibweise: $y = ax^b$

Ihre Ableitung: $y' = ba \cdot \exp((b - 1) \ln x)$ bzw. $y' = bax^{b-1}$.

Eine Stammfunktion: $u = \frac{a}{b+1} \exp((b + 1) \ln x)$ bzw. $u = \frac{a}{b+1} \cdot x^{b+1}$.

Beweis von Regel 40: (vgl. den ganz analog geführten Beweis von *Regel 26*⁵⁰)

$y = ax^b$ erfüllt das allometrische Gesetz und hat den geforderten Wert a für $x = 1$, denn nach *Regel 39* ist

$$\frac{y'}{y} = \frac{bax^{b-1}}{ax^b} = \frac{b \cdot ax^{b-1}}{ax^{b-1} \cdot x} = b \cdot \frac{1}{x} \tag{5.19}$$

und $y(1) = a \cdot \exp(b \cdot \ln x) \Big|_{x=1} = a \cdot \exp(b \cdot \ln 1) \stackrel{\text{Regel 31}}{=} a \cdot \exp(b \cdot 0) = a \cdot \exp(0) \stackrel{\text{Regel 24}}{=} a \cdot 1 = a$.

Einzigkeit dieser Funktion: Sei $u = g(x)$ noch irgendeine Funktion von x mit denselben beiden Eigenschaften, d.h. gelte auch

$$\frac{u'}{u} = b \cdot \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad u(1) = a. \tag{5.20}$$

Bilde die Quotientenfunktion $q(x) = \frac{u(x)}{y(x)}$ (= das Größenverhältnis $u : y$). Für die Ableitung dieser Funktion von x gilt

$$\begin{aligned} q' &= \left(\frac{u}{y}\right)' && | \text{ Quotientenregel (D.4)} \\ &= \frac{u' \cdot y - u \cdot y'}{y^2} && | \text{ künstlich erweitern} \\ &= \frac{\frac{u'}{u} \cdot u \cdot y - u \cdot \frac{y'}{y} \cdot y}{y^2} && | \text{ Einsetzen von (5.19) und (5.20)} \\ &= \frac{b \cdot \frac{1}{x} \cdot u \cdot y - u \cdot b \cdot \frac{1}{x} \cdot y}{y^2} \\ &= 0, && \text{ und zwar für alle Zahlwerte von } x. \end{aligned}$$

Eine Funktion von x , deren Ableitung konstant = 0 ist, besitzt als Graph eine horizontale Gerade, d.h. es gibt eine Konstante c , so dass $q(x) = c$ gilt für alle Werte von x .

Berechnung von c : Setze $x = 1$ ein. Dann gilt

$$c = q(1) = \frac{u(1)}{y(1)} = \frac{a}{a} = 1,$$

also ist $q(x) = 1$ und somit $u(x) = y(x)$ für alle Zahlwerte von x , was zu zeigen war. □

⁵⁰siehe 5.2.2, S.73

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$y = f(x)$ genügt einem allometrischen Wachstum-/Abbaugesetz $\frac{y'}{y} = b \cdot \frac{1}{x}$ mit dem Anfangswert $y(1) = a$

$$\stackrel{\text{Regel 40}}{\iff} y = a \cdot x^b$$

$$\stackrel{(L.1)}{\iff} \ln y = \ln a + \ln(x^b)$$

$$\stackrel{(P.1)}{\iff} \ln y = \ln a + b \cdot \ln x$$

$$\iff \ln y = A + B \cdot \ln x, \quad \text{Geradengleichung mit } A = \ln a \text{ und } B = b.$$

Regel 41 (Graphischer Test auf allgemeine Potenzfunktion und Bestimmung einer bestmöglichen Berechnungsformel):

R 41

Von $y = f(x)$ sei keine Berechnungsformel, aber eine Wertetabelle bekannt. Dann gilt:

a) $y = f(x)$ erfüllt dann, aber auch nur dann, ein allometrisches Wachstums-/Abbaugesetz mit der Proportionalitätskonstante b und dem Anfangswert a , d.h. z.B.:

$$\frac{\Delta y}{y} = b \cdot \frac{\Delta x}{x} \quad \text{und } y(1) = a,$$

und hat somit die Berechnungsformel $y = ax^b$, wenn die Punkte $(\ln x | \ln y)$ ungefähr auf einer Geraden liegen: $\ln y = A + B \cdot \ln x$.

Dies **testet man graphisch** entweder, indem man zunächst in einer dritten und vierten Rubrik der Wertetabelle zu den gegebenen x - und y -Werten die zugehörigen $\ln x$ - und $\ln y$ -Werte berechnet und dann in einem selbstkonstruierten Koordinatensystem mit normaler äquidistanter Skalierung auf jeder der beiden Achsen die Punkte $(\ln x | \ln y)$ einträgt, oder schneller, indem man direkt die vorgegebenen Punkte $(x|y)$ der Wertetabelle in doppeltlogarithmisches Papier⁵¹ einträgt.

Ob die Punkte im Graphen ungefähr auf einer Geraden liegen, muss durch **Linealtest** geklärt werden.⁵²

b) Liegen die Punkte im Testgraphen auf einer Geraden, so kann man anschließend eine nach Datenlage **bestmögliche Berechnungsformel** $y = ax^b$ ermitteln wie folgt: Man berechnet zunächst durch Lineare Regression (Drei-Schritt-Verfahren), angewandt auf $v = \ln x$ und $w = \ln y$, die Konstanten B und A der Geradengleichung (Beachte: Hat man den graphischen Test mit doppeltlogarithmischem Papier ausgeführt, so muss man jetzt ggf. zunächst die $\ln x$ - und $\ln y$ -Werte berechnen). Daraus bestimmt man sodann $b = B$ und $a = e^A$. (Achtung! Ist A größer als 1, so muss A sehr genau berechnet werden.⁵³)

Weiß man, dass y als Funktion von x einem allometrischen Wachstums- oder Abbaugesetz genügt (aus naturwissenschaftlicher Fachkenntnis oder als Ergebnis des graphischen Tests in Regel 41a) und will man den Aufwand einer Linearen Regressionsrechnung vermeiden, so kann man folgende Regel ausnutzen:

⁵¹Näheres zur Benutzung dieses Spezialpapiers im Anhang A, S.202ff

⁵²siehe 3.1.5, S.23

⁵³siehe Warnung in 5.3.2, S.77ff

Regel 42 (Berechnung einer allgemeinen Potenzfunktion aus zwei Wertepaaren): R 42
 Ist dem Fachwissenschaftler prinzipiell schon bekannt, dass zwischen den Variablen x und y Allometrie herrscht, also eine Berechnungsformel $y = ax^b$ besteht, so kann man den Zahlwert der Konstanten a und b schon aus zwei Wertepaaren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) wie folgt berechnen:

1. Schritt: $b = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$ (Steigung der Geraden durch $(\ln x_1 | \ln y_1)$ und $(\ln x_2 | \ln y_2)$),
2. Schritt: $a = \frac{y_i}{x_i^b}$ (wahlweise für $i = 1$ oder 2).

5.9.2 Wurzelfunktionen

Mit dem Symmetriegesetz für Allometrien⁵⁴ folgt: $y = x^b \iff x = y^{\frac{1}{b}}$, d.h. die Umkehrung der Potenzfunktion mit Exponent b ist die Potenzfunktion mit Exponent $\frac{1}{b}$.

Spezialfall $b = n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

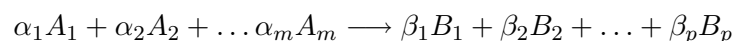
Mit *Regel 39* folgt:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{oder auch} \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

5.10 Anwendung: Potenzfunktionen in der Kinetik

5.10.1 Verschiedene Maße für die Reaktionsgeschwindigkeit

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sowie β_1, \dots, β_p endlich viele natürliche Zahlen und



eine chemische Reaktion.

Im Folgenden kann man unter der Bezeichnung $[A_i](t)$ bzw. $[B_i](t)$ wahlweise die Stoffmengenkonzentration c , die Masse m , die Stoffmenge n oder das Volumen V von A_i bzw. B_i zum Zeitpunkt t [s] verstehen. Dann kann man stets die momentane Reaktionsgeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 **näherungsweise** daran erkennen, wieviel von A_i in einer kleinen Zeitspanne $\Delta t = t_1 - t_0$ abgebaut wird (t_1 nahe t_0). Man bestimmt also die (negativen) Differenzenquotienten $\frac{\Delta[A_i]}{\Delta t}$ ($i = 1, \dots, m$). Ihre Dimension ist $[\text{mol} \cdot \text{l}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$ bzw. $[g \cdot \text{s}^{-1}]$, $[\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}]$ oder $[cm^3 \cdot \text{s}^{-1}]$.

Wie unterscheiden sich diese Differenzenquotienten im Zahlwert voneinander? Aus der stöchiometrischen Formel folgt: Wenn in der Zeitspanne Δt α_1 Teile von A_1 abgebaut worden sind,

⁵⁴siehe 5.8.4, S.95

sind gleichzeitig α_i Teile von A_i abgebaut worden ($i = 2, \dots, m$). Das Größenverhältnis $\Delta[A_1] : \Delta[A_i]$ ist also gleich $\alpha_1 : \alpha_i$ ($i = 2, \dots, m$), als Formel:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta[A_1]}{\Delta[A_i]} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_i} && \left| \cdot \frac{\Delta[A_i]}{\alpha_1} \right. \\ \frac{\Delta[A_1]}{\alpha_1} &= \frac{\Delta[A_i]}{\alpha_i} && \left| : \Delta t \right. \\ \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta[A_1]}{\Delta t} &= \frac{1}{\alpha_i} \cdot \frac{\Delta[A_i]}{\Delta t} && (i = 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Resultat: Die Differenzenquotienten $\frac{\Delta[A_i]}{\Delta t}$ sind untereinander nicht gleich, falls die α_i nicht alle gleich 1 sind, wohl aber sind sie untereinander alle proportional. Es genügt also, einen davon, etwa $\frac{\Delta[A_1]}{\Delta t}$, zu bestimmen, die übrigen errechnen sich daraus mittels der Gleichung

$$\frac{\Delta[A_i]}{\Delta t} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta[A_1]}{\Delta t}$$

.

Man kann die momentane Reaktionsgeschwindigkeit näherungsweise aber auch mittels der (positiven) Differenzenquotienten $\frac{\Delta[B_i]}{\Delta t}$ ($i = 1, \dots, p$) (Δt klein) untersuchen. Wieder gilt, analog zu oben:

$$\frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{\Delta[B_1]}{\Delta t} = \frac{1}{\beta_i} \cdot \frac{\Delta[B_i]}{\Delta t} \quad (i = 2, \dots, p)$$

Da schließlich immer dann, wenn α_1 Teile von A_1 abgebaut sind, gleichzeitig β_1 Teile von B_1 entstanden sind, gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta[A_1]}{\Delta[B_1]} &= \frac{\alpha_1}{\beta_1} && \left| \cdot \frac{\Delta[B_1]}{\alpha_1} \right. \\ -\frac{\Delta[A_1]}{\alpha_1} &= \frac{\Delta[B_1]}{\beta_1} && \left| : \Delta t \right. \\ -\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta[A_1]}{\Delta t} &= \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{\Delta[B_1]}{\Delta t} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so: Es genügt, den Differenzenquotienten (= mittlere Änderungsrate in der kleinen Zeitspanne Δt) exemplarisch anhand irgendeines Edukts oder Produkts zu messen, alle anderen errechnen sich daraus mittels der Gleichung

$$-\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta[A_1]}{\Delta t} = \dots = -\frac{1}{\alpha_m} \cdot \frac{\Delta[A_m]}{\Delta t} = \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{\Delta[B_1]}{\Delta t} = \dots = \frac{1}{\beta_p} \cdot \frac{\Delta[B_p]}{\Delta t}$$

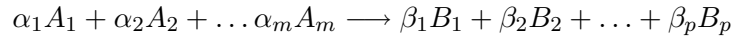
Durch Grenzübergang $\Delta t \rightarrow \infty$ gehen diese mittleren Änderungsraten über in die momentanen Änderungsraten von $[A_i]$ bzw. $[B_i]$ bezüglich t zum Zeitpunkt t_0 , die untereinander wieder in dem entsprechenden Größenverhältnis zueinander stehen.

Fazit: Die positiv genommenen momentanen Änderungsraten

$$|[A_i]'(t)| = -\frac{d[A_i]}{dt} \text{ der Edukte } A_i \text{ bzw. } [B_i]'(t) = \frac{d[B_i]}{dt} \text{ der Produkte}$$

sind lauter brauchbare Maße für die momentane Reaktionsgeschwindigkeit. Sie sind untereinander alle proportional und haben die Dimension $\left[\frac{\text{mol}}{\text{l}\cdot\text{s}}\right]$. Ein **standardisiertes Maß für die momentane Reaktionsgeschwindigkeit** erhält man wie folgt:

Bezeichnung: Die **momentane Reaktionsrate** einer chemischen Reaktion



wird mit dem Symbol

$$\frac{d\xi}{dt} \quad \text{oder kurz mit} \quad \dot{\xi}$$

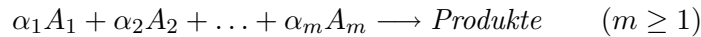
bezeichnet. Sie ist positiv, hat die Dimension $\left[\frac{\text{mol}}{\text{l}\cdot\text{s}}\right]$ und berechnet sich wahlweise wie folgt:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{d[A_1]}{dt} = -\frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{d[A_2]}{dt} = \dots = -\frac{1}{\alpha_m} \cdot \frac{d[A_m]}{dt} = \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{d[B_1]}{dt} = \frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{d[B_2]}{dt} = \dots = \frac{1}{\beta_p} \cdot \frac{d[B_p]}{dt}$$

5.10.2 Ordnung einer Reaktion bezüglich eines Edukts A

Bei vielen chemischen Reaktionen lässt sich beobachten, dass die momentane Reaktionsgeschwindigkeit bei konstant gehaltener Temperatur von den jeweiligen Konzentrationen der beteiligten Edukte abhängig ist. Sie ist dann eine Funktion der m freien Variablen $[A_1], \dots, [A_m]$. Eine erste Typeneinteilung erfolgte über den Begriff der Reaktionsordnung⁵⁵:

Erinnerung: Eine chemische Reaktion

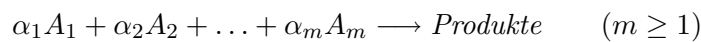


heißt **von n-ter Ordnung**, wenn gilt:

Wird (bei konstanter Temperatur) **jedes** $[A_i]$ um 1% erniedrigt, so erniedrigt sich die Reaktionsgeschwindigkeit um $n\%$ (n auf eine Zahl des Formats 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3... gerundet).

Eine verfeinerte Typeneinteilung chemischer Reaktionen gelingt mit nachfolgendem Begriff:

Bezeichnung: Eine chemische Reaktion



heißt **bezüglich des Edukts A_1 von n-ter Ordnung**, wenn gilt:

Wird (bei konstanter Temperatur) $[A_1]$ um 1% erniedrigt, während alle übrigen $[A_i]$ ($i = 2, \dots, m$) ungefähr konstant bleiben, so reduziert sich die Reaktionsgeschwindigkeit um $n\%$ (n auf eine Zahl des Formats 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3... gerundet).

⁵⁵siehe 1.2.2, S.6

Gegen diesen Begriff kann man zunächst einen grundsätzlichen Einwand erheben: Die Formel

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m \longrightarrow \text{Produkte} \quad (m \geq 1)$$

besagt doch, dass alle Edukte miteinander reagieren, insbesondere, dass nicht $[A_1]$ erniedigt werden kann, während die anderen $[A_i]$ konstant bleiben. Bedeutet das nicht, dass es chemische Reaktionen der Ordnung n bezüglich eines Edukts nur dann geben kann, wenn es auch nur ein Edukt gibt (das ist der Spezialfall $m = 1$), wobei der neue Begriff dann mit dem alten Begriff der Reaktionsordnung zusammenfällt?

Die Antwort lautet, dass es bei Reaktionen mit mehreren Edukten das Phänomen der konstant bleibenden $[A_i]$ bei geringer werdendem $[A_1]$ in der Natur streng genommen nicht gibt, dass man aber durch geschickte Experimente dennoch das Verhalten der Reaktionsgeschwindigkeit v als Funktion einer einzigen Variablen $[A_1]$ untersuchen kann, obwohl v bei unkontrolliert ablaufender Reaktion eine Funktion mehrerer Variabler $[A_1], \dots, [A_m]$ ist.

Dabei stehen zwei Methoden zur Wahl:

1. Methode: Die Methode der großen Überschüsse.

Gib alle Edukte $[A_2], \dots, [A_m]$ im großen Überschuss zu. Lass dann die Reaktion laufen, bis sie zum Stillstand kommt (das wird spätestens dann geschehen, wenn $[A_1] = 0$ ist), und miss während des Ablaufs zu möglichst vielen Zeitpunkten t_i den Wert von $[A_1]$. Zwar wird im Verlauf der gesamten Reaktion auch $[A_i]$ ($i = 2, \dots, m$) um einen festen Wert $\Delta[A_i]$ verringert, doch hat diese Verringerung trotzdem kaum einen nennenswerten Einfluss, weil wegen des großen Überschusses die **relative Änderung** $\frac{\Delta[A_i]}{[A_i]}$ nur wenige Prozent beträgt, der Überschuss als solcher also in nahezu unverändertem Umfang bestehen bleibt. Prozentual gesehen, bleiben also die $[A_i]$ ($i = 2, \dots, m$) ungefähr konstant.

Fazit: Die Abhängigkeit der momentanen Reaktionsgeschwindigkeit vom Edukt A_1 wird erkennbar, wenn man alle anderen Edukte im großen Überschuss zugibt und die Reaktion dann bis zum Stillstand laufen lässt. **Man erhält zunächst eine Wertetabelle für $[A_1]$ als Funktion der Zeit t .**

Mathematische Auswertung: Durch anschließende numerische Differentiation⁵⁶ kann man in einer dritten Rubrik Näherungswerte für die Reaktionsgeschwindigkeit $v = -\frac{d[A_1]}{dt}$ gewinnen. Die Wertepaare $([A_1](t_i)|v_i)$ bilden **dann eine Wertetabelle für v als Funktion von $[A_1]$.** **Beachte:** Nur wenn die zeitlichen Abstände der Messungen $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ klein sind, liefert die numerische Differentiation verlässliche Werte für die Reaktionsgeschwindigkeit.

2. Methode: Die Anfangswertmethode.

Man legt für $[A_i]$ ($i = 2, \dots, m$) beliebige Anfangswerte fest. Unter diesen konstanten Voraussetzungen startet man die Reaktion wiederholt, indem man jedesmal nur den Anfangswert von $[A_1]$ deutlich variiert. Nach einer stets gleich kurzen Zeitspanne Δt stoppt man die Reaktion und misst erneut $[A_1]$. Die Differenzenquotienten $-\frac{\Delta[A_1]}{\Delta t}$ sind Näherungswerte für die Reaktionsgeschwindigkeit v , welche bei unterschiedlichem $[A_1]$, aber stets denselben $[A_i]$ ($i = 2, \dots, m$) gemessen wurde.

Fazit: Mit der Anfangswertmethode erhält man **eine Wertetabelle für $v = -\frac{d[A_1]}{dt}$ als Funktion von $[A_1]$,** wobei als Vorzug gegenüber der 1. Methode die zugehörigen, konstant bleibenden Werte für $[A_i]$ ($i = 2, \dots, m$) zusätzlich beliebig (auch klein) wählbar sind. Ein

⁵⁶siehe 4.4.2, S.51

Nachteil ist aber, dass keine Abhängigkeit des $[A_1]$ oder des v von der fortschreitenden Zeit t bei längerem Reaktionsablauf erkennbar wird. Falls eine Reaktion im späteren Verlauf ein anderes Verhalten als in der Anfangsphase zeigt, ist diese Methode ungeeignet.

Mit jeder der beiden Methoden kann man zu einer Wertetabelle für die Wertepaare $([A_1], v)$ gelangen (wobei $v = -\frac{d[A_1]}{dt}$ gewählt wurde). Der Graph zur Wertetabelle kann je nach Reaktion, und bei derselben Reaktion auch je nach betrachtetem Edukt A_1 , ganz verschieden aussehen. Stets aber besitzt er ein charakteristisches Merkmal: Ist $[A_1] = 0$, so kommt die Reaktion notwendigerweise zum Stillstand, d.h. dann ist auch $v = 0$. Also gilt immer:

Der Graph der momentanen Reaktionsgeschwindigkeit v als Funktion der Konzentration $[A_1]$ verläuft durch den Ursprung.

Meist gilt noch zusätzlich:

Je größer $[A_1]$, umso schneller die Reaktion, d.h. dieser Graph ist i.a. monoton wachsend.

Ist eine chemische Reaktion bezüglich des Edukts A_1 von n -ter Ordnung, so gilt für alle kleinen Änderungen von $[A_1]$:

Die relative Änderung von v ist gleich n mal der relativen Änderung von $[A_1]$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta v}{v} = n \cdot \frac{\Delta[A_1]}{[A_1]}$$

$\Leftrightarrow v$ als Funktion von $[A_1]$ erfüllt ein allometrisches Wachstumsgesetz⁵⁷ mit der Proportionalitätskonstante n

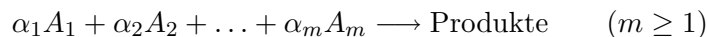
$$\stackrel{\text{Regel 40}}{\Leftrightarrow} v = c \cdot [A_1]^n,$$

wobei c noch vom gewählten Maß für v und dem Wert der $[A_i]$ ($i \neq 1$) abhängt.

$\Leftrightarrow v$ ist proportional zu $[A_1]^n$,
wenn nur $[A_1]$ variiert.

Damit erhalten wir eine zweite Charakterisierung der chemischen Reaktionen n -ter Ordnung bezüglich A_1 :

Merke: Eine chemische Reaktion



ist genau dann bezüglich des Edukts A_1 von n -ter Ordnung, wenn gilt:

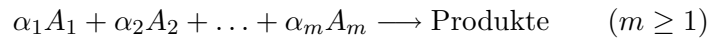
Die momentane Reaktionsgeschwindigkeit ist proportional zur n -ten Potenz von $[A_1]$, wenn nur $[A_1]$ variiert.

Als Formel:

$$v = -\frac{d[A_1]}{dt} = c \cdot [A_1]^n.$$

Im Spezialfall $n = 1$ erhält man hieraus die Formel $\frac{d[A_1]}{dt} = -c \cdot [A_1]$. Das ist aber ein natürliches Abbaugesetz für $[A_1]$ als Funktion der Zeit t . Folglich gilt:

Merke: Eine chemische Reaktion



ist genau dann bezüglich des Edukts A_1 von erster Ordnung, wenn gilt:

Der Abbau von A_1 als Funktion der Zeit t erfolgt nach einem natürlichen Abbaugesetz.

Da der Graph von v als Funktion von $[A_1]$ immer durch den Ursprung verläuft und i.a. monoton wächst, geschieht es recht häufig (aber nicht immer), dass zu diesem Graph als Berechnungsformel eine allgemeine Potenzfunktion mit geeignetem Exponenten n gehört, dass die Reaktion also bezüglich A_1 eine gewisse Ordnung n besitzt.

5.10.3 Geschwindigkeitsgesetz und Geschwindigkeitskonstante einer chemischen Reaktion

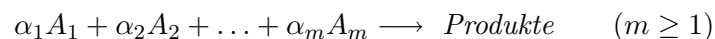
Besitze eine Reaktion nun bezüglich jedes Edukts A_i eine gewisse Ordnung n_i . Dann gilt also: Die Reaktionsgeschwindigkeit ist

- proportional zu $[A_1]^{n_1}$, wenn nur $[A_1]$ variiert, während $[A_2], \dots, [A_m]$ künstlich konstant gehalten werden,
- proportional zu $[A_2]^{n_2}$, wenn nur $[A_2]$ variiert, während $[A_1], [A_3], \dots, [A_m]$ künstlich konstant gehalten werden,
- ⋮
- proportional zu $[A_m]^{n_m}$, wenn nur $[A_m]$ variiert, während $[A_1], \dots, [A_{m-1}]$ künstlich konstant gehalten werden.

Da aber die Konzentrationen $[A_1], \dots, [A_m]$ in beliebigen Wertekombinationen vorkommen können, also voneinander unabhängige freie Variable sind, folgt mit *Regel 4*⁵⁸:

Das Geschwindigkeitsgesetz chemischer Reaktionen:

Ist die chemische Reaktion



bezüglich A_1 von der Ordnung n_1, \dots , bezüglich A_m von der Ordnung n_m , so gibt es bei konstant gehaltener Temperatur eine vom Wert der $[A_i]$ unabhängige spezifische Konstante k , so dass für alle Werte von $[A_1], \dots, [A_m]$ die Gleichung

$$v = k \cdot [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot \dots \cdot [A_m]^{n_m}$$

gilt. Diese Gleichung heißt das Geschwindigkeitsgesetz der Reaktion, die Proportionalitätskonstante k heißt die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion.

⁵⁸siehe 2.3, S.20

k ist noch abhängig von dem benutzten Maß für die Reaktionsgeschwindigkeit⁵⁹, doch sind, bei gleicher Reaktion und Temperatur, alle k -Werte untereinander proportional, gemäß der Proportionalität zwischen den Maßen.

Wichtiger ist, dass k noch temperaturabhängig ist (meist gemäß einer Arrhenius-Gleichung⁶⁰), während die Exponenten n_1, \dots, n_m temperaturunabhängige spezifische Konstanten der Reaktion sind.

Besitzt nun eine chemische Reaktion



das Geschwindigkeitsgesetz

$$v = k \cdot [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot \dots \cdot [A_m]^{n_m},$$

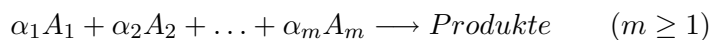
so kann man umgekehrt daraus ablesen, dass v proportional zu $[A_i]^{n_i}$ ist, wenn nur $[A_i]$ variiert ($i = 1, \dots, m$), d.h. aber⁶¹, dass die Reaktion bezüglich A_i von der Ordnung n_i ist (für alle $i = 1, \dots, m$).

Definitionsgemäß⁶² besagt das:

- Wird nur $[A_1]$ um 1% reduziert, so reduziert sich v um $n_1\%$,
- Wird nur $[A_2]$ um 1% reduziert, so reduziert sich v um $n_2\%$,
- ⋮
- Wird nur $[A_m]$ um 1% reduziert, so reduziert sich v um $n_m\%$,

Werden aber alle $[A_i]$ gleichzeitig um jeweils 1% reduziert, so summieren sich die Wirkungen und es gilt: v wird um $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ Prozent reduziert. Damit haben wir aber die Reaktionsordnung⁶³ errechnet.

Merke: Besitzt eine chemische Reaktion



das Geschwindigkeitsgesetz

$$v = k \cdot [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot \dots \cdot [A_m]^{n_m},$$

so errechnet sich ihre Reaktionsordnung zu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$.

⁵⁹siehe 5.10.1, S.99f

⁶⁰siehe 5.5.2, S.83

⁶¹siehe 5.10.2, S.104

⁶²siehe 5.10.2, S.102

⁶³siehe 5.10.2, S.101

5.10.4 Graphische Tests zum Erkennen einer Reaktion von n -ter Ordnung bezüglich des Edukts A_1

Erste Ausgangslage:

Man benutzt eine Wertetabelle für die Reaktionsgeschwindigkeit v als Funktion von $[A_1]$. (Diese Wertetabelle konnte wahlweise mit der Methode der großen Überschüsse oder mit der Anfangswertmethode gewonnen werden⁶⁴.)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

Die Reaktion ist bezüglich A_1 von n -ter Ordnung

$$\iff v \text{ als Funktion von } [A_1] \text{ genügt einer Formel } v = c \cdot [A_1]^n$$

$$\stackrel{(L.1)}{\iff} \ln v = \ln c + \ln([A_1]^n)$$

$$\stackrel{(P.1)}{\iff} \ln v = \ln c + n \cdot \ln[A_1]$$

$$\iff \ln v = A + B \cdot \ln[A_1],$$

Geradengleichung mit $A = \ln c$ und Steigung $B = n$.

So ergibt sich ein

Erster Graphischer Test zur Bestimmung der Ordnung bezüglich A_1 :

Gegeben sei kein Geschwindigkeitsgesetz der Reaktion, aber eine Wertetabelle für die Reaktionsgeschwindigkeit v als Funktion von $[A_1]$, welche mit der Methode der großen Überschüsse oder der Anfangswertmethode gewonnen wurde. Dann gilt:

Die Reaktion besitzt genau dann eine Ordnung n bezüglich des Edukts A_1 , wenn die Punkte

$$(\ln[A_1] | \ln v) \text{ ungefähr auf einer Geraden liegen: } \ln v = A + B \cdot \ln[A_1]$$

Dies testet man graphisch entweder, indem man zunächst in einer dritten und vierten Rubrik der Wertetabelle zu den gegebenen $[A_1]$ - und v -Werten die zugehörigen $\ln[A_1]$ - und $\ln v$ -Werte berechnet und dann in einem selbstkonstruierten Koordinatensystem mit normaler äquidistanter Skalierung auf jeder der beiden Achsen die Punkte $(\ln[A_1] | \ln v)$ einträgt, oder schneller, indem man direkt die vorgegebenen Punkte $([A_1] | v)$ der Wertetabelle in doppeltlogarithmisches Papier⁶⁵ einträgt.

Ob die Punkte im Graphen ungefähr auf einer Geraden liegen, muss durch **Linealtest** geklärt werden.⁶⁶

b) Liegen die Punkte im Testgraphen auf einer Geraden, so ist $n = B = \text{Steigung der Geraden}$. Weil n auf das Format "ganze Zahl" oder "ganze Zahl + 0,5" gerundet werden soll, genügt es, n anschließend mittels zweier Wertepaare $([A_1] | v_1)$ und $([A_2] | v_2)$ zu berechnen:

$$n \approx \frac{\ln v_2 - \ln v_1}{\ln[A_1]_2 - \ln[A_1]_1}$$

⁶⁴siehe 5.10.2, S.101

⁶⁵Näheres zur Benutzung dieses Spezialpapiers im Anhang A, S.202ff

⁶⁶siehe 3.1.5, S.23

Zweite Ausgangslage:

Man benutzt eine Wertetabelle für $[A_1]$ als Funktion von t . (Diese Wertetabelle konnte im Fall mehrerer Edukte A_i ($m \geq 2$) nur mittels der Methode der großen Überschüsse gewonnen werden⁶⁷.)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

Die Reaktion ist bezüglich A_1 von n -ter Ordnung

$$\iff v \text{ als Funktion von } [A_1] \text{ genügt einer Formel } v = c \cdot [A_1]^n$$

$$\iff -\frac{d[A_1]}{dt} = c \cdot [A_1]^n$$

$$1. \text{ Fall: } n = 0: \quad -\frac{d[A_1]}{dt} = c \quad | \text{ beiderseits Stammfunktion bilden}$$

$$\iff -[A_1] = c \cdot t + \text{const}$$

$$\iff [A_1] = -c \cdot t - \text{const}$$

$$\iff \text{Die Punkte } (t|[A_1]) \text{ liegen auf einer Geraden}$$

mit Steigung $= -c$

$$2. \text{ Fall: } n = 1: \quad -\frac{d[A_1]}{dt} = c \cdot [A_1]$$

$$\iff \frac{d[A_1]}{dt} = -c \cdot [A_1]$$

$$\iff \text{Natürliches Abbaugesetz für } [A_1] \text{ als Funktion von } t$$

$$\iff \text{Die Punkte } (t|\ln[A_1]) \text{ liegen auf einer Geraden}$$

Regel 33

mit Steigung $-c$

$$3. \text{ Fall: } n \neq 0 \text{ und } n \neq 1:$$

$$-\frac{d[A_1]}{dt} = c \cdot [A_1]^n$$

$$\iff -[A_1]'(t) = c \cdot [A_1]^n(t) \quad | \cdot [A_1]^{-n}(t)$$

$$\iff -[A_1]^{-n}(t) \cdot [A_1]'(t) = c \quad | \cdot (n-1) \text{ (Es ist } n-1 \neq 0)$$

$$\iff -(n-1)[A_1]^{-n}(t) \cdot [A_1]'(t) = (n-1)c \quad | \text{ beidseits Stammfunktion bilden}$$

(Kettenregel beachten)

$$\iff [A_1]^{-(n-1)}(t) = (n-1)c \cdot t + \text{const}$$

$$\iff [A_1]^{-(n-1)} = B \cdot t + A \quad \text{Geradengleichung für}$$

$[A_1]^{-(n-1)}$ als Funktion von t mit $B = (n-1)c$

$$\iff \text{Die Punkte } \left(t \left| \frac{1}{[A_1]^{n-1}} \right. \right) \text{ liegen auf einer Geraden}$$

mit Steigung $(n-1)c$

Damit erhalten wir einen Katalog von lauter einzelnen, für je einen Wert von n gültigen graphischen Tests, alle basierend auf einer Wertetabelle für $[A_1]$ als Funktion von t :

⁶⁷siehe 5.10.2, S.101

Zweiter Graphischer Test zur Bestimmung der Ordnung bezüglich A_1 :

Gegeben sei kein Geschwindigkeitsgesetz der Reaktion, aber eine Wertetabelle für die Konzentration $[A_1]$ als Funktion von t , welche im Fall mehrerer Edukte ($m \geq 2$) mit der Methode der großen Überschüsse gewonnen wurde. Dann gilt:

Die Reaktion besitzt genau dann bezüglich des Edukts A_1 die Ordnung

- $n = 0$, wenn die Punkte $(t|[A_1])$ auf einer Geraden liegen,
- $n = 1$, wenn die Punkte $(t|\ln[A_1])$ auf einer Geraden liegen,
- $n = 2$, wenn die Punkte $(t|\frac{1}{[A_1]})$ auf einer Geraden liegen,
- $n = 3$, wenn die Punkte $(t|\frac{1}{[A_1]^2})$ auf einer Geraden liegen,
- \vdots
- sonstiges n , wenn die Punkte $(t|\frac{1}{[A_1]^{n-1}})$ auf einer Geraden liegen.

Ob die Punkte im Graphen ungefähr auf einer Geraden liegen, muss durch **Linealtest** geklärt werden.⁶⁸

5.10.5 Berechnungsformel für $[A_1](t)$

Mit einem der obigen Testverfahren sei die Ordnung n der Reaktion bezüglich A_1 ermittelt worden.

Dann gilt, wenn $[A_2], \dots, [A_m]$ konstant gehalten werden:

$$[A_1]'(t) = -c \cdot [A_1]^n(t)$$

Aus dieser Beziehung kann man eine Berechnungsformel für $[A_1](t)$ gewinnen:

- Im Falle $n = 0$ gilt⁶⁹

$$[A_1] = -c \cdot t - const \quad (5.21)$$

Setzt man auf beiden Seiten dieser Gleichung $t = 0$ ein, so erhält man den Anfangswert

$$[A_1]_0 = -const$$

Hieraus und aus (5.21) ergibt sich die Berechnungsformel

$$[A_1] = [A_1]_0 - c \cdot t$$

- Im Falle $n = 1$ liegt ein natürliches Abbaugesetz $[A_1]'(t) = -c \cdot [A_1](t)$ vor, und mit Regel 33 erhält man sofort die Berechnungsformel

$$[A_1] = [A_1]_0 \cdot e^{-ct}.$$

⁶⁸siehe 3.1.5, S.23

⁶⁹siehe 5.10.4, S.107

- Im Falle $n \neq 0$ und $n \neq 1$ liegen die Punkte $\left(t \mid \frac{1}{[A_1]^{n-1}}\right)$ auf einer Geraden mit der positiven Steigung $B = (n-1) \cdot c$,⁷⁰ d.h.

$$\frac{1}{[A_1]^{n-1}(t)} = A + (n-1)c \cdot t \quad | \text{ speziell für } t = 0:$$

$$\frac{1}{[A_1]_0^{n-1}} = A \quad | \text{ in die obere Gleichung eingesetzt:}$$

$$\frac{1}{[A_1]^{n-1}(t)} = \frac{1}{[A_1]_0^{n-1}} + (n-1)c \cdot t \quad | \text{ Kehrwert bilden}$$

$$[A_1]^{n-1}(t) = \frac{1}{\frac{1}{[A_1]_0^{n-1}} + (n-1)c \cdot t} \quad (n-1)\text{-te Wurzel ziehen}$$

$$[A_1](t) = \sqrt[n-1]{\frac{1}{\frac{1}{[A_1]_0^{n-1}} + (n-1)c \cdot t}} \quad \text{Fall } n \neq 0 \text{ und } n \neq 1 \text{ allgemein}$$

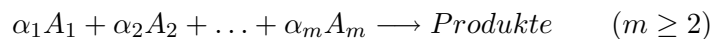
Für $n = 2$ ergibt dies einfach

$$[A_1](t) = \frac{1}{\frac{1}{[A_1]_0} + c \cdot t} \quad \text{Spezialfall } n = 2$$

5.10.6 Graphische Tests zur Bestimmung der Reaktionsordnung

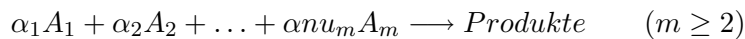
Bei einer Reaktion $A \rightarrow$ Produkte mit nur einem Edukt fallen die Begriffe Ordnung bezüglich A und Reaktionsordnung bedeutungsmäßig zusammen, und der vorige Paragraph lieferte bereits zwei Testverfahren zur Bestimmung der Reaktionsordnung n .

Bei einer Reaktion mit mehreren Edukten



kann man sich die Mühe machen, zunächst die Ordnungen n_1, \dots, n_m bezüglich aller Edukte mit obigen Verfahren zu bestimmen (falls sie alle existieren), und daraus dann die Reaktionsordnung $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ berechnen⁷¹.

Es geht aber auch einfacher: Gibt man zu Beginn der chemischen Reaktion



alle Edukte in ihrem "idealen", der stöchiometrischen Gleichung entsprechenden Mischungsverhältnis zu, nämlich im Verhältnis

$$[A_1] : [A_2] : \dots : [A_m] = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_m,$$

und betrachtet den Abbau während einer Zeitspanne Δt , dann bleibt dieses Mischungsverhältnis wegen⁷²

$$\Delta[A_1] : \Delta[A_2] : \dots : \Delta[A_m] = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_m$$

⁷⁰siehe 5.10.4, S.107

⁷¹siehe 5.10.3, S.105

⁷²siehe 5.10.1, S.99

während des gesamten Verlaufs der Reaktion stets erhalten.

Aus der Proportionalität

$$\frac{[A_i]}{[A_1]} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1}$$

folgt

$$[A_i] = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot [A_1] \quad (i = 2, \dots, m). \quad (5.22)$$

Ist die Reaktion nun von n -ter Ordnung und gilt das Geschwindigkeitsgesetz

$$v = k \cdot [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot \dots \cdot [A_m]^{n_m} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_m = n), \quad (5.23)$$

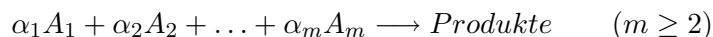
so folgt durch Einsetzen von $v = -\frac{d[A_1]}{dt}$ und von (5.22) in (5.23)

$$\begin{aligned} v = -\frac{d[A_1]}{dt} &= k \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1} \cdot [A_1]\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot [A_1]\right)^{n_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_1} \cdot [A_1]\right)^{n_m} \\ &= k \cdot \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \cdot \dots \cdot \alpha_m^{n_m}}{\alpha_1^{n_1+n_2+\dots+n_m}} \cdot [A_1]^{n_1+n_2+\dots+n_m} \\ v = -\frac{d[A_1]}{dt} &= \text{const.} \cdot [A_1]^n \end{aligned}$$

Dadurch ergeben sich zwei Verfahren zur Bestimmung der Reaktionsordnung:

Erster Graphischer Test zur Bestimmung der Reaktionsordnung n (anhand einer Wertetabelle für v als Funktion von $[A_1]$):

Messmethode: *Starte die chemischen Reaktion*



mit Anfangswerten $[A_1]_0, \dots, [A_m]_0$ im "idealen", der stöchiometrischen Gleichung entsprechenden Mischungsverhältnis, nämlich im Verhältnis

$$[A_1]_0 : [A_2]_0 : \dots : [A_m]_0 = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_m.$$

Miss während des Ablaufs in kürzeren zeitlichen Abständen Δt die Zeiten t_i und den Wert von $[A_1]$. Man erhält eine Wertetabelle für $[A_1]$ als Funktion von t .

Mathematische Auswertung: Berechne durch numerische Differentiation⁷³ in einer dritten Rubrik Näherungswerte für die Reaktionsgeschwindigkeit⁷⁴ $v = -[A_1]'(t)$. Die Wertepaare $([A_1](t_i) | v_i)$ bilden **dann eine Wertetabelle für v als Funktion von $[A_1]$.**

Dann gilt: Die Reaktionsordnung ist genau dann gleich n , wenn die Punkte

$(\ln[A_1] | \ln v)$ ungefähr auf einer Geraden liegen: $\ln v = A + B \cdot \ln[A_1]$ mit Steigung $B = n$.

Dies testet man graphisch entweder, indem man zunächst in einer dritten und vierten Rubrik der Wertetabelle zu den gegebenen $[A_1]$ - und v -Werten die zugehörigen $\ln[A_1]$ - und $\ln v$ -Werte berechnet und dann in einem selbstkonstruierten Koordinatensystem mit normaler

⁷³siehe 4.4.2, S.51

⁷⁴Nur wenn die zeitlichen Abstände $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ klein sind, sind diese Näherungswerte verlässlich.

äquidistanter Skalierung auf jeder der beiden Achsen die Punkte $(\ln[A_1]|\ln v)$ einträgt, oder schneller, indem man direkt die vorgegebenen Punkte $([A_1]|v)$ der Wertetabelle in doppeltlogarithmisches Papier⁷⁵ einträgt.

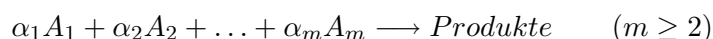
Ob die Punkte im Graphen ungefähr auf einer Geraden liegen, muss durch **Linealtest** geklärt werden.⁷⁶

b) Liegen die Punkte im Testgraphen auf einer Geraden, so ist die Reaktionsordnung $n = B =$ Steigung der Geraden. Weil n auf das Format "ganze Zahl" oder "ganze Zahl + 0,5" gerundet werden soll, genügt es, n anschließend mittels zweier Wertepaare $([A_1]|v_1)$ und $([A_2]|v_2)$ zu berechnen:

$$n \approx \frac{\ln v_2 - \ln v_1}{\ln[A_1]_2 - \ln[A_1]_1}$$

Zweiter Graphischer Test zur Bestimmung der Reaktionsordnung n (anhand einer Wertetabelle für $[A_1]$ als Funktion von t):

Messmethode: Starte die chemischen Reaktion



mit Anfangswerten $[A_1]_0, \dots, [A_m]_0$ im "idealen", der stöchiometrischen Gleichung entsprechenden Mischungsverhältnis, nämlich im Verhältnis

$$[A_1]_0 : [A_2]_0 : \dots : [A_m]_0 = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_m.$$

Miss während des Ablaufs in kürzeren zeitlichen Abständen Δt die Zeiten t_i und den Wert von $[A_1]$. Man erhält eine Wertetabelle für $[A_1]$ als Funktion von t .

Graphisches Testverfahren: Dann gilt: Die Reaktion besitzt genau dann die Reaktionsordnung

- $n = 0$, wenn die Punkte $(t|[A_1])$ auf einer Geraden liegen,
- $n = 1$, wenn die Punkte $(t|\ln[A_1])$ auf einer Geraden liegen,
- $n = 2$, wenn die Punkte $\left(t|\frac{1}{[A_1]}\right)$ auf einer Geraden liegen,
- $n = 3$, wenn die Punkte $\left(t|\frac{1}{[A_1]^2}\right)$ auf einer Geraden liegen,
- \vdots
- sonstiges n , wenn die Punkte $\left(t|\frac{1}{[A_1]^{n-1}}\right)$ auf einer Geraden liegen.

Ob die Punkte im Graphen ungefähr auf einer Geraden liegen, muss durch **Linealtest** geklärt werden.⁷⁷

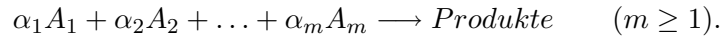
⁷⁵Näheres zur Benutzung dieses Spezialpapiers im Anhang A, S.202ff

⁷⁶siehe 3.1.5, S.23

⁷⁷siehe 3.1.5, S.23

5.10.7 Halbwertzeiten bei Reaktionen der Ordnung n

Betrachtet sei wieder die Reaktion



Weiter sei in diesem Paragraphen vorausgesetzt, dass im Falle mehrerer Edukte ($m \geq 2$) die Anfangskonzentrationen der Edukte im "idealen" Mischungsverhältnis

$$[A_1]_0 : [A_2]_0 : \dots : [A_m]_0 = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_m$$

gewählt worden seien. Dann bleibt, wie oben gezeigt, dieses Mischungsverhältnis während des Reaktionsablaufs ständig erhalten, d.h. es gilt

$$\frac{[A_i](t)}{\alpha_i} = \frac{[A_1](t)}{\alpha_1} \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (i = 2, \dots, m) \quad (5.24)$$

Bezeichnung: Die Variable

$$\xi = -\frac{[A_1](t)}{\nu_1} = -\frac{[A_2](t)}{\nu_2} = \dots = -\frac{[A_m](t)}{\alpha_m}$$

heißt dann die **Umsatzvariable der Reaktion**.

Ihre Ableitung nach der Zeit t ist gerade die in 5.10.1 eingeführte Reaktionsrate $\dot{\xi}$.⁷⁸
Aus der Umrechnungsformel

$$[A_i](t) = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot [A_1](t) \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (5.25)$$

folgt, dass alle Edukte zur selben Zeit ihren halben Anfangswert erreichen:

Beweis: Sei $t_{1/2}$ der Zeitpunkt, zu dem A_1 auf den halben Anfangswert reduziert worden ist. Dann gilt nicht nur

$$[A_1](t_{1/2}) = \frac{[A_1]_0}{2}, \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \text{sondern für } i=2, \dots, m \text{ auch} \quad [A_i](t_{1/2}) & \stackrel{(5.25)}{=} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot [A_1](t_{1/2}) \\ & \stackrel{(5.26)}{=} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \frac{[A_1]_0}{2} \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot [A_1](0) \\ & \stackrel{(5.25)}{=} \frac{1}{2} [A_i](0) \\ & = \frac{[A_i]_0}{2} \end{aligned}$$

d.h. $t_{1/2}$ ist auch der Zeitpunkt, zu dem A_i auf den halben Anfangswert reduziert worden ist. \square

Bezeichnung: Dieser Zeitpunkt heißt die **Halbwertzeit der chemischen Reaktion**.

⁷⁸siehe S.101

Wir untersuchen nun für Reaktionen n -ter Ordnung die Abhängigkeit der Halbwertszeit $t_{1/2}$ von der Anfangskonzentration $[A_1]_0$ (wobei $[A_i]_0 = [A_1]_0$ gilt für alle $i = 1, \dots, m$):

Wir wissen, dass $[A_1]'(t) = -c \cdot [A_1]^n(t)$ gilt. Daraus lässt sich eine Berechnungsformel für $[A_1](t)$ herleiten:⁷⁹

- Im Falle $n = 0$ gilt die Berechnungsformel $[A_1](t) = [A_1]_0 - c \cdot t$. Einsetzen von $t_{1/2}$ auf beiden Seiten der Gleichung liefert

$$\frac{1}{2}[A_1]_0 = [A_1]_0 - c \cdot t_{1/2}$$

$$-\frac{1}{2}[A_1]_0 = -c \cdot t_{1/2}$$

$$[A_1]_0 = 2c \cdot t_{1/2},$$

d.h. Halbwertszeit und Anfangswert sind proportional zueinander.

- Im Falle $n = 1$ erfüllt $[A_1](t)$ ein natürliches Abbaugesetz und die Halbwertszeit ist bekanntlich eine Konstante, unabhängig vom Anfangswert.⁸⁰
- Im Fall $n \neq 0$ und $n \neq 1$ bestimmt man $t_{1/2}$ mittels der Berechnungsformel für $[A_1](t)$:⁸¹

$$[A_1](t) = n^{-1} \sqrt[n-1]{\frac{1}{[A_1]_0^{n-1} + (n-1)c \cdot t}} \quad | \quad t_{1/2} \text{ einsetzen}$$

$$[A_1](t_{1/2}) = n^{-1} \sqrt[n-1]{\frac{1}{[A_1]_0^{n-1} + (n-1)c \cdot t_{1/2}}}$$

$$\frac{[A_1]_0}{2} = n^{-1} \sqrt[n-1]{\frac{1}{[A_1]_0^{n-1} + (n-1)c \cdot t_{1/2}}} \quad | \quad (n-1)\text{-te Potenz bilden}$$

$$\frac{[A_1]_0^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{[A_1]_0^{n-1} + (n-1)c \cdot t_{1/2}} \quad | \quad \text{Kehrwert bilden}$$

$$\frac{2^{n-1}}{[A_1]_0^{n-1}} = \frac{1}{[A_1]_0^{n-1} + (n-1)c \cdot t_{1/2}} \quad | \quad -\frac{1}{[A_1]_0^{n-1}}$$

$$\frac{2^{n-1} - 1}{[A_1]_0^{n-1}} = (n-1)c \cdot t_{1/2} \quad | \quad : (n-1)c$$

$$t_{1/2} = \frac{2^{n-1} - 1}{(n-1)c} \cdot \frac{1}{[A_1]_0^{n-1}} \quad | \quad \cdot [A_1]_0^{n-1}$$

$$t_{1/2} \cdot [A_1]_0^{n-1} = \frac{2^{n-1} - 1}{(n-1)c} = \text{const.}, \text{ d.h. } t_{1/2} \text{ und } [A_1]_0^{n-1} \text{ sind antiproportional.}$$

⁷⁹siehe 5.10.5, S.108

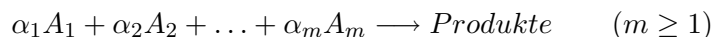
⁸⁰siehe 5.5.3, S.85

⁸¹siehe 5.10.5, S.109

Da A_1 exemplarisch für jedes andere Edukt betrachtet wurde, folgt:

Abhängigkeit der Halbwertzeit von der Anfangskonzentration:

Beginnt die Reaktion n -ter Ordnung



mit Anfangskonzentrationen in demjenigen Mischungsverhältnis, wie es die stöchiometrische Formel angibt, d.h.

$$[A_1]_0 : [A_2]_0 : \dots : [A_m]_0 = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_m,$$

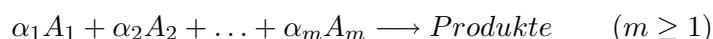
so gilt:

- *Im Falle $n = 0$ ist $t_{1/2}$ proportional zu $[A_1]_0$,*
- *Im Falle $n = 1$ ist $t_{1/2}$ eine von $[A_1]_0$ unabhängige Konstante,*
- *Im Falle $n = 2$ ist $t_{1/2}$ antiproportional zu $[A_1]_0$,*
- *Im Falle $n = 3$ ist $t_{1/2}$ antiproportional zu $[A_1]_0^2$,*
- *Im Falle $n = 4$ ist $t_{1/2}$ antiproportional zu $[A_1]_0^3$,*
- \vdots
- *Im Falle $n \neq 0$ und $n \neq 1$ ganz allgemein ist $t_{1/2}$ antiproportional zu $[A_1]_0^{n-1}$.*

Hierauf beruht dank *Regel 2*⁸² ein

Dritter Graphischer Test zur Bestimmung der Reaktionsordnung n (mittels Halbwertzeiten):

Starte die Reaktion



im Falle $m \geq 2$ mit Anfangskonzentrationen in demjenigen Mischungsverhältnis, wie es die stöchiometrische Formel angibt, d.h.

$$[A_1]_0 : [A_2]_0 : \dots : [A_m]_0 = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_m.$$

Bestimme bei konstanter Temperatur für mehrere verschiedene Anfangskonzentrationen $[A_1]_0$ die zugehörigen Halbwertzeiten. Dann ist die Reaktion genau dann von

- *nullter Ordnung, wenn $t_{1/2}$ und $[A_1]_0$ proportional sind, d.h. wenn die Punkte $([A_1]_0 | t_{1/2})$ auf einer Ursprungsgeraden liegen,*
- *erster Ordnung, wenn $t_{1/2}$ im Wert gleichbleibt, d.h. wenn die Punkte $([A_1]_0 | t_{1/2})$ auf einer horizontalen Geraden liegen,*

⁸²siehe 2.2.1, S.15

- zweiter Ordnung, wenn $t_{1/2}$ und $[A_1]_0$ antiproportional sind, d.h. wenn die Punkte $\left(\frac{1}{[A_1]_0} \mid t_{1/2}\right)$ auf einer Ursprungsgeraden liegen,

- allgemein von n -ter Ordnung ($n \neq 0$ und $n \neq 1$), wenn die Punkte

$$\left(\frac{1}{[A_1]_0^{n-1}} \mid t_{1/2}\right) \text{ auf einer Ursprungsgeraden liegen.}$$

5.10.8 Beispiel für ein biologisches Wachstumsgesetz mit Ähnlichkeit zur chemischen Reaktion n -ter Ordnung

Ist eine Variable y irgendeine monoton wachsende bzw. fallende Funktion **der Zeit** t , so wird die momentane Änderungsrate (ohne ihr bei monotonem Fallen negatives Vorzeichen), also $|y'(t)|$, generell auch gern als die momentane (Wachstums- bzw. Abbau-) **Geschwindigkeit** bezeichnet.

Im Beispiel der chemischen Reaktion n -ter Ordnung gilt bei "idealem" Mischungsverhältnis der Anfangskonzentrationen für jedes der Edukte A_i das **Abbaugesetz**⁸³

"Die momentane Abbaugeschwindigkeit von $[A_i]$ ist proportional zur n -ten Potenz der augenblicklichen Größe von $[A_i]$."

$$-[A_i]'(t) = c \cdot [A_i]^n$$

Für die Masse m von Zellen gilt ein entsprechendes **Wachstumsgesetz**:

"Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit von m ist proportional zur b -ten Potenz der augenblicklichen Größe von m , wobei $b = \frac{2}{3}$."

Als Formel:

$$m'(t) = c \cdot m^{2/3}(t)$$

mit einer zellspezifischen positiven Konstante c .

Ähnlich wie bei der Berechnung der Formel für $[A_1](t)$ ⁸⁴ folgt

$$\frac{m'(t)}{m^{2/3}(t)} = c \quad | \text{ Stammfunktion ist eine Gerade}$$

$$3 \cdot m^{1/3}(t) = A + c \cdot t \quad | t = 0 \text{ einsetzen}$$

$$3 \sqrt[3]{m_0} = A \quad | \text{ für } A \text{ einsetzen}$$

$$3 \cdot m^{1/3}(t) = 3 \sqrt[3]{m_0} + c \cdot t \quad | : 3$$

$$m^{1/3}(t) = \sqrt[3]{m_0} + \frac{c}{3} \cdot t \quad |^3$$

$$m(t) = \left(\sqrt[3]{m_0} + \frac{c}{3} \cdot t\right)^3 \quad \text{Formel für das Massenwachstum von Zellen}$$

in Abhängigkeit von der Zeit t .

⁸³siehe 5.10.6; S.??

⁸⁴siehe 5.10.5, S.109

5.11 Die Winkelfunktionen und ihre Abkömmlinge

5.11.1 Cosinus, Sinus und Bogenlänge eines Winkels

Man betrachte einen **Einheitskreis**, d.h. einen Kreis mit Radius $r = 1$, Mittelpunkt $M(0|0)$ und Umfang $U = 2\pi$ ($\pi = 3,14\dots$ ist irrational, ca. 1 Milliarde Nachkommastellen sind berechnet, die restlichen sind unbekannt...)

Ein Winkel α mit Scheitelpunkt im Ursprung $M(0|0)$, dessen rechter Schenkel die positive x -Achse ist, schneidet mit seinem anderen Schenkel den Einheitskreis in einem Punkt P :

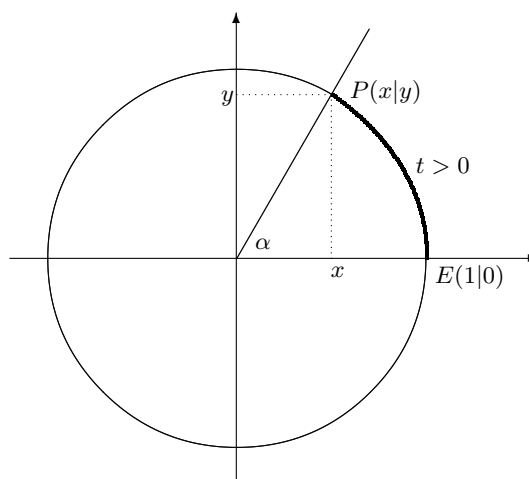


Abbildung 5.6: Winkel mit positiver Bogenlänge t

Durch den Punkt P ist der Winkel α eindeutig bestimmt. Umgekehrt bestimmt jeder Punkt P auf dem Einheitskreis einen solchen Winkel.

Man beschreibt den Winkel α durch **Ortsangabe von P** :

1. Methode:

Mit x - y -Koordinaten.

Bezeichnung: Die x -Koordinate von P heißt $\cos \alpha$.

Die y -Koordinate von P heißt $\sin \alpha$.

2. Methode:

Der gerichtete Kreisbogen von $E(1|0)$ bis $P(\cos \alpha | \sin \alpha)$ innerhalb des Winkelraums von α hat eine bestimmte Länge t ($0 \leq t \leq 2\pi$). Diese Länge t wird mit dem positiven Vorzeichen versehen, wenn der Kreisbogen im Gegenuhrzeigersinn gerichtet ist (s. Abb.5.6), mit dem negativen Vorzeichen, wenn der Kreisbogen im Uhrzeigersinn gerichtet ist.

Durch die (mit Vorzeichen versehene) Bogenlänge t ist der Punkt P und damit der Winkel α eindeutig bestimmt. Man schreibt $P = P_t$.

Bezeichnung: Die vorzeichenbehaftete Zahl t heißt das **Bogenmaß des Winkels**.

Schreibweise: $\cos \alpha = x = \cos t$

$\sin \alpha = y = \sin t$

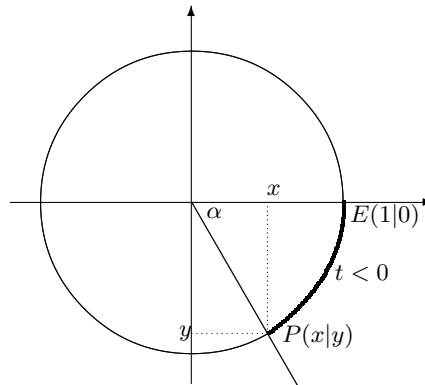


Abbildung 5.7: Winkel mit negativer Bogenlänge t

5.11.2 Symmetrie-Eigenschaften von $\cos t$ und $\sin t$

Lässt man das Bogenmaß t alle Werte von 0 bis 2π durchlaufen, so durchläuft der Punkt P_t im Gegenuhrzeigersinn alle Punkte des Einheitskreises genau einmal. Vergrößert man t über den Wert 2π hinaus, so beginnt der Punkt P_t , dieselben Punkte des Einheitskreises mit denselben Koordinaten erneut zu durchlaufen, erst zum zweiten Mal, dann zum dritten Mal, usw. Entsprechendes geschieht, wenn man t negative Werte durchlaufen lässt, die kleiner als -2π sind. Aus der Beziehung $P_{t\pm 2\pi} = P_t$ und dem Sachverhalt $P_t = (x|y) = (\cos t|\sin t)$ folgt

Regel 43 (Definitionsbereich und Periodizität von $\cos t$ und $\sin t$):

R 43

Cosinus und Sinus als Funktionen des Bogenmaßes t sind für alle Werte $t \in \mathbb{R}$ definiert und 2π -periodisch, d.h.

$$\begin{aligned} \cos(t \pm 2\pi) &= \cos t \\ \sin(t \pm 2\pi) &= \sin t \end{aligned}$$

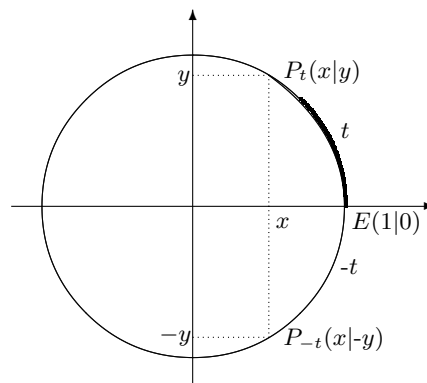
P_t liegt auf dem Einheitskreis, für die Koordinaten gilt $x^2 + y^2 = 1$. Damit erhalten wir

Regel 44 (Lage auf dem Einheitskreis):

R 44

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

Abbildung 5.8: Spiegelung an der x -Achse:



Bei Spiegelung an der x -Achse geht t über in $-t$, $x = \cos t$ bleibt gleich, $y = \sin t$ ändert sein

Vorzeichen. Daraus folgt:

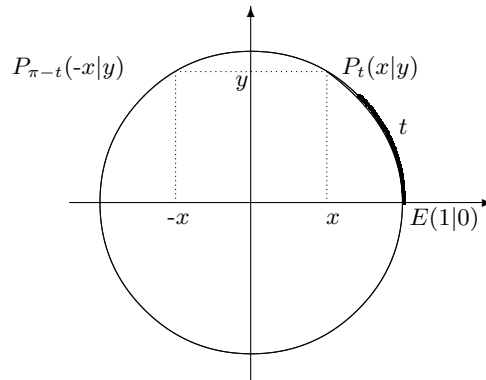
Regel 45 (Übergang von t zu $-t$):

R 45

$\cos t$ ist eine gerade, $\sin t$ eine ungerade Funktion, d.h.

$$\begin{aligned}\cos(-t) &= \cos t \\ \sin(-t) &= -\sin t\end{aligned}$$

Abbildung 5.9: Spiegelung an der y -Achse:



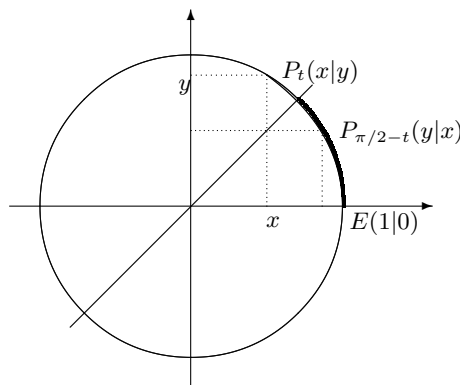
Bei Spiegelung an der y -Achse geht t über in $\pi - t$, $x = \cos t$ wechselt das Vorzeichen, $y = \sin t$ bleibt gleich. Daraus folgt:

Regel 46 (Übergang von t zu $\pi - t$):

R 46

$$\begin{aligned}\cos(\pi - t) &= -\cos t \\ \sin(\pi - t) &= \sin t\end{aligned}$$

Abbildung 5.10: Spiegelung an der Winkelhalbierenden:



Bei Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden geht t über in $\frac{\pi}{2} - t$, die Koordinaten $x = \cos t$ und $y = \sin t$ werden vertauscht. Daraus folgt:

Regel 47 (Übergang von t zu $\frac{\pi}{2} - t$):

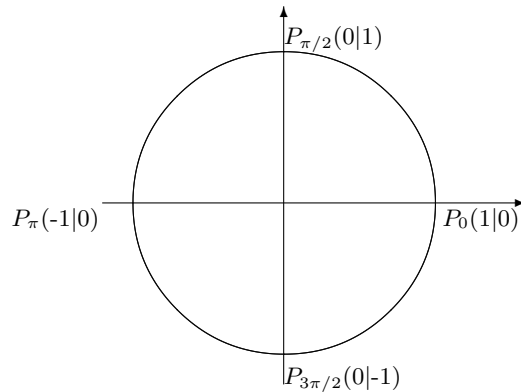
R 47

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t\end{aligned}$$

5.11.3 Wertetabelle und Graph von $\cos t$ und $\sin t$

Mit elementaren geometrischen Überlegungen gewinnt man eine Wertetabelle für $\cos t$ und $\sin t$, noch ohne eine allgemeine Berechnungsformel für diese Funktionen zu kennen:

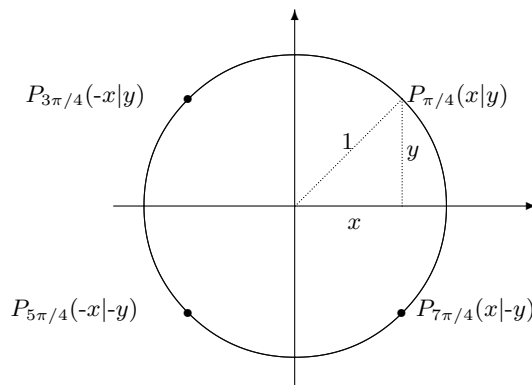
Abbildung 5.11: Zum Winkel $\alpha = 0^\circ$ gehört die Bogenlänge $t = 0$ und der Punkt $P_0(1|0)$, zum Winkel $\alpha = 90^\circ$ gehört die Bogenlänge $t = \pi/2$ und der Punkt $P_{\pi/2}(0|1)$, zum Winkel $\alpha = 180^\circ$ gehört die Bogenlänge $t = \pi$ und der Punkt $P_\pi(-1|0)$, zum Winkel $\alpha = 270^\circ$ gehört die Bogenlänge $t = 3\pi/2$ und der Punkt $P_{3\pi/2}(0|-1)$, zum Winkel $\alpha = 360^\circ$ gehört die Bogenlänge $t = 2\pi$, aber der Punkt $P_{2\pi} = P_0(1|0)$:



Das ergibt die folgenden Werte:

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x = \cos t$	1	0	-1	0	1
$y = \sin t$	0	1	0	-1	0

Abbildung 5.12: Zum Winkel $\alpha = 45^\circ$ gehört die Bogenlänge $t = \pi/4$ und der Punkt $P_{\pi/4}(x|y)$ mit zwei gleichen Koordinaten $x = y$. Im Einheitskreis entsteht ein gleichschenkeliges rechtwinkliges Dreieck mit einer Hypotenuse der Länge $r = 1$ und zwei Schenkeln der Länge $x = y$:

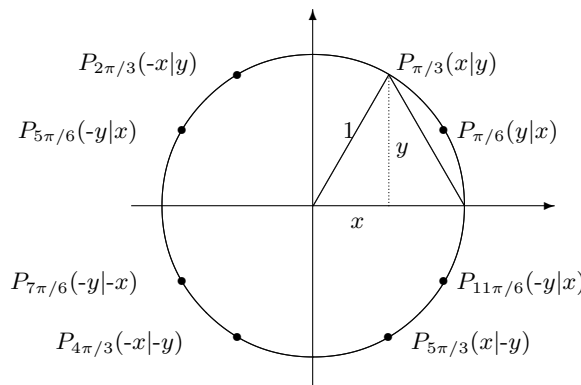


Mit Pythagoras folgt $x^2 + y^2 = 1$, wegen $x = y$ also $2x^2 = 1$, $x^2 = 1/2$, also $x = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ und $y = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$.

Das ergibt folgende Werte:

t	$\pi/4$	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$7\pi/4$
$x = \cos t$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$y = \sin t$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$

Abbildung 5.13: Zum Winkel $\alpha = 60^\circ$ gehört die Bogenlänge $t = \pi/3$ und der Punkt $P_{\pi/3}(x|y)$. Die Punkte $M(0|0)$, $E(1|0)$ und $P_{\pi/3}(x|y)$ bilden ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlängen $r = 1$. Die Höhe des Dreiecks ist gleich y und hat den Fußpunkt mit den Koordinaten $(\frac{1}{2}|0)$. Durch die Höhe wird das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt mit Schenkeln der Länge x und y und einer Hypotenuse der Länge $r = 1$.



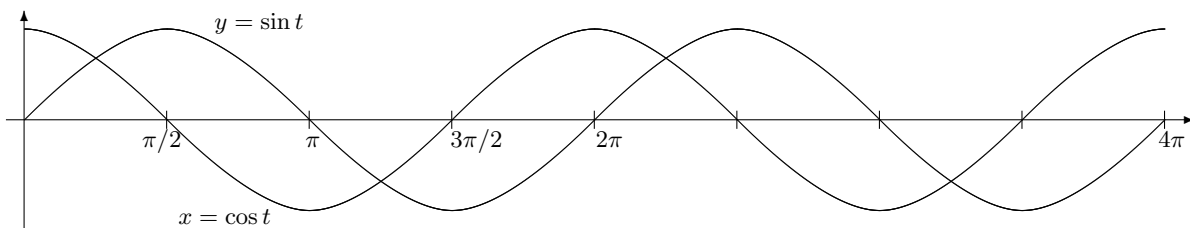
Daraus folgt $x = 1/2$, und mit Pythagoras $y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2 \approx 0,866$. Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden bekommt man den Punkt $P_{\pi/6}(y|x)$. Aus diesen beiden Punkte erhält man durch Spiegelung an beiden Achsen die Punkte $P_{k\pi/6}$ für $k = 1, \dots, 11$.

Das ergibt folgende zusätzliche Werte:

t	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
$x = \cos t$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$y = \sin t$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$

Mit diesen ganz elementar errechneten Funktionswerten ist es bereits möglich, die Graphen von $x = \cos t$ und $y = \sin t$ zu skizzieren:

Abbildung 5.14: Graph von Sinus und Cosinus als Funktionen des Bogenmaßes t



5.11.4 Bedeutung von Cosinus und Sinus in den Naturwissenschaften

Der Graph der Funktion $x = \cos(bt)$ ($b > 0$ konstant) unterscheidet sich vom Graphen des Cosinus $x = \cos t$ nur um eine Maßstabsänderung auf der waagerechten Achse.

Der Graph der Funktion $x = a \cdot \cos(bt)$ ($a > 0$ konstant) unterscheidet sich vom Graphen von $x = \cos(bt)$ nur um eine Maßstabsänderung auf der senkrechten Achse:

Beispiel: Sei $b = 2$, $a = 4$. Wertetabelle für $x = \cos(2t)$ und $x = 3 \cdot \cos(2t)$:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\cos t$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1
$\cos(2t)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$3 \cdot \cos(2t)$	3	0	-3	0	3	0	-3	0	3

Bedeutung des Faktors b :

$x = \cos(2t)$ durchläuft alle Werte des Cosinus, benötigt dafür aber nur eine Periodenlänge π (statt 2π), d.h. für $b = 2$ halbiert sich die Periodenlänge gegenüber der von $x = \cos t$, auf gleichlangen Abschnitten der t -Achse macht der Graph von $x = \cos(2t)$ also doppelt so viele Wellenbewegungen wie der Cosinus.

Interpretiert man t nicht als Bogenmaß, sondern als Zeit, so bedeutet das: Der Faktor b in der Funktion $x = \cos(bt)$ steuert das Tempo der Wellenbewegung. b heißt deshalb die **Frequenz**.

Verdoppelung von b bedeutet Verdoppelung der Frequenz.

Da der Faktor $b > 0$ beliebig $\in \mathbb{R}$ sein darf, sind mit ihm beliebige Frequenzen erzeugbar.

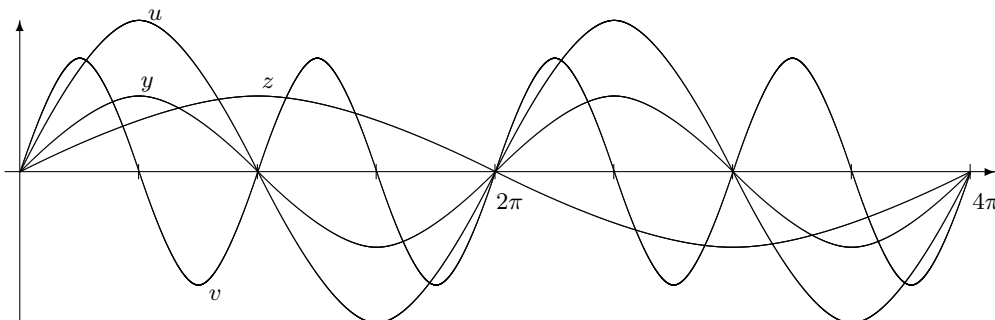
Interpretiert man t nicht als Zeit, sondern als räumliche Länge, so folgt: Der Faktor b steuert die **Wellenlänge**.

Verdoppelung von b bedeutet Halbierung der Wellenlänge.

Bedeutung des Faktors a : Die Wellenbewegungen von $x = 3 \cdot \cos(2t)$ sind synchron zu denen von $x = \cos(2t)$, aber der obere und untere Ausschlag der Wellenbewegungen ist jeweils verdreifacht. Das bedeutet: Der Faktor a in der Funktion $x = a \cdot \cos(bt)$ steuert die Breite der Wellenbewegung und heißt deshalb die **Amplitude**.

Die gleichen Betrachtungen gelten sich für Funktionen des Typs $y = a \cdot \sin(bt)$.

Abbildung 5.15: Die Graphen von $y = \sin(t)$, $z = \sin(0,5 \cdot t)$, $u = 2 \sin(t)$, $v = 1,5 \cdot \sin(2t)$



Bezeichnung: Alle Funktionen des Typs

$$x = a \cdot \cos(bt) \text{ und } y = a \cdot \sin(bt), (a, b \text{ positive reelle Konstante})$$

heißen **trigonometrische Funktionen**. Durch Addition endlich vieler trigonometrischer Funktionen erhält man **trigonometrische Polynome**.⁸⁵

Die Graphen aller trigonometrischen Funktionen beschreiben periodische Wellenbewegungen. Der **Überlagerung** von Wellenbewegungen entspricht die **Addition** der sie beschreibenden Funktionen. Deshalb spielen trigonometrische Polynome eine enorme Rolle bei der Beschreibung periodischer Prozesse aller Art (mechanische, akustische, optische, elektromagnetische). Es gilt (mit kleinen Einschränkungen) der grundlegende⁸⁶

Approximationssatz von Dirichlet-Jordan⁸⁷

Ist die Funktion $z = f(t)$ stetig und periodisch mit Periodenlänge L und ist $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine, frei gewählte positive Zahl (z.B. 10^{-9}), so gibt es stets ein trigonometrisches Polynom f_n mit maximal $2n + 1$ Summanden der Bauart

$$f_n(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{L}t\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{L}t\right) + \dots + a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}t\right)$$

derart, dass sich die Funktionswerte dieses trigonometrischen Polynoms von den Funktionswerten von $z = f(t)$ um garantiert weniger als $\pm\varepsilon$ unterscheiden.

Je kleiner die Abweichung ε vorgegeben wurde, umso größer ist n zu wählen.

Auch bei den Polynomen $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, die zur Approximation **beliebiger stetiger Funktionen** $y = f(x)$ in einem Bereich $a \leq x \leq b$ verwendet werden, hängt der Grad n (und damit die Anzahl der benötigten Summanden) in dieser Weise von ε ab. Darüber hinaus muss aber i.a. auch der Satz von Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n komplett ausgetauscht werden, sobald ein anderes, noch kleineres ε gewählt wird. Das ist bei der Approximation **periodischer stetiger Funktionen** durch trigonometrische Polynome wesentlich bequemer:

Bezeichnung: Die Zahlen $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \dots$ (in dieser Reihenfolge) bilden eine ganz bestimmte, zur periodischen Funktion $z = f(t)$ gehörige Folge von **spezifische Konstanten**. Sie heißen die **Fourierkoeffizienten** der periodischen Funktion.⁸⁸

Sie sind unabhängig von der gewählten Genauigkeitsschranke ε . Letztere beeinflusst nur die zur Approximation benötigte Anzahl von Fourierkoeffizienten.

Die sogenannte **Fouriertheorie** ist ein riesiges, stark expandierendes Forschungsgebiet der Mathematik, das nicht nur mit der Physik, sondern immer stärker auch mit der Medizin zusammenarbeitet, seit man zunehmend auch periodische Prozesse mit Wellenlängen im Nano-Bereich messen und auswerten will. Medizinische Diagnoseverfahren wie Ultraschall und Computertomographie basieren auf dieser mathematischen Theorie.

Noch kompliziertere Funktionen als die trigonometrischen Funktionen $x = a \cdot \cos(bt)$ und $y = a \cdot \sin(bt)$ erhält man, wenn die Amplitude a nicht konstant, sondern zeitabhängig ist,

⁸⁵in Analogie zu den Polynomen, die durch Addition endlich vieler Monome entstehen, siehe 2.2.5, S.19

⁸⁶vgl. den Approximationssatz von Weierstraß für Polynome, siehe 2.2.6, S.20

⁸⁷Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), deutscher Mathematiker; Camille Jordan (1838 - 1922), französischer Mathematiker

⁸⁸Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), französischer Mathematiker und Physiker

also $a = a(t)$:

$$x = a(t) \cdot \cos(bt) \text{ und } y = a(t) \cdot \sin(bt)$$

Dabei kann a selber wieder eine periodische Funktion von t sein, muss aber nicht. Die Graphen solcher Funktionen beschreiben anschwellende oder sich abschwächende Wellenbewegungen konstanter Länge, je nachdem, ob a eine wachsende oder fallende Funktion von t ist.

Außerdem kann die Frequenz (Wellenlänge) b zeitabhängig sein, $b = b(t)$:

$$x = a(t) \cdot \cos(b(t) \cdot t) \text{ und } y = a(t) \cdot \sin(b(t) \cdot t)$$

Dann folgen die Wellenbewegungen in kürzer werdenden Zeitabständen (schneller) aufeinander, wenn b monoton wächst, in wachsenden Zeitabständen (langsamer), wenn b monoton fällt.

Periodisch sind diese Funktionen nur noch dann, wenn a und b periodische Funktionen von t sind (oder konstant). Auch sie spielen in den Naturwissenschaften eine große Rolle.

5.11.5 Berühmte Formeln für Cosinus und Sinus

Angesichts der ungeheuren Nützlichkeit von Cosinus und Sinus zur Beschreibung naturwissenschaftlicher Phänomene besteht ein dringender Bedarf, ein Berechnungsverfahren zu kennen, um $\cos(t)$ und $\sin(t)$ für beliebige Zahlwerte von t und mit jeder gewünschten Genauigkeit zu berechnen. Elementargeometrische Überlegungen wie in 5.11.3, S.119ff helfen da nicht weiter.

Trotzdem bringt eine geometrische Entdeckung den Durchbruch: So wie man die reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden veranschaulicht, veranschaulicht man bekanntlich⁸⁹ die komplexen Zahlen $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$, $i =$ imaginäre Einheit, d.h. eine erfundene Zahl mit der Eigenschaft $i^2 = -1$) durch die Punkte $(x|y)$ der Ebene ("Gauß'sche Zahlenebene").⁹⁰ Dabei heißt die reelle Zahl x der "Realteil", die reelle Zahl y der "Imaginärteil" der komplexen Zahl $x + iy$. Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen: Eine komplexe Zahl ist reell, wenn ihr Imaginärteil gleich Null ist.

Eindeutigkeitsregel für komplexe Zahlen:

Zwei komplexe Zahlen $x_1 + iy_1$ und $x_2 + iy_2$ sind genau dann gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen, als Formel:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \iff x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

Daraus folgt insbesondere:

$$x + iy = 0 \iff x = 0 \text{ und } y = 0.$$

$$x + iy \neq 0 \iff x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \iff x^2 + y^2 \neq 0.$$

Wendet man alle Rechenregeln, die man von den reellen Zahlen gewohnt ist, auch auf die komplexen Zahlen an und beachtet dabei die Regel

$$i^2 = -1,$$

⁸⁹ siehe 1.1, S.2f

⁹⁰ Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), deutscher Mathematiker

so erhält man die

Rechenregeln für komplexe Zahlen:

Für $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$(C.1) \quad (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$(C.2) \quad (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$(C.3) \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \text{ falls } x + iy \neq 0.$$

Die Regel (C.3) erhält man, indem man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{x+iy}$ mit der komplexen Zahl $x - iy$ erweitert und dann im Nenner ausmultipliziert: $(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

Die Exponentialfunktion $y = \exp(z)$ lässt sich für alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ berechnen mittels *Regel 27*:⁹¹

$$\exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy)$$

und *Regel 22*:⁹²

$$\exp(iy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + (iy) + \frac{1}{2}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(iy)^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(iy)^k. \quad (5.27)$$

Da x eine reelle Zahl ist, ist auch $\exp(x)$ wieder reell. Nicht so $\exp(iy)$. Euler⁹³ studierte die Lage der komplexen Zahl $\exp(iy)$ in der Gaußschen Zahlenebene und machte folgende berühmte Entdeckung:

Regel 48 (Eulersche Formel):

Ist $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl, so wird die komplexe Zahl $\exp(it)$ repräsentiert durch den Punkt $P_t(\cos t | \sin t)$ auf dem Einheitskreis, d.h. durch den Punkt, der zur Bogenlänge t gehört.⁹⁴

Das bedeutet: $\cos t$ ist der Realteil, $\sin t$ der Imaginärteil der komplexen Zahl $\exp(it)$.

Als Formel:

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t \quad (\text{Gleichung zwischen komplexen Zahlen})$$

Das ist der Schlüssel, um für $\cos t$ und $\sin t$ Berechnungsformeln zu finden, die die gleichen Dienste leisten wie die *Regeln 22 und 23* für die Exponentialfunktion:

Zunächst berechnen wir die Potenzen i^k ($k = 1, 2, 3, \dots$):

⁹¹siehe 5.3, S.76

⁹²siehe 5.2.1, S.72

⁹³Leonhard Euler (1707 - 1783), schweizer Mathematiker

⁹⁴siehe 5.11.1, S.116ff

$$\begin{aligned}
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\
i^4 &= (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
i^6 &= i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\
i^7 &= i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \\
i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Potenzen i^k ($k = 1, 2, 3, \dots$) zyklisch immer wieder die Werte i , -1 , $-i$ und 1 durchlaufen. Nun setzen wir $(it)^k = i^k t^k$ ein:

$$\begin{aligned}
\exp(it) &= 1 + it + \frac{1}{2}i^2t^2 + \frac{1}{3!}i^3t^3 + \frac{1}{4!}i^4t^4 + \frac{1}{5!}i^5t^5 + \frac{1}{6!}i^6t^6 + \frac{1}{7!}i^7t^7 + \frac{1}{8!}i^8t^8 \dots \\
&= 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - i\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + i\frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{6!}t^6 - i\frac{1}{7!}t^7 + \frac{1}{8!}t^8 \dots
\end{aligned}$$

und fassen einerseits alle Summanden ohne, andererseits alle mit dem Faktor i zusammen:

$$\begin{aligned}
\exp(it) &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \frac{1}{8!}t^8 \dots\right) + i \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 \dots\right) \\
&= \cos t + i \sin t
\end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeitsregel für komplexe Zahlen⁹⁵ folgt hieraus

Regel 49 (Berechnungsformeln für $\cos t$ und $\sin t$):

R 49

Ist t das **Bogenmaß** eines Winkels α , und ist

$$x_n = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \frac{1}{8!}t^8 - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

sowie

$$y_n = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

so konvergiert ab $n \geq 2|t|$ die Folge x_1, x_2, x_3, \dots alternierend gegen $\cos t$ und die Folge y_1, y_2, y_3, \dots alternierend gegen $\sin t$.

Der wahre Wert von $\cos t$ bzw. $\sin t$ liegt dann also stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern.

Ableiten von $\exp(it)$ nach t liefert einerseits mit der Kettenregel und der *Eulerschen Formel*:⁹⁶

$$(\exp(it))' = \exp'(it) \cdot (it)' = \exp(it) \cdot i = (\cos t + i \sin t) \cdot i = -\sin t + i \cos t,$$

andererseits mit der *Summenregel* (D.2)⁹⁷

$$(\exp(it))' = (\cos t + i \sin t)' = (\cos t)' + i(\sin t)'$$

⁹⁵siehe oben, S.123

⁹⁶siehe S.124

⁹⁷siehe 4.4.1, 50

Gleichsetzen ergibt

$$-\sin t + i \cos t = (\cos t)' + i(\sin t)',$$

mit der *Eindeutigkeitsregel für komplexe Zahlen* also

Regel 50 (Ableitung von Cosinus und Sinus):

R 50

$$(\cos t)' = -\sin t$$

$$(\sin t)' = \cos t$$

Auch wie sich Cosinus und Sinus beim Addieren von Winkeln verändern, läßt sich mittels der *Eulerschen Formel* studieren: Sind t_1 und t_2 die Bogenmaße zweier Winkel α und β , so gilt einerseits

$$\exp(i(t_1 + t_2)) = \cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2),$$

andererseits mit dem *Additionstheorem der Exponentialfunktion*⁹⁸ und der *Eulerschen Formel*

$$\begin{aligned} \exp(i(t_1 + t_2)) &= \exp(it_1 + it_2) \\ &= \exp(it_1) \cdot \exp(it_2) \\ &= (\cos t_1 + i \sin t_1) \cdot (\cos t_2 + i \sin t_2) && | i^2 = -1 \\ &= \cos t_1 \cos t_2 + i \cos t_1 \sin t_2 + i \sin t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 \\ &= (\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) + i(\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2) \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2) = (\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) + i(\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2),$$

mit der *Eindeutigkeitsregel für komplexe Zahlen* also

Regel 51 (Additionstheoreme für Cosinus und Sinus):

R 51

$$\cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2$$

$$\sin(t_1 + t_2) = \cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2$$

⁹⁸siehe 5.3, S.76