Anhang A

Gebrauchsanleitung für logarithmisches Papier

A.1 Die Lage der $\ln x$-Werte auf der senkrechten Achse

Errechnet man eine Wertetabelle der Funktion $y = \ln x$ für die Werte $x = 1, 2, \ldots, 10$, so erhält man (auf 2 Nachkommastellen gerundet):

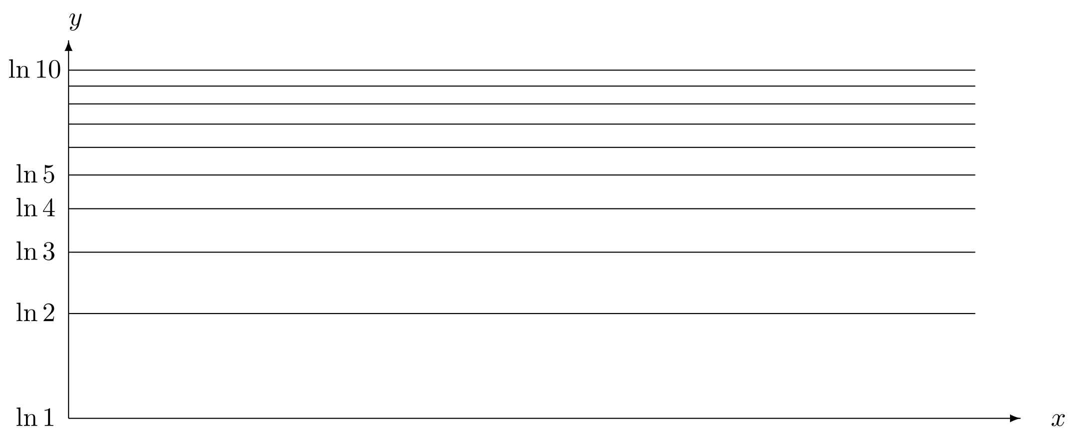
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	0.00	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20	2.30

Man sieht, wie der Abstand zweier aufeinander folgender ln-Werte in dieser Tabelle immer kleiner wird. Skizziert man in einem normalen rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem die zehn horizontalen Geraden

$$y = \ln 1, \quad y = \ln 2, \quad y = \ln 3, \quad \ldots \quad y = \ln 10,$$

so erhält man das folgende charakteristische

logarithmische Streifenmuster für die y-Achse:



Die Bandbreite B (Höhe) dieses logarithmischen Streifenmusters ist

$$B = \ln 10$$

Ist $a \in \mathbb{R}$ irgendeine Zahl im Bereich $1 \leq a < 10$, so lässt sich die Lage von $\ln a$ zwischen $\ln 1 = 0$ und $\ln 10 \approx 2.30$ auf der senkrechten Achse mittels dieser Hilfslinien recht gut lokalisieren, ohne dass man den Zahlwert von $\ln a$ zuvor ausrechnen muss.
(Üblicherweise bereichert man das logarithmische Streifenmuster noch um (dünner eingetragene) Linien für $y = \ln 1.1 \quad y = \ln 1.2 \quad \ldots \quad y = \ln 1.9$ und weitere Hilfslinien.)

Jede **positive** reelle Zahl z lässt sich schreiben in dem Format

$$z = a \cdot 10^k, \qquad \text{mit } 1 \leq a < 10 \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel: $3781.9 = 3.7819 \cdot 10^3$
$12.568 = 1.2568 \cdot 10^1$
$\pi \approx 3.1416 \cdot 10^0$
$0.07635 = 7.635 \cdot 10^{-2}$

Nach den Rechenregeln für Logarithmen gilt

$$z = a \cdot 10^k \Longrightarrow \ln z = \ln a + k \cdot \ln 10$$

Das bedeutet wegen $B = \ln 10$ graphisch:
Hat man die Lage von $\ln a$ mittels eines logarithmischen Streifenmusters gefunden, so erhält man die Lage von $\ln z = \ln(a \cdot 10^k)$ durch Parallelverschiebung um den Wert $k \cdot B$ (das ist eine Verschiebung nach oben, wenn k positiv ist, nach unten, wenn k negativ ist).

Setzt man nun mehrere logarithmische Streifenmuster optisch aneinander, indem man die oberste horizontale Linie des einen Streifens mit der untersten horizontalen Linie des nächsten Streifens identifiziert, so folgt hieraus:

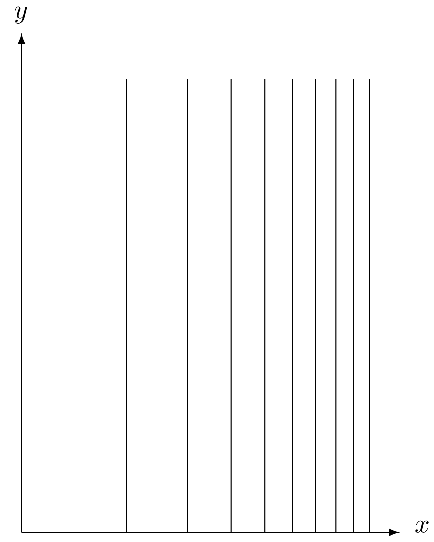
Regel 1: Innerhalb eines logarithmischen Streifenmuster liegen die *ln*-Werte aller Zahlen der Bauart $z = a \cdot 10^k$ mit demselben k und unterschiedlichem $1 \leq a < 10$.

Regel 2: Ist ein logarithmisches Streifenmuster der y-Achse für alle Zahlen $z = a \cdot 10^k$ mit einem festen Wert von k reserviert, so ist das nächsthöhere logarithmische Streifenmuster für alle Zahlen $z = a \cdot 10^{k+1}$ reserviert und das nächstniedrigere Streifenmuster für alle Zahlen $z = a \cdot 10^{k-1}$.

A.2 Die Lage der ln-Werte auf der waagerechten Achse

Ganz analog kann man auf der waagerechten Achse die Lage von ln-Werten finden, ohne diese zuvor berechnet zu haben, indem man die x-Achse mit logarithmischen Streifenmustern versieht. Die Hilfslinien verlaufen dann nicht waagerecht, sondern senkrecht, und mehrere Streifenmuster sind dann nicht von unten nach oben, sondern von links nach rechts angeordnet.

logarithmisches Streifenmuster für die x-Achse:



Wieder gilt Regel 1. In Analogie zu Regel 2 gilt

Regel 3: Ist ein logarithmisches Streifenmuster der x-Achse für alle Zahlen $z = a \cdot 10^k$ mit einem festen Wert von k reserviert, so ist das rechts benachbarte logarithmische Streifenmuster für alle Zahlen $z = a \cdot 10^{k+1}$ reserviert und das links benachbarte Streifenmuster für alle Zahlen $z = a \cdot 10^{k-1}$.

A.3 Die zwei Sorten von logarithmischem Papier und ihr Zweck

A.3.1 Halblogarithmisches Papier

Eine Achse ist mit einer üblichen Millimeterpapier-Einteilung versehen, die andere mit logarithmischen Streifenmustern.

Häufigster Verwendungszweck: Test auf allgemeine Exponentialfunktion
Gegeben ist eine Wertetabelle für zwei Variable x und y, und es soll graphisch getestet werden, ob, ja oder nein, y als Funktion von x eine allgemeine Exponentialfunktion ist, d.h. ob gilt $y = y_0 \cdot e^{cx}$ mit irgendwelchen unbekannten Konstanten y_0 und c.
Charakteristisch hierfür ist, dass die Punkte $(x|\ln y)$ ungefähr auf einer Geraden liegen[1] (nicht auf einem Bogen), was mit Linealtest zu entscheiden ist[2] .
Ohne logarithmisches Papier muss man so verfahren, dass man zunächst die $\ln y$-Werte berechnet, dann selber ein normales äquidistantes Koordinatensystem zeichnet und die Punkte $(x|\ln y)$ darin einträgt.
Mit halblogarithmischem Papier geht dieser Test viel schneller: Man braucht nichts zu rechnen und verwendet ein schon vorgedrucktes Koordinatensystem wie folgt:

[1]siehe *Regel 33* in 5.5.1, S.82
[2]siehe 3.1.5, S.23

Man nimmt die millimeter-skalierte Achse als die waagerechte Achse, die logarithmisch skalierte Achse als senkrechte Achse und beschriftet sie gemäß den Regeln 4 und 7 (s.u., S.206).

> Nun liest man einfach die Punkte $(x|y)$ aus der Wertetabelle ab. Bei der Übertragung[3] in das halblogarithmische Papier entstehen, dank der besonderen Hilfslinien, automatisch die Punkte Punkte $(x|\ln y)$. Diese sollten auf einer Geraden liegen.

Weiterer Verwendungszweck: Test auf allgemeine Logarithmusfunktion
Gegeben ist eine Wertetabelle für zwei Variable x und y, und es soll graphisch getestet werden, ob, ja oder nein, y als Funktion von x eine allgemeine Logarithmusfunktion ist, d.h. ob gilt $y = A + B \cdot \ln x$ mit irgendwelchen unbekannten Konstanten A und B.
Charakteristisch hierfür ist, dass die Punkte $(\ln x|y)$ ungefähr auf einer Geraden liegen (nicht auf einem Bogen), was mit Linealtest zu entscheiden ist[4] .
Ohne logarithmisches Papier muss man so verfahren, dass man zunächst die $\ln x$-Werte berechnet, dann selber ein normales äquidistantes Koordinatensystem zeichnet und die Punkte $(\ln x|y)$ darin einträgt.
Mit halblogarithmischem Papier geht dieser Test viel schneller: Man braucht nichts zu rechnen und verwendet ein schon vorgedrucktes Koordinatensystem wie folgt:
Man nimmt die logarithmisch skalierte Achse als die waagerechte Achse, die millimeter-skalierte Achse als senkrechte Achse und beschriftet sie gemäß den Regeln 4 und 7 (s.u., S.206).

> Nun liest man einfach die Punkte $(x|y)$ aus der Wertetabelle ab. Bei der Übertragung[5] in das halblogarithmische Papier entstehen, dank der besonderen Hilfslinien, automatisch die Punkte Punkte $(\ln x|y)$. Diese sollten auf einer Geraden liegen.

A.3.2 Doppeltlogarithmisches Papier

Beide Achsen sind mit logarithmischen Streifenmustern versehen.

Einziger Verwendungszweck: Test auf allgemeine Potenzfunktion
Gegeben ist eine Wertetabelle für zwei Variable x und y, und es soll graphisch getestet werden, ob, ja oder nein, y als Funktion von x eine allgemeine Potenzfunktion ist, d.h. ob gilt $y = a \cdot x^b$ mit irgendwelchen unbekannten Konstanten a und b.
Charakteristisch hierfür ist, dass die Punkte $(\ln x|\ln y)$ ungefähr auf einer Geraden liegen[6] (nicht auf einem Bogen), was mit Linealtest zu entscheiden ist[7] .
Ohne logarithmisches Papier muss man so verfahren, dass man zunächst die $\ln x$-Werte und die $\ln y$-Werte berechnet, dann selber ein normales äquidistantes Koordinatensystem zeichnet und die Punkte $(\ln x|\ln y)$ darin einträgt.
Mit doppeltlogarithmischem Papier geht dieser Test viel schneller: Man braucht nichts zu rechnen und verwendet ein schon vorgedrucktes Koordinatensystem wie folgt: Man beschriftet <u>beide logarithmischen Achsen gemäß</u> den Regeln 4 und 7 (s.u., S.206).

[3] Details siehe unten, Regel 8, S.207
[4] siehe 3.1.5, S.23
[5] Details siehe unten, Regel 8, S.207
[6] siehe *Regel 41* in 5.9.1, S.98
[7] siehe 3.1.5, S.23

Dann liest man einfach die Punkte $(x|y)$ aus der Wertetabelle ab. Bei der Übertragung[8] in das doppeltlogarithmische Papier entstehen, dank der besonderen Hilfslinien, automatisch die Punkte $(\ln x|\ln y)$. Diese sollten auf einer Geraden liegen.

Ist mit logarithmischem Papier ein graphischer Test erfolgreich verlaufen, der Funktionstyp also erkannt worden, und sollen nun darüber hinaus die Konstanten in der Berechnungsformel für y als Funktion von x ausgerechnet werden, so müssen alle einschlägigen ln-Werte nachträglich doch noch berechnet werden. Anleitung dazu siehe die Schritte 4 bis 6 in Anhang B, S.210ff.

A.4 Zum praktischen Umgang mit logarithmischem Papier

Beim praktischen Gebrauch von halb- und doppeltlogarithmischem Papier sind folgende Besonderheiten zu beachten:

Regel 4: (Format der Skalen-Beschriftung) Da, wo auf einer logarithmisch skalierten Achse $\ln a \cdot 10^k$ lokalisiert ist, schreibt man an die Achse einfach $a \cdot 10^k$. Also statt $\ln 1$, $\ln 10$, $\ln 100$ usw. schreibt man einfach 1, 10, 100 usw. Daraus folgt:

Regel 5: (Ablesen eines Punktes aus dem Papier) Liest man von einem beliebigen Punkt des Spezialpapiers seine Koordinaten an den beschrifteten Achsen ab, so erhält man nicht die halb- oder doppeltlogarithmischen Zahlwerte, sondern das Wertepaar (x, y), welches in der **ursprünglichen Wertetabelle** zu diesem Punkt gehören würde.

Regel 6: (Verbot der Null) Auf einer logarithmisch skalierten Achse darf nirgends die Beschriftung "0" erscheinen, da $\ln 0$ nicht existiert. Insbesondere folgt: Auf halb- und doppeltlogarithmischem Papier gibt es keinen Punkt für den Ursprung $(x|y) = (0|0)$. Dasselbe Verbot gilt für negative Werte.

Regel 7: (Einteilung der Achsen) Während man auf einer Achse mit normaler Millimeterpapier-Skalierung jede Freiheit hat, wie man die vorgegebene Einteilung verwendet, etwa für Schrittlängen $0 \quad 0{,}01 \quad 0{,}02$ usw. oder $0 \quad 5 \quad 10 \quad 15$ usw. oder $600 \quad 800 \quad 1000 \quad 1200$ usw., **hat man bei der Verwendung einer logarithmisch skalierten Achse keinerlei Wahlfreiheit:**

Enthält die ursprüngliche Wertetabelle eine Rubrik mit Zahlen $z_1, \ldots, z_n$, und sollen die Werte $\ln z_i$ die 1. oder 2. Koordinate von Punkten im graphischen Test bilden, so geht man wie folgt vor (gemäß Regel 2 und 3):

1. Schritt: Man bestimmt zunächst die kleinste **positive** Zahl in der Rubrik, sie heiße z_i (meist ist dies die erste oder letzte in der Rubrik). (Wertepaare mit $z_i = 0$ werden beim graphischen Test weggelassen!)

2. Schritt: Man schreibt diese kleinste Zahl in der Form

$$z_i = a \cdot 10^n \quad \text{mit } 1 \le a < 10.$$

[8] Details siehe unten, Regel 8, S.207

3. Schritt: Nun schreibt man bei der entsprechenden logarithmischen Achse (1. Koordinate = waagerechte Achse, 2. Koordinate = senkrechte Achse) an die 1. Linie des 1. logarihmischen Streifens $1 \cdot 10^n$ (wahlweise als Dezimalzahl), an die 2. Linie des 1. logarithmischen Streifens $2 \cdot 10^n$ (wahlweise als Dezimalzahl), usw.
An die 1. Linie des 2. logarithmischen Streifens schreibt man $1 \cdot 10^{n+1}$, an die 2. Linie des 2. logarithmischen Streifens $2 \cdot 10^{n+1}$ usw.
An die 1. Linie des 3. logarithmischen Streifens schreibt man $1 \cdot 10^{n+2}$, an die 2. Linie des 3. logarithmischen Streifens $2 \cdot 10^{n+2}$ usw.

Regel 8: (Übertragung eines Punktes aus der Wertetabelle in das logarithmische Papier) Sind die Achsen fertig beschriftet, so bestimmt man zu einem gegebenen Wertepaar (x, y) aus der Tabelle die Lage des Punktes $(x|\ln y)$ in halblogarithmischem Papier wie folgt: Die x-Koordinate findet man gemäß der selbstgewählten Skalierung auf der waagerechten (normalen) Achse. Die $\ln y$-Koordinate findet man so:
1. Man bringt die Zahl y zunächst auf das Format $y = a \cdot 10^k$ (mit $1 \leq a < 10$).
2. Anhand des Exponenten k findet man auf der senkrechten Achse den zugehörigen logarithmischen Streifen.
3. In diesem Streifen wählt man die zur Zahl a gehörige Hilfslinie für die Lage von $\ln a$. Auf dieser Linie liegt, mit entsprechender x-Koordinate, der einzutragende Punkt $(x|\ln y)$.
Analog positioniert man die Punkte $(\ln x|y)$ und $(\ln x|\ln y)$ in entsprechend skaliertem halb- bzw. doppeltlogarithmischem Papier.

Beispiel:
Die zur Funktion $y = 0,4 \cdot x^2$ gehörige Wertetabelle

x	0,5	1	2	4	5	10
y	0.1	0,4	1,6	6,4	10	40

wird auf den beiden nachfolgenden Seiten zuerst in ein Blatt halblogarithmisches Papier (die senkrechte Achse mit logarithmischer Skalierung) und danach in ein Blatt doppeltlogarithmisches Papier eingetragen.
Benutzte Skalierung:
Auf dem halblogarithmischen Papier wurde die waagerechte Achse äquidistant mit den Werten 0 1 2 3...20 belegt, auf der senkrechten Achse wurde das erste, unterste logarithmische Streifenmuster für die Werte 0,1 bis 1 verwendet, das zweite darüber für die Werte 1 bis 10, das dritte und oberste für die Werte 10 bis 100.
Auf dem doppeltlogarithmischen Papier wurde auf der waagerechten Achse das erste, linke logarithmische Streifenmuster für die Werte 0,1 bis 1 verwendet, das zweite, rechts danebenliegende für die Werte 1 bis 10. Die Skalierung der senkrechten Achse ist die gleiche wie beim halblogarithmischen Papier.
Eine über den Vordruck hinausgehende Beschriftung der Achsen wurde nicht vorgenommen.

Da es sich um eine allgemeine Potenzfunktion handelt, liegen die Punkte im doppeltlogarithmischen Papier auf einer Geraden (positives Testergebnis), im halblogarithmischen nicht(negatives Testergebnis).

Abbildung A.1: Halblogarithmisches Papier:

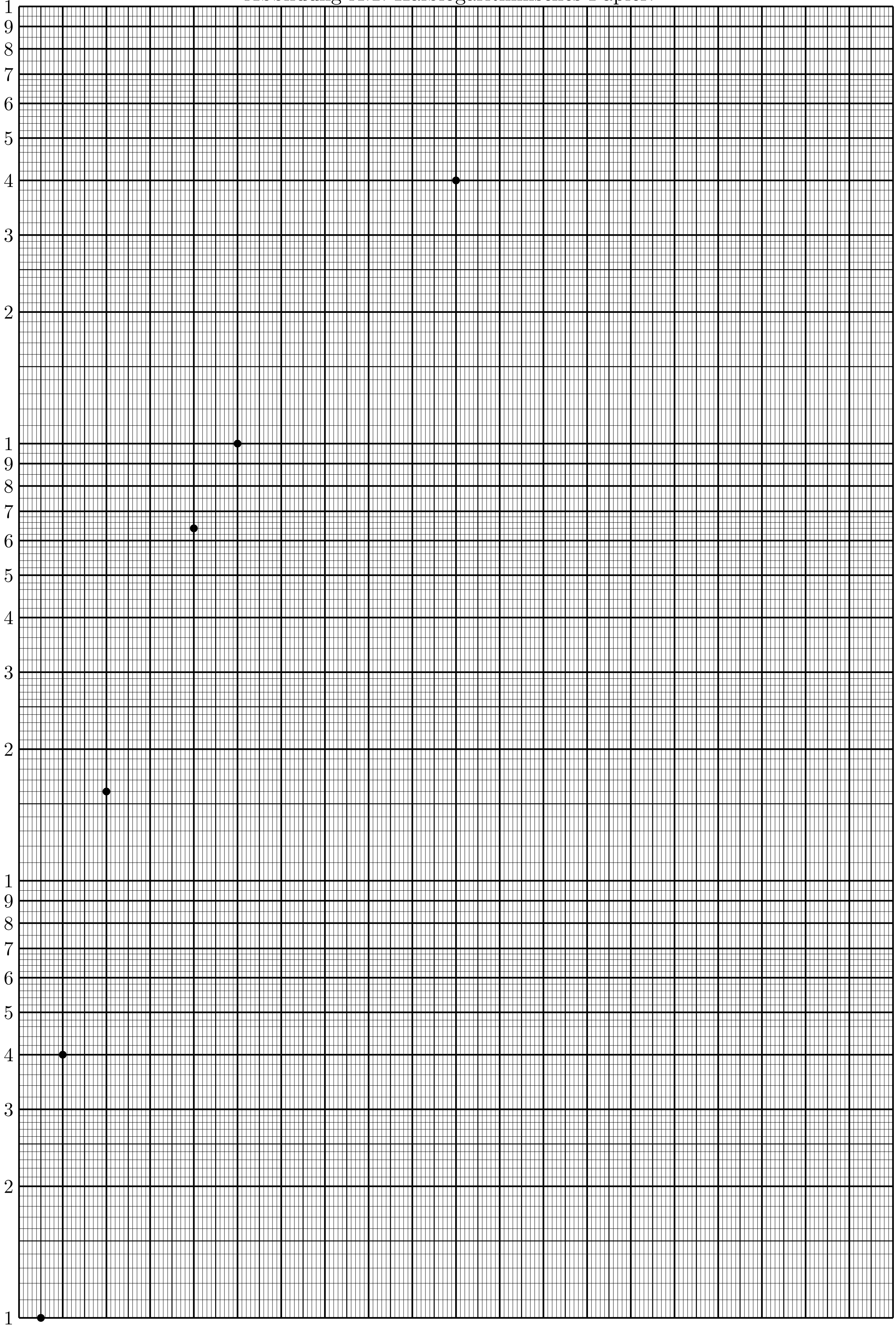


Abbildung A.2: Doppeltlogarithmisches Papier: