

## Teil III

# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

# Kapitel 7

## Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 7.1 Die Begriffe Zufallsvariable, Messmethode, Experiment

Die Abhängigkeit einer Variablen  $x$  von Einflussgrößen kann unterschiedlich geartet sein:

1. Fall: Monokausale Abhängigkeit:  $x = f(u)$ .  
**Beispiele:**  $x =$  Fläche des Quadrats,  $u =$  Kantenlänge,  
 $x =$  Volumen der Kugel,  $u =$  Radius.
2. Fall: Multikausale Abhängigkeit:  $x = f(u_1, u_2, \dots, u_k)$   
Anzahl  $k$  der Einflussgrößen genau bekannt, jedes  $u_i$  genau kontrollierbar ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).  
**Beispiele:**  $x =$  Fläche des Dreiecks,  $u_1, u_2 =$  zwei Dreiecksseiten,  $u_3 =$  der eingeschlossene Winkel.  
 $x =$  Volumen des Zylinders,  $u_1 =$  Radius der Grundfläche,  $u_2 =$  Höhe des Zylinders.  
  
**Im 1. und 2. Fall gilt: Setzt man die Variablen  $u$  bzw.  $u_1, \dots, u_k$   $n$ -mal auf exakt die gleichen Werte, so ergibt sich auch  $n$ -mal exakt der gleiche  $x$ -Wert.**
3. Fall: Multikausale Abhängigkeit:  $x = f(u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots)$ ,  
wobei  $u_1, \dots, u_k$  bei Messungen von  $x$  genau unter Kontrolle sind, d.h. wiederholt auf exakt die gleichen Werte gesetzt werden können,  $v_1, v_2, \dots$  dagegen nicht oder nicht so exakt.  
**Beispiele:**  $x =$  systolischer Blutdruck,  $u_1 =$  Person,  $u_2 =$  Tageszeit,  $u_3 =$  Körperlage (sitzend, liegend, pedaltretend, ...),  $v_1 =$  seelische Verfassung der Person,  $v_2 =$  körperliche Verfassung der Person,  $v_3 =$  Wetter, ...  
 $x =$  Augenzahl beim Würfeln,  $u_1 =$  Würfelexemplar,  $u_2 =$  Würfelbecher,  $u_3 =$  Würfelunterlage,  $u_4 =$  Person des Würflers,  $v_1 =$  Schüttelbewegung beim Würfeln.

**Bezeichnung:** Eine Variable  $x$ , deren Wert von Einflussgrößen abhängig ist, die nicht alle, oder nicht alle vollständig unter der Kontrolle des Beobachters stehen, heißt eine **Zufallsvariable**.

Eine **Messmethode** für die Zufallsvariable  $x$  besteht in der genauen Festlegung dessen, wie viele und welche Einflussgrößen  $u_1, \dots, u_k$  bei Messungen von  $x$  exakt konstant gehalten werden sollen und innerhalb welcher Bandbreiten sonstige Einflussgrößen  $v_1, v_2, \dots$  unkontrolliert variieren.

Die Messmethode ist also definiert durch die konkrete Festlegung der Funktion

$$x = f(u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots)$$

und ihres Definitionsbereichs. Dadurch wird aber auch  $x$  selbst erst als spezifische Zufallsvariable festgelegt.

**Merke:** Messmethode und Zufallsvariable legen sich gegenseitig fest/ sind untrennbar.

**Bezeichnung:** Ein **Experiment** oder **Versuchsaufbau** zur Messung von  $x$  beruht auf einer wohlbestimmten Messmethode und legt darüber hinaus noch fest, auf **welchen Werten** die exakt kontrollierbaren  $u_1, \dots, u_k$  jeweils konstant gehalten werden sollen, wenn  $x$  gemessen wird.

Ein Experiment ist also ein detailliert ausgearbeiteter theoretischer Plan zur Messung von  $x$ , der dem Messenden alle gestalterischen Entscheidungen abnimmt.

Wir illustrieren die Begriffe “Messmethode“ und “Experiment“ sowie die Untrennbarkeit von Messmethode und Zufallsvariablen am Beispiel der Pulsmessung:

**Beispiel 1:** Eine **Messmethode** besteht z.B. darin, das zu messende Individuum ( $= u_1$ ) vorzuschreiben sowie eine bestimmte körperliche ( $= u_2$ ) Verfassung. Die seelische Verfassung ( $= v_1$ ) ist nicht unter Kontrolle. Zwei verschiedene **Experimente** A und B zu dieser Messmethode entstehen nun dadurch, dass A und B zwei verschiedene Individuen messen sollen (den übergewichtigen Herrn X bzw. die magersüchtige Frau Y), und/oder dass A und B dieselbe vorgeschriebene Person einerseits unter körperlicher Belastung messen (Laufband, Heimtrainer, ...), andererseits in Ruhelage.

**Beispiel 2:** Eine andere **Messmethode** besteht darin, die körperliche Verfassung ( $= u_1$ ) vorzuschreiben, nicht aber die zu messende Person ( $= v_1$ ). Präzise festgelegt ist diese Methode aber erst, wenn geklärt ist, ob die zu messende Person a) der gesamten Breite der Bevölkerung entstammen darf, oder b) einer bestimmten Altersklasse zugehören soll und/oder c) einem Personenkreis mit charakteristischen Lebensumständen (Raucher, Jogger, Schichtarbeiter, ...), d.h. zur Messmethode gehört jetzt die Angabe, innerhalb welcher Bandbreite von Werten die Variable  $v_1$  frei variieren darf. Zwei Experimente A und B zu dieser Messmethode können sich nun wieder darin unterscheiden, welche körperliche Verfassung vorgeschrieben wird (A misst Personen unter Narkose, B Personen nach 20 Kniebeugen), oder, bei gleicher körperlicher Verfassung, welcher Altersklasse (A misst bei Säuglingen, B bei Erwachsenen), welcher Personenkreis (A misst Leistungssportler, B misst Rekonvaleszenten).

Die verschiedenen Messmethoden messen zwangsläufig auch verschiedene Zufallsvariable  $x$ :  
 Im 1. Beispiel ist  $x =$  Pulsfrequenz eines bestimmten Individuums in bestimmter körperlicher Verfassung. Im 2. Beispiel ist, je nach Ausgestaltung der Messmethode

$x =$  Pulsfrequenz von Personen in bestimmter körperlicher Verfassung,

$x =$  Pulsfrequenz von Personen bestimmten Alters in bestimmter körperlicher Verfassung,

$x =$  Pulsfrequenz von Personen unter bestimmten Lebensumständen in bestimmter körperlicher Verfassung,

$x =$  Pulsfrequenz von Personen bestimmten Alters unter bestimmten Lebensumständen und in bestimmter körperlicher Verfassung.

**Merke:** Die Ergebnisse von Messungen mit verschiedenen Messmethoden stehen grundsätzlich konkurrenzlos nebeneinander. Insbesondere können sie sich wechselseitig weder bestätigen noch widerlegen. Liegt dieser Sachverhalt vor, so sagt man kurz, die Ergebnisse seien **nicht vergleichbar**.

## 7.2 Messreihen und ihre statistischen Daten

**Bezeichnung:** Eine **Messreihe** (auch **empirische Messreihe**) zur Zufallsvariablen  $x$  besteht aus  $n$  konkret durchgeführten Messungen **im Rahmen desselben Experiments**, und liefert als Ergebnis  $n$  konkrete Messwerte  $x_1, \dots, x_n$ .

Da im Rahmen des Experiments zwar die Einflussgrößen  $u_1, \dots, u_k$  bei allen  $n$  Messungen exakt auf demselben konstanten Wert gehalten werden, nicht aber  $v_1, v_2, \dots$ , sind die  $n$  Messergebnisse  $x_1, \dots, x_n$  einer Messreihe im Wert nicht exakt gleich, sondern unterscheiden sich mehr oder weniger, wobei gewisse Messwerte evtl. häufiger, andere seltener auftreten. Dieses Phänomen bedarf einer **mathematischen Nachbehandlung**, bevor die Messergebnisse fachwissenschaftlich ausgewertet und interpretiert werden können. Im Folgenden geht es um Theorie und Praxis dieser Nachbehandlung.

Aus der Fülle der einzelnen Messwerte einer Messreihe bestimmt man zunächst drei Zahlen, die als **Standardkennzahlen** oder **statistische Daten der Messreihe** bezeichnet werden:

$n$ : die **Anzahl der Messungen**  $n$  in einer Messreihe ist ein wichtiges Maß zur Beurteilung der Sicherheit des Resultats, zeigt den Messaufwand an und wird für alle weiteren statistischen Auswertungen benötigt.

$\bar{x}$ : Das arithmetische Mittel der  $n$  einzelnen Messergebnisse  $x_1, \dots, x_n$  einer Messreihe

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ heißt der } \mathbf{Mittelwert} \text{ der Messreihe.}$$

Wenn man als Gesamtergebnis der Messreihe eine Zahl erwartet, so ist dieser Durchschnittswert die am besten gesicherte Angabe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser

Durchschnittswert aber auch selber als ein Messwert auftritt, oder wie nahe alle konkreten Messungen bei diesem Durchschnittswert liegen, ist durch diese Angabe nicht erkennbar. Zum Beispiel kann der Mittelwert  $\bar{x} = 10$  von den vier Messergebnissen 9.8 / 9.95 / 10.05 / 10.1 herrühren oder von den vier Messergebnissen 5 / 8 / 12 / 15.

s: Die **empirische Streuung**<sup>1</sup> oder **Näherungsstandardabweichung** einer Messreihe

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

ist die aufschlussreichste Größe<sup>2</sup> zur Bewertung der **Qualität der Messmethode**. Sie misst die durchschnittliche Abweichung des einzelnen Messwertes  $x_i$  vom Mittelwert  $\bar{x}$ . Die empirische Streuung  $s$  fällt umso kleiner aus, je mehr Einflussgrößen konstant gehalten werden und je enger der Rahmen ist, in dem die übrigen Einflussgrößen variieren. Sie reagiert empfindlich auf Änderungen dieser Festlegungen und ist daher ein wichtiger Indikator für Methodenunterschiede bei verschiedenen Messreihen.

Wegen  $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$  ist  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x} \cdot \bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$ , und man erhält zur Berechnung von  $s$  die wesentlich bequemere Formel

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}}$$

**1. Grenzwertsatz:**

*Verlängert man eine Messreihe im Rahmen eines Experiments um immer mehr Messungen, d.h. lässt man  $n$  gegen Unendlich streben, und berechnet man dabei den Mittelwert  $\bar{x}$  und die empirische Streuung  $s$  mit wachsendem  $n$  immer wieder neu, so strebt die Folge der Mittelwerte ebenso wie die Folge der empirischen Streuungen je **gegen einen Grenzwert**:*

$$\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ heißt der Erwartungswert}$$

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} \text{ heißt Standardabweichung,}$$

**Streuung oder mittlerer Fehler.**

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s^2 \text{ heißt die Varianz.}$$

**Merke:** Der **Erwartungswert**  $\hat{x}$  hängt nicht von den konkret durchgeführten Messreihen ab, sondern er ist eine **spezifische Konstante des Experiments**. Die **Streuung**  $\sigma$  hängt nicht von den konkret durchgeführten Messreihen ab, nicht einmal davon, auf welchen Werten die Einflussgrößen  $u_1, \dots, u_k$  konstant gehalten werden (also nicht vom Experiment), sondern sie ist eine **spezifische Konstante der Messmethode**.

<sup>1</sup>Vorsicht! Im Zähler stehen große Zahlen  $x_i, \bar{x}$  mit kleiner Differenz. Mit allen bekannten Nachkommastellen arbeiten, sonst wird der absolute Fehler  $|\Delta s|$  zu groß!

<sup>2</sup>vgl. das Konzept des "mittleren Fehlers" bei der Linearen Regression, siehe 4.7, S.59, Formel (4.5)

**Bezeichnung:** Eine ideale Messreihe zu einem Experiment wäre eine Messreihe mit unendlich vielen Messungen. Sie ist die begriffliche Abstraktion einer Messreihe mit mehreren tausend Messungen.

**Regel 60 (Statistische Daten der idealen Messreihe):**

R 60

Die ideale Messreihe zu einem Experiment besitzt die statistischen Daten

$$n = \infty, \bar{x} = \hat{x}, s = \sigma.$$

### 7.3 Dichtefunktionen und Verteilungsfunktionen

Hat man zu einem Experiment eine längere Messreihe (vorzugsweise  $n \geq 50$ ), so kann man über die Bestimmung der drei statistischen Daten  $n$ ,  $\bar{x}$  und  $s$  hinaus eine **feinere (auch graphische) Auswertung** der Messergebnisse  $x_1, \dots, x_n$  vornehmen wie folgt:

1. Schritt: **Strichliste:**

Ist  $x_{min}$  der kleinste,  $x_{max}$  der größte gemessene Wert, so teilt man die  $x$ -Achse im Bereich  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  in eine gewisse Anzahl - etwa  $m$  -**gleichlange** Intervalle  $I_1, \dots, I_m$ , der Länge  $\Delta x$  und zählt für jedes dieser Intervalle die **Häufigkeit**  $H_j$ , mit der Messwerte dieser Messreihe in dem Intervall liegen. Messwerte auf der Intervallgrenze werden dabei zu je  $\frac{1}{2}$  beiden Nachbarintervallen zugerechnet. Das Auszählungsergebnis nennt man eine Strichliste.

Bezeichnet  $\xi_j$  den Mittelpunkt des Intervalls  $I_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), so erhält man folgende Daten:

Intervall	$\xi_1 \pm \frac{\Delta x}{2}$	...	$\xi_j \pm \frac{\Delta x}{2}$	...	$\xi_m \pm \frac{\Delta x}{2}$
Häufigkeit $H$	$H_1$	...	$H_j$	...	$H_m$

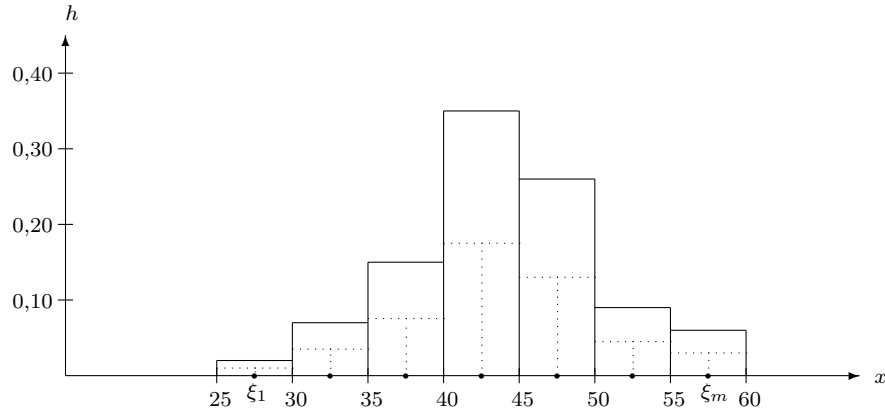
**Beispiel:** Ein Prüfer lässt  $n$  Personen dieselbe Klausur schreiben.  $x =$  Klausurnote. Die hier beschriebene Art der Auswertung ist unter der Bezeichnung "Notenspiegel" bekannt. Der Notenspiegel hängt von der Anzahl  $n$  der Klausurteilnehmer und der Feinheit der benutzten Notenskala (5 Noten oder 15 Noten) ab.

2. Schritt: **Säulendiagramm:**

Eine **1. Standardisierung** erhält man, wenn man die Anzahl der Messungen, die in ein bestimmtes Intervall fallen, jeweils durch die Gesamtzahl  $n$  aller Messungen teilt. Dies ist der Übergang von der Häufigkeit  $H$  der Messwerte in einem Intervall zur **relativen Häufigkeit**  $h$ , einer Zahl zwischen 0 und 1, wobei  $1 = 100\% \hat{=} n$ . Zugehörige Daten:

Intervall	$\xi_1 \pm \frac{\Delta x}{2}$	...	$\xi_j \pm \frac{\Delta x}{2}$	...	$\xi_m \pm \frac{\Delta x}{2}$
relative Häufigkeit $h$	$h_1$	...	$h_j$	...	$h_m$

Diese Daten werden üblicherweise graphisch repräsentiert in Form eines **Säulendiagramms**. Charakteristisch ist dabei, dass sich die Höhen aller Säulen zu 1 (= 100%) aufsummieren.



Die Optik der Säulengraphik ist unabhängig von der Anzahl der Messungen  $n$ , aber noch stark abhängig von der Säulenbreite  $\Delta x$ :

Liegen 35% der Messergebnisse im Intervall  $40 \leq x \leq 45$ , so können jeweils nur rund halb so viele Messergebnisse in jedem einzelnen der zwei Intervalle  $40 \leq x \leq 42,5$  bzw.  $42,5 \leq x \leq 45$  liegen. Bei Halbierung der Intervallbreite (und damit bei Verdoppelung der Anzahl  $m$  der Säulen) halbiert sich also auch ungefähr die Höhe der einzelnen Säulen (siehe gestrichelte Linien).

Und im Beispiel der Klausurergebnisse gilt: Geht man von der Einteilung in 5 Noten über zu der dreifach so feinen Einteilung in 15 Noten, so dritteln sich in etwa alle relativen Häufigkeiten, also auch alle Säulenhöhen.

Insgesamt erkennt man: Vergrößert oder verkleinert man die Säulenbreite  $\Delta x$  um einen gewissen Faktor, so vergrößert bzw. verkleinert sich gleichzeitig die relative Häufigkeit  $h_j$  um denselben Faktor, das heißt aber, dass der Quotient aus beiden dabei unverändert, also konstant bleibt.

3. Schritt: **Dichtefunktion:**

Wenn der Quotient zweier variabler Größen immer konstant bleibt, sind sie proportional.<sup>3</sup> Im vorliegenden Fall bedeutet das:

Die relative Häufigkeit  $h_j$  und damit die Höhe der  $j$ -ten Säule ist für kleine  $\Delta x$  ungefähr proportional zur Intervallbreite  $\Delta x$ , mit einem Proportionalitätsfaktor  $p_j$ , der für  $j = 1, \dots, m$  verschieden sein kann.

$$h_j \approx p_j \cdot \Delta x \quad \text{für kleine } \Delta x. \tag{7.1}$$

Da  $\Delta x$  für alle Intervalle gleich groß ist, ist die relative Häufigkeit  $h_j$  wesentlich bestimmt durch die Größe des Faktors  $p_j$ . Je dichter die Messergebnisse sich im Intervall  $I_j$  drängen, umso größer ist der Faktor  $p_j$ . Also ist

$$p_j \approx \frac{h_j}{\Delta x} \tag{7.2}$$

---

<sup>3</sup>siehe 2.2.1, S.15

ein Maß für diese Dichte, welches **nicht** mehr von der Intervallbreite abhängig ist, sondern nur noch von der Lage des Intervalls auf der  $x$ -Achse. Man ordnet den Faktor  $p_j$  daher nicht mehr dem Intervall als solchem zu, sondern dem Intervallmittelpunkt  $\xi_j$ . Das ergibt folgende Daten:

Intervallmittelpunkt $\xi$	$\xi_1$	$\dots$	$\xi_j$	$\dots$	$\xi_m$
Dichtefaktor $p$	$p_1$	$\dots$	$p_j$	$\dots$	$p_m$

Verändert man die Anzahl  $m$  der Intervalle, in die man den Bereich  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  einteilt (z.B. von 7 auf 9, 11, 13, ...), so bekommt man zur selben Messreihe eindeutig andere Intervallmittelpunkte  $\xi_j$  und dazu eindeutig andere  $p_j$ . Man betrachtet deshalb jede so gewonnene Datensammlung  $(\xi_j, p_j)$ , ( $j = 1, \dots, m$ ) als eine von vielen möglichen (und miteinander verträglichen) Wertetabellen für eine gewisse, zur Messreihe gehörige Funktion der reellen Variablen  $x$ . Damit hat man die **2. Standardisierung** erreicht:

**Bezeichnung:** Die zur Wertetabelle  $(\xi_j, p_j)$ , ( $j = 1, \dots, m$ ) gehörige Funktion  $z = p(x)$  heißt die **Dichtefunktion zur Messreihe**  $x_1, \dots, x_n$ . Sie wird durch die Vereinbarung

$$p(x) = 0 \text{ für alle } x\text{-Werte außerhalb von } x_{min} \leq x \leq x_{max}$$

zu einer auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Funktion erweitert.

Diese Funktion gibt entsprechende Information wie die relative Häufigkeit  $h$ , aber nicht nur unabhängig von der Anzahl  $n$  der Messungen, sondern zusätzlich auch **unabhängig von der Säulenbreite  $\Delta x$** . Den Graph zur Wertetabelle von  $z = p(x)$  skizziert man, wie bei Funktionen üblich, nicht als Säulendiagramm, sondern, indem man die Punkte  $(\xi_j | p_j)$ , ( $j = 1, \dots, m$ ) durch eine bogenförmige Linie verbindet. Wegen (7.2) gilt:

**Graph der Dichtefunktion:**

Der Graph der Dichtefunktion  $z = p(x)$  zu einer Messreihe ähnelt (bis auf den Proportionalitätsfaktor  $\frac{1}{\Delta x}$ , der einer Maßstabsänderung auf der senkrechten Achse entspricht), dem Höhenverlauf des Säulendiagramms.

**Bezeichnung:** Sei  $F(x)$  die relative Häufigkeit, mit der die Messwerte einer Messreihe einen Zahlwert  $\leq x$  haben.  $y = F(x)$  heißt die **Verteilungsfunktion** zur Messreihe. Sie ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

**Graph der Verteilungsfunktion:**

Der Graph der Verteilungsfunktion  $y = F(x)$  ist monoton wachsend, und es gilt

$$F(x) = 0 \text{ für alle } x \leq x_{min}, \quad F(x) = 1 \text{ für alle } x \geq x_{max}.$$

Ist nun  $x_{j-1} \leq x \leq x_j$  irgendein **kleines** Intervall  $I_j$ , so gilt

$$\begin{aligned} F(x_j) - F(x_{j-1}) &= \text{relative Häufigkeit, mit der Messwerte im Intervall } I_j \text{ liegen} \\ &= h_j \underset{(7.1)}{\approx} p_j \cdot (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

kurz:  $\Delta F \approx p(x) \cdot \Delta x$ .

Mit *Regel 11*<sup>4</sup> folgt hieraus die grundlegende

---

<sup>4</sup>siehe 4.3.2, S.47



**Regel 61 (Beziehung zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion):****R 61**

Die Dichtefunktion  $z = p(x)$  zu einer Messreihe ist die Ableitung der Verteilungsfunktion  $y = F(x)$  zu dieser Messreihe.

Umgekehrt ist die Verteilungsfunktion eine Stammfunktion der Dichtefunktion, genauer: Sie ist die summatorische Funktion<sup>5</sup> zu  $z = p(x)$  mit dem Anfangswert  $F(-\infty) = 0$ .

(Dabei stehe  $x_0 = -\infty$  für eine Zahl, die kleiner ist als der kleinstmögliche Messwert der Zufallsvariablen  $x$ .)

$$\text{Als Formel: } F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung<sup>6</sup>, Teil b) folgt

**Regel 62 (Relative Häufigkeit als bestimmtes Integral):****R 62**

Die relative Häufigkeit, mit der die Messungen einer Messreihe  $x_1, \dots, x_n$  einen Zahlwert im Bereich  $a \leq x \leq b$  haben ist gleich

$$F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)dx.$$

Insbesondere gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Die graphische Ausdeutung dessen lautet:

**Regel 63 (Relative Häufigkeit als Fläche):****R 63**

Die relative Häufigkeit, mit der Messwerte einer Messreihe einen Zahlwert im Bereich  $a \leq x \leq b$  haben, ist gleich der Fläche, die der Graph der Dichtefunktion  $z = p(x)$  zur Messreihe im Bereich  $a \leq x \leq b$  mit der  $x$ -Achse einschließt.

Die Fläche, die der Graph der Dichtefunktion  $z = p(x)$  mit der  $x$ -Achse insgesamt einschließt, ist gleich 1.

Von zentraler Bedeutung ist nun der

**2. Grenzwertsatz.**

Verlängert man eine Messreihe im Rahmen eines Experiments um immer mehr Messungen, d.h. lässt man  $n$  gegen Unendlich streben, und berechnet man dabei die Dichtefunktion  $z = p(x)$  und die Verteilungsfunktion  $y = F(x)$  für wachsendes  $n$  immer wieder neu, so ändern sich beide für große  $n$  immer weniger, d.h. sie streben beide gegen Grenzfunktionen.

**Bezeichnung:** Diese Grenzfunktionen werden als die Dichtefunktion  $z=p(x)$  bzw. die Verteilungsfunktion  $y=F(x)$  zum Experiment oder zur idealen Messreihe bezeichnet. Sie sind nicht mehr von der konkreten Messreihe abhängig, sondern nur noch vom Experiment.

Die für die Dichtefunktionen und Verteilungsfunktionen zu empirischen Messreihen geltenden Eigenschaften und Zusammenhänge übertragen sich beim Prozess  $n \rightarrow \infty$  auch auf die Grenzfunktionen, d.h.:

<sup>5</sup>siehe 6.3, S.135

<sup>6</sup>siehe 6.4, S.125

- Die Verteilungsfunktion  $y = F(x)$  zu einem Experiment ist stets monoton wachsend, und es gilt

$$F(x) = 0 \text{ für alle } x \leq x_{min}, \quad F(x) = 1 \text{ für alle } x \geq x_{max}.$$

- Die Dichtefunktion  $z = p(x)$  zu einem Experiment ist die Ableitung der Verteilungsfunktion  $y = F(x)$  zu diesem Experiment. Umgekehrt ist die Verteilungsfunktion  $y = F(x)$  zum Experiment eine Stammfunktion der Dichtefunktion  $z = p(x)$  zu diesem Experiment, genauer: Sie ist die summatorische Funktion<sup>7</sup> zu  $z = p(x)$  mit dem Anfangswert  $F(-\infty) = 0$ . (Dabei stehe  $x_0 = -\infty$  für eine Zahl, die kleiner ist als der kleinstmögliche Messwert der Zufallsvariablen  $x$ .)

Als Formel: 
$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt.$$

- Die Fläche, die der Graph der Dichtefunktion  $z = p(x)$  zu einem Experiment mit der  $x$ -Achse insgesamt einschließt, ist stets = 1.

Die Unabhängigkeit der Dichte- und der Verteilungsfunktion eines Experiments von der Empirie gestattet es nun, aus dem an die empirische Messreihe gebundenen Begriff der relativen Häufigkeit den von der Empirie unabhängigen Begriff der Wahrscheinlichkeit zu entwickeln und Wahrscheinlichkeiten auch **zu berechnen**:

**Bezeichnung:** Die relative Häufigkeit, mit der Messungen der idealen Messreihe ( $n$  mindestens vierstellig) zu einem Experiment Messwerte im Bereich  $a \leq x \leq b$  liefern, heißt die **Wahrscheinlichkeit** dafür, dass eine Messung der Zufallsvariablen  $x$  im Rahmen dieses Experiments einen Messwert im Bereich  $a \leq x \leq b$  liefert.

Schreibweise: 
$$P(a \leq x \leq b) \quad \text{oder} \quad P_{a \leq x \leq b}.$$

Für  $P(-\infty \leq x \leq b)$  schreibt man abkürzend  $P(x \leq b)$ , für  $P(a \leq x \leq \infty)$  schreibt man kürzer auch  $P(a \leq x)$ .

**Regel 64 (Berechnung von Wahrscheinlichkeiten):**

**R 64**

Ist  $z = p(x)$  die Dichtefunktion und  $y = F(x)$  die Verteilungsfunktion zu einem Experiment und sind  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$ , so läßt sich die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq x \leq b)$  wahlweise wie folgt berechnen:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)dx \quad \text{oder auch} \quad P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a).$$

Graphisch ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq x \leq b)$  ist die Fläche, die der Graph der Dichtefunktion zum Experiment im Bereich  $a \leq x \leq b$  mit der  $x$ -Achse einschließt.

---

<sup>7</sup>siehe 6.3, S.135

### 7.4 Die drei wichtigsten Typen von Zufallsvariablen

Eine Messreihe zu einer Variablen  $x = f(u_1, \dots, u_k)$ , bei der im Rahmen eines Experiments alle  $u_1, \dots, u_k$  auf vorgeschriebenen Werten konstant gehalten werden und gar keine variablen Einflussgrößen  $v_1, v_2, \dots$  im Spiel sind (wo also  $x$  gar **keine Zufallsvariable** ist), wird zwangsläufig  $n$  identische Messwerte  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$  (const.) liefern.

Diese Messreihe hat die statistischen Daten  $n, \bar{x} = c, s = 0$  und die Verteilungsfunktion

$$y = F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < c, \\ 1 & c \leq x < \infty. \end{cases}$$

Für die Dichtefunktion  $z = p(x)$  als Ableitung von  $y = F(x)$  erhalten wir  $p(x) = F'(x) = 0$  für alle  $x \neq c$  und  $p(c)$  nicht definiert bzw. " $= \infty$ ", weil  $F$  an der Stelle  $c$  einen senkrechten Sprung nach oben hat. Und da diese Ergebnisse für wachsende Werte von  $n$  stets gleich bleiben, hat die ideale Messreihe zu diesem Experiment die statistischen Daten  $n = \infty, \hat{x} = c, \sigma = 0$  und die Verteilungsfunktion und Dichtefunktion sind wie oben.

Spielen hingegen noch variable Einflussgrößen  $v_1, v_2, \dots$  bei der Messreihe zum Experiment mit, d.h. ist  $x = f(u_1, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots)$  wirklich **eine Zufallsvariable**, so schwanken die Messwerte  $x_1, \dots, x_n$  um den Wert  $c$  herum, auch der Mittelwert  $\bar{x}$  schwankt etwas (wenn auch weniger als die Einzelmessungen) um  $c$  herum, und man erhält eine empirische Streuung  $s > 0$ . Die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion nehmen nicht nur, wie oben, zwei Werte an (0 und  $\infty$  die Dichtefunktion, 0 und 1 die Verteilungsfunktion), sie ändern sich auch zunächst mit wachsendem  $n$ , ehe sie gegen ihre Grenzfunktionen streben, welche ebenfalls mehr als zwei Werte annehmen. Nur der Erwartungswert ist nach wie vor  $\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = c$ .

**Merke:** Bei einem Experiment zur Messung einer Zufallsvariablen

$$x = f(u_1, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots)$$

sind die konstant gehaltenen  $u_1, \dots, u_k$  kausal verantwortlich für die Größe des Erwartungswertes  $\hat{x}$ . (Dieser heißt auch das Ergebnis des Experiments.) Die variabel gehaltenen  $v_1, v_2, \dots$  hingegen sind kausal verantwortlich für die Streuung  $\sigma$  sowie für den Kurvenverlauf der Dichtefunktion  $y = p(x)$  und damit auch der Verteilungsfunktion  $y = F(x)$  zum Experiment.

In der Empirie treten bei der Messung von Zufallsvariablen  $x$  vor allem **drei wichtige Typen** von Dichtefunktionen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen auf, und zwar **je nachdem, von welchem Datentyp** die Messdaten  $x_1, \dots, x_n$  der Messreihe sind, d.h. in welchem Wertebereich sie variieren:

- $x_i \in \mathbb{R}$  (mit Nachkommastellen) : Bei Instrumentenmessungen, beim Ablesen von Messskalen  $\rightsquigarrow$  **Normalverteilung**,
- $x_i \in \mathbb{Z}$  (ganzzahlig): Hier unterscheidet man noch
  - a) Auszählung von  $k$  Partikeln u.ä. in einem räumlichen oder zeitlichen Kontinuum  $\rightsquigarrow$  **Poissonverteilung**,
  - b) Auszählung von  $k$  positiven Befunden innerhalb einer endlichen Menge von  $n$  Personen oder Ereignissen  $\rightsquigarrow$  **Binomialverteilung**.  
Dabei können seltene Befunde auch unter a) behandelt werden.