Anhang D

Systematik mathematischer Funktionen

Elementare Funktionen

Elementare Urfunktion = **Proportionalität**:	$y = c \cdot x$	c = Proportionalitätskonstante
$\downarrow$		
Familie der Geraden:	$\Delta y = c \cdot \Delta x$ für alle Δx	c = konstante Steigung
$\downarrow$		
Ableitung y':	$\Delta y \approx y' \cdot \Delta x$ für kleine Δx	y' = variable Steigung
$\downarrow$		
Natürliche Wachstums/Abbau- gesetze:	$y' = c \cdot y$	c = spezifische Wachstums/Abbau- Konstante (= konstante momentane relative Änderungsrate)
$\downarrow$		

Nichtelementare Funktionen

Nichtelementare Urfunktion = **Exponentialfunktion:**	$y = \exp(x)$ bzw. $y = e^x$	

D.1 ln-abhängige Funktionen	**D.2** Winkelfunktionen und Verwandte	**D.3** Statistische Funktionen

D.1 *ln*-abhängige Funktionen

Abkömmling:	Pfeil
Umkehrfunktion:	punktierter Pfeil

$y = \exp(x)$

$y = \ln x$

Familie der allgemeinen Exponentialfunktionen:
$y = y_0 \cdot a^x$
speziell: $y = 10^x$

Familie der allgemeinen Potenzfunktionen:
$y = a \cdot x^b \quad (b \in \mathbb{R})$
speziell: $y = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Familie der Logarithmen:
$y = \log_a(x)$
speziell: $y = \lg x$

Familie der Wurzelfunktionen:
$y = x^{1/b}$
speziell $y = \sqrt[n]{x}$

Berechnungsformeln mittels *exp* und *ln* :

Allgemeine Exponentialfunktion:	$y = y_0 \cdot a^x$	$= y_0 \cdot \exp(\ln a \cdot x)$
speziell:	$y = 10^x$	$= \exp(\ln 10 \cdot x)$
Logarithmus zur Basis a:	$y = \log_a x$	$= \dfrac{1}{\ln a} \cdot \ln x$
speziell:	$y = \lg x$	$= \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \ln x$
Allgemeine Potenzfunktion:	$y = a \cdot x^b$	$= a \cdot \exp(b \cdot \ln x)$
Wurzelfunktion:	$y = x^{1/b}$	$= \exp\left(\dfrac{\ln x}{b}\right)$
speziell:	$y = \sqrt[n]{x}$	$= \exp\left(\dfrac{\ln x}{n}\right)$

Für alle in D.1 genannten Funktionenklassen gibt es Verfahren, von der Wertetabelle zur Berechnungsformel zu kommen mittels graphischer Tests und Linearer Regression (siehe B, S.210 ff).

D.2 Winkelfunktionen und Verwandte

Abkömmling:	Pfeil
Umkehrfunktion:	punktierter Pfeil

$$
\begin{tikzcd}
 & & & y=\exp(x) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & y=\sin x,\ y=\cos x \arrow[dl, dotted] \arrow[dr] & & & & y=\sinh x,\ y=\cosh x \arrow[dl, dotted] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{l} y=\arcsin x, \\ y=\arccos x \end{array} & & \begin{array}{l} y=\tan x, \\ y=\cot x \end{array} \arrow[d, dotted] & & \begin{array}{l} y=\mathrm{Arsinh}\, x, \\ y=\mathrm{Arcosh}\, x \end{array} & & \begin{array}{l} y=\tanh x, \\ y=\coth x \end{array} \arrow[d, dotted] \\
 & & \begin{array}{l} y=\arctan x, \\ y=\mathrm{arccot}\, x \end{array} & & & & \begin{array}{l} y=\mathrm{Artanh}\, x, \\ y=\mathrm{Arcoth}\, x \end{array}
\end{tikzcd}
$$

Berechnungsformeln mittels *exp* (und komplexer Zahlen):[1]

$$
\begin{array}{lll}
\text{Sinus:} & \sin x & = \dfrac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i} \\
\text{Cosinus:} & \cos x & = \dfrac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} \\
\text{Tangens:} & \tan x & = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{\exp(ix)+\exp(-ix)} \\
\text{Cotangens:} & \cot x & = i\cdot\dfrac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{\exp(ix)-\exp(-ix)} \\
\text{Sinus hyperbolicus:} & \sinh x & = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \\
\text{Cosinus hyperbolicus:} & \cosh x & = \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \\
\text{Tangens hyperbolicus:} & \tanh x & = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)} \\
\text{Cotangens hyperbolicus:} & \coth x & = \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{\exp(x)-\exp(-x)}
\end{array}
$$

[1] siehe 5.11.5, S.123 ff

D.3 Statistische Funktionen

Normalverteilung

Glockenfunktion (Dichtefunktion

zur $N(\mu;\sigma)$-Normalverteilung): $y = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

speziell: Gauß-Glocke: $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$N(\mu;\sigma)$-Normalverteilung: $P(x \le a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

speziell: Gauß'sche Φ-Funktion: $y = \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

Poissonverteilung

Dichtefunktion: $p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$

Verteilungsfunktion: $P(k \le a) = \sum_{k=0}^{a} p_\lambda(k) = \left(\sum_{k=0}^{a} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \cdot \exp(-\lambda)$

Die Dichtefunktion der **Binomialverteilung**

$$p_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und die zugehörige Verteilungsfunktion

$$P(k \le a) = \sum_{k=0}^{a} p_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

sind auf vielfältige Weise mit der Exponentialfunktion verbunden:

- Nach der *1. Grenzwertregel für die Binomialverteilung* [2] strebt die Dichtefunktion $p_{n,p}(k)$ für $p \le 0,01$ und große n (n mindestens dreistellig) gegen die Dichtefunktion $p_\lambda(k)$ der Poissonverteilung (wobei $\lambda = p \cdot n$).
- Nach der *2. Grenzwertregel für die Binomialverteilung* [3] strebt die Verteilungsfunktion $P(k \le a) = \sum_{k=0}^{a} p_{n,p}(k)$ für $n > \frac{9}{p(1-p)}$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sigma}\right)$ der $N(\lambda;\sigma)$-Normalverteilung (wobei $\lambda = p \cdot n$ und $\sigma = \sqrt{p \cdot (1-p) \cdot n}$).

[2] siehe Regel 79, 9.3.3, S.188
[3] siehe Regel 81, 9.3.4, S.190

- Für die in den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ auftretende

  $$\textbf{Fakultät} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

  gibt es eine berühmte Schätzformel, die besonders für sehr große n benutzt wird:

  Stirling'sche Formel:

  $$\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot \exp(-n) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot \exp(-n) \cdot \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

- Außerdem gibt es eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion, welche für alle reellen Zahlen x (auch für negative!) definiert ist und für alle natürlichen Zahlen n gerade den Wert $n!$ annimmt (man nennt diese Funktion "**Verallgemeinerung der Fakultät**"), nämlich

  $$y = x \cdot \Gamma(x)$$

  mit der berühmten

  $$\textbf{Gammafunktion} \quad \Gamma(x) = \lim_{N \to \infty} \int_0^N \exp\big((x-1)\ln t - t\big) dt$$