Chapitre 1

ESPACES DE HILBERT

Dans tout ce qui suit F est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou complexes.

Version du 26 juin 2004

1.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires

DEFINITION 1 Soient F, G, H des espaces vectoriels. Une application $T : F \longrightarrow G$ est dite *linéaire* , respectivement *semi-linéaire* , si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\varphi, \psi \in F$, on a

$$T(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot T\varphi \quad \text{, respectivement} \quad T(\alpha \cdot \varphi) = \overline{\alpha} \cdot T\varphi$$

et

$$T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi \ .$$

On dit qu'une une application $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est *bilinéaire* si elle est séparément linéaire, et *sesquilinéaire (à gauche* , respectivement *à droite* s'il faut préciser) si elle est semi-linéaire en la première variable, respectivement en la seconde, et linéaire en l'autre.

Une application bilinéaire ou sesquilinéaire (à gauche) à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite une *forme* bilinéaire ou sesquilinéaire.

Soit $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire. On dit qu'elle est

(a) *hermitienne* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \overline{\mathfrak{s}(\psi, \varphi)} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ ,$$

(b) *positive* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

et

(c) *non-dégénérée* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in F \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0$$

et

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \quad \Longrightarrow \quad \psi = 0 \ .$$

Une forme hermitienne positive non-dégénérée s'appelle un *produit scalaire* .

On a tout d'abord la

PROPOSITION (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si $\mathfrak{s}$ est une forme hermitienne positive sur F , alors*

$$|\mathfrak{s}(\varphi, \psi)|^2 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \quad \textit{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

Pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi + \alpha \cdot \psi, \varphi + \alpha \cdot \psi) = \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) + \alpha \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \overline{\alpha} \cdot \mathfrak{s}(\psi, \varphi) + |\alpha|^2 \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \ .$$

Si $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) = \mathfrak{s}(\psi,\psi) = 0$, alors en prenant $\alpha := -\overline{\mathfrak{s}(\varphi,\psi)}$, on obtient $-2 \cdot |\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2 \geqslant 0$, donc $\mathfrak{s}(\varphi,\psi) = 0$. En échangeant au besoin φ et ψ , nous pouvons supposer que $\mathfrak{s}(\psi,\psi) \neq 0$. On prend alors

$$\alpha := -\frac{\overline{\mathfrak{s}(\varphi,\psi)}}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)}$$

et il vient

$$0 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) - \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} - \frac{\mathfrak{s}(\varphi,\psi) \cdot \mathfrak{s}(\psi,\varphi)}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} + \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} = \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) - \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} ,$$

d'où l'inégalité. □

DEFINITION 2 Une fonctionnelle $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est dite

(a) *positivement homogène* si

$$p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \varphi \in F ,$$

(b) *absolument homogène* si

$$p(\alpha \cdot \varphi) = |\alpha| \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \varphi \in F ,$$

et

(c) *sous-additive* si

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F .$$

On dit que p est une *semi-norme* si p est à valeur dans $\mathbb{R}_+$, absolument homogène et sous-additive ; on dit que c'est une *norme* si en plus elle est

(d) *séparante*

$$p(\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F .$$

Dans ce cas on dit que F est un espace *semi-normé* , respectivement *normé* .

Pour les propriétés élémentaires des espaces normés le lecteur est prié de consulter le cours d'Analyse [17], § 10.1 à 10.7. La continuité d'une application linéaire entre espaces normés est caractérisée dans le paragraphe 11.8 du même cours. Nous généraliserons ces notions plus tard (cf. 2.1 - 2.2 et 3.1 - 3.2).

PROPOSITION (Inégalité de Minkowsky) *Si $\mathfrak{s}$ est une forme hermitienne positive sur F , alors*

$$\varphi \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} : F \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une semi-norme sur F .

Il nous suffit de prouver la sous-additivité. Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\mathfrak{s}(\varphi+\psi,\varphi+\psi) = \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + \mathfrak{s}(\varphi,\psi) + \mathfrak{s}(\psi,\varphi) + \mathfrak{s}(\psi,\psi) =$$

$$= \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\varphi,\psi) + \mathfrak{s}(\psi,\psi) \leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot |\mathfrak{s}(\varphi,\psi)| + \mathfrak{s}(\psi,\psi) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot [\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) \cdot \mathfrak{s}(\psi,\psi)]^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{s}(\psi,\psi) = \left[\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{s}(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}}\right]^2 ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 L'égalité

$$\mathfrak{s}(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)+2\cdot\operatorname{Re}\mathfrak{s}(\varphi,\psi)+\mathfrak{s}(\psi,\psi)$$

nous sera souvent utile par la suite.

THEOREME *Soit $\mathfrak{s}$ une forme hermitienne positive sur F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{s}$ *est non-dégénérée, i.e. un produit scalaire.*

(ii) $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)>0$ *pour tout* $\varphi\in F\setminus\{0\}$.

(iii) $\varphi\longmapsto\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}}:F\longrightarrow\mathbb{R}$ *est une norme sur* F .

Les conditions (ii) et (iii) sont évidemment équivalentes et (ii) entraîne (i). Réciproquement si $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)=0$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2\leqslant\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)\cdot\mathfrak{s}(\psi,\psi)=0\ ,$$

donc $\varphi=0$, puisque $\mathfrak{s}$ est non-dégénérée. □

REMARQUE 2 Un produit scalaire est en général noté $(\cdot|\cdot)$. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme associée, i.e.

$$\|\varphi\|^2:=(\varphi|\,\varphi)\ ,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$|(\varphi|\,\psi)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|\psi\|\quad\text{pour tout }\varphi,\psi\in F\ .$$

En adaptant la démonstration de la continuité de la multiplication dans $\mathbb{K}$ (cours d'Analyse [17], théorème 5.5.iii), on montre facilement que le produit scalaire

$$(\cdot|\cdot):F\times F\longrightarrow\mathbb{K}:(\varphi,\psi)\longmapsto(\varphi|\,\psi)$$

est (globalement) continu (cf. exemple 2.4). La proposition 2.4 généralise ce résultat.

REMARQUE 3 Pour qu'on ait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il faut et il suffit que φ et ψ soient linéairement dépendants.

Nous redémontrons en même temps l'inégalité. Nous pouvons supposer que $\|\varphi\|=1$ en remplaçant au besoin φ par $\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$. On a alors

$$0\leqslant\|\psi-(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi\|^2=(\psi-(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi|\,\psi-(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi)=\|\psi\|^2-|(\varphi|\,\psi)|^2\ ,$$

donc l'inégalité. On a l'égalité si, et seulement si, $\psi=(\varphi|\,\psi)\cdot\varphi$. □

EXEMPLE 1 Si E,F,G,H sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{s}:F\times G\longrightarrow H$ une application sesquilinéaire et $S:E\longrightarrow G$ une application linéaire, alors

$$(\varphi,\epsilon)\longmapsto\mathfrak{s}(\varphi,S\epsilon):F\times E\longrightarrow H$$

est une application sesquilinéaire.

La vérification est immédiate. □

EXEMPLE 2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{k,l}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$(x, y) \longmapsto (x|\, Ay) := \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \cdot \overline{x_k} \cdot y_l : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme sesquilinéaire. Elle est hermitienne si, et seulement si, la matrice A est hermitienne, i.e. $A = A^*$. Elle est positive si, et seulement si, A est *positive* , i.e. $(x|\, Ax) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$. C'est un produit scalaire si, et seulement si, la matrice A est hermitienne et *strictement positive* , i.e. $(x|\, Ax) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Attention dans la litérature, on utilise souvent pour une matrice les expressions semi-définie positive pour positive et définie positive pour strictement positive.

Si A est hermitienne et strictement positive, la norme associée au produit scalaire qu'elle définit est

$$x \longmapsto \left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \cdot \overline{x_k} \cdot x_l\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Nous montrerons (théorème 2.7) que cette norme est équivalente à la norme euclidienne $|\cdot|_2$.

EXEMPLE 3 Soient X un espace topologique et μ une intégrale de Radon sur X . Alors

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi|\, \eta)_\mu := \int \overline{\xi} \cdot \eta \, d\mu : \mathbf{L}^2(\mu) \times \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est évidemment une forme sesquilinéaire hermitienne positive. C'est un produit scalaire. La norme associée sera désignée par $\|\cdot\|_{2,\mu} := (\cdot|\,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Nous écrirons souvent $\|\cdot\|_2$ pour simplifier.

En effet $(\xi|\, \xi)_\mu = \int |\xi|^2 \, d\mu = 0$ entraîne $\xi = 0$ μ-p.p. , i.e. $\xi = 0$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. □

DEFINITION 3 Une *section commençante* de $\mathbb{N}$ est une partie I telle que, pour tout $n \in J$ et $m \in \mathbb{N}$, on ait $m \in I$ si $m \leqslant n$. Ce sont les ensembles de la forme

$$n = \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{N} .$$

Une *énumération* d'un ensemble dénombrable (fini ou infini dénombrable) A est une bijection $\sigma : I \longrightarrow A$, où I est une section commençante de $\mathbb{N}$.

LEMME *Soient X un ensemble et $(\alpha_x)_{x\in X} \subset \mathbb{R}$ une famille de nombres réels telle que*

$$\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(X)} \sum_{x\in K} |\alpha_x| < \infty .$$

Alors $\{x \in X \mid \alpha_x \neq 0\}$ est dénombrable.

Si D est une partie dénombrable contenant $\{x \in X \mid \alpha_x \neq 0\}$ et si $\sigma : I \longrightarrow D$ une énumération de D , alors la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$ est convergente et sa somme est indépendante de D et σ . On écrit

$$\sum_{x\in X} \alpha_x := \sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$$

et on dit que c'est la somme de la famille $(\alpha_x)_{x\in X}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; |\alpha_x| \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est fini, donc

$$\{x \in X \mid |\alpha_x| > 0\} = \bigcup_{k \geqslant 1} \left\{ x \in X \;\middle|\; |\alpha_x| \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est dénombrable. La série $\sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$ est alors absolument convergente et le lemme découle du théorème de réarrangement 6.14 du cours d'Analyse [17]. □

On dit que $(\alpha_x)_{x \in X}$ est sommable, notion que nous introduirons dans le cadre des espaces localement convexes en 2.6. Les interrelations seront explicitées dans le corollaire 2.11.

EXEMPLE 4 Soit X un ensemble et $\#$ l'intégrale de comptage. Alors

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi|\,\eta)_\# := \sum_{x \in X} \overline{\xi(x)} \cdot \eta(x) : \ell^2(X) \times \ell^2(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un produit scalaire.

Remarquons que, pour tout $\xi, \eta \in \ell^2(X)$, il existe une partie dénombrable $D \subset X$ telle que $\xi(x) = \eta(x) = 0$ pour tout $x \notin D$. Si $\sigma : I \longrightarrow D$ est une énumération de D , alors la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l))$ est absolument convergente, puisque en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{K}^n$ on a

$$\sum_{l=0}^{\sup I} \left| \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l)) \right| = \sup\nolimits_{k \in I} \sum_{l=0}^{k} |\xi(\sigma(l))| \cdot |\eta(\sigma(l))| \leqslant$$

$$\leqslant \sup\nolimits_{k \in I} \left(\sum_{l=0}^{k} |\xi(\sigma(l))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} |\eta(\sigma(l))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_2 \cdot \|\eta\|_2 < \infty \ .$$

On pose alors

$$\sum_{x \in X} \overline{\xi(x)} \cdot \eta(x) := \sum_{l=0}^{\sup I} \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l)) \ ,$$

le membre de droite ne dépendant évidemment pas de D et σ . Les vérifications sont alors immédiates. □

EXERCICE Montrer qu'une forme hermitienne positive $\mathfrak{s}$ induit naturellement un produit scalaire sur le quotient de F par le sous-espace vectoriel des $\varphi \in F$ tels que $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) = 0$.

1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

DEFINITION 1 Un espace vectoriel F muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace préhilbertien* . On le considère comme un espace normé en le munissant de la norme associée. Si F est complet pour cette norme, on dit que c'est un *espace de Hilbert* .

EXEMPLE 1 Les exemples 2 à 4 du numéro précédent sont des espaces de Hilbert.

EXEMPLE 2 Soient X un espace localement compact et μ un intégrale de Radon sur X . La forme hermitienne positive sur $\mathcal{K}(X)$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi|\, \psi) := \int \overline{\varphi} \cdot \psi \, d\mu : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est non-dégénérée si, et seulement si, pour tout ouvert $O \neq \emptyset$ de X , on a $\mu(O) > 0$. Dans ce cas $\mathcal{K}(X)$ est un espace préhilbertien, en général non-complet.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X) \smallsetminus \{0\}$, il existe $x \in X$ tel que $|\varphi(x)|^2 > 0$, donc un voisinage ouvert O de x tel que l'on ait

$$|\varphi(y)|^2 \geqslant \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \quad \text{pour tout } y \in O \ .$$

Le théorème 1.1 montre alors que la condition est suffisante, puisque

$$(\varphi|\, \varphi) = \int |\varphi|^2 \, d\mu \geqslant \int_O \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \, d\mu \geqslant \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \cdot \mu(O) > 0 \ .$$

Réciproquement X étant complètement régulier, il existe $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ tel que $0 < \varphi \leqslant 1$ et $\varphi = 0$ hors de O , donc

$$\mu(O) \geqslant \int |\varphi|^2 \, d\mu = (\varphi|\, \varphi) > 0 \ . \quad \square$$

REMARQUE 1 La condition ci-dessus signifie que l'application canonique

$$\varphi \longmapsto [\varphi] : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

est injective. On dit que le *support* de μ est X .

REMARQUE 2 Dans le cas général on considère l'image $[\mathcal{K}(X)]$ de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ formée des classes modulo les fonctions μ-négligeables contenant au moins une fonctions continues à support compact.

Rappelons que

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \mathcal{L}^2(\mu) / \mathcal{N}(\mu) \ ,$$

où $\mathcal{N}(\mu) = \{f \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid f = 0 \ \mu\text{-p.p.}\} = \{f \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid \|f\|_2 = 0\}$ (cf. exercice 1.1).

DEFINITION 2 On dit que l'ensemble fermé complément du plus grand ouvert qui est μ-négligeable est le *support* de μ . On le désigne par $\operatorname{supp}\mu$.

Cette définition est consistante. Soit O la réunion de tous les ouverts U de X tels que $\mu(U) = \mu(1_U) = 0$. La famille de tous ces ouverts est filtrante croissante, puisque pour deux tels ouverts U, V , on a

$$\mu(U \cup V) \leqslant \mu(U) + \mu(V) = 0 \ .$$

Mais comme

$$1_O = \sup_{U \text{ ouvert, } \mu(U)=0} 1_U \ ,$$

la propriété de Bourbaki (cours d'Analyse [17], théorème 14.5) montre que

$$\mu(O) = \mu\left(\sup_{U \text{ ouvert, } \mu(U)=0} 1_U\right) = \sup_{U \text{ ouvert, } \mu(U)=0} \mu(1_U) = 0 \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 3 Dans beaucoup de situation, si l'espace de base X ne joue pas un très grand rôle, on peut supposer que le support de μ est X en remplaçant X par $\operatorname{supp}\mu$ et μ par l'intégrale de Radon induite $\mu_{\operatorname{supp}\mu}$. Si $j : \operatorname{supp}\mu \hookrightarrow X$ est l'injection canonique, on a

$$j\left(\mu_{\operatorname{supp}\mu}\right) = 1_{\operatorname{supp}\mu} \cdot \mu$$

(cf. cours d'Analyse [17], proposition 16.10).

EXEMPLE 3 Soient X un espace topologique et μ une intégrale de Radon sur X . Rappelons que $\mathbf{M}(\mu)$ désigne l'espace vectoriel des classes, modulo les fonctions μ-négligeables, de fonctions μ-mesurables sur X (cf. cours d'Analyse [17], remarque 15.14.2) . Si

$$\rho : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est une fonction μ-mesurable, il est clair que la fonctionnelle

$$f \longmapsto \|f\|_{2,\mu,\rho} := \left(\int^* |f|^2 \cdot \rho \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} : \mathbb{K}^X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est sous-linéaire. L'ensemble $\mathcal{L}^2(\mu, \rho)$ des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ qui sont μ-mesurables et telles que $\|f\|_{2,\mu,\rho} < \infty$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$; on a

$$\|f\|_{2,\mu,\rho} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-p.p. sur } \{\rho > 0\}$$

et

$$f = 0 \quad \mu\text{-p.p. sur } \{\rho = \infty\} \ .$$

Nous désignerons par

$$\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathcal{L}^2(\mu, \rho) \Big/ \left\{\|\cdot\|_{2,\mu,\rho} = 0\right\}$$

l'espace quotient muni de la norme définie par

$$\|[f]\|_{2,\mu,\rho} := \|f\|_{2,\mu,\rho} \ .$$

Nous ne ferons en général pas de distintinction entre une classe de fonctions et l'un de ses représentants. L'application

$$f \longmapsto 1_{\{\rho \neq 0\}} \cdot f : \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow \mathbf{M}(\mu)$$

est évidemment injective. Il est immédiat de vérifier que

$$f \longmapsto f \cdot \sqrt{\rho} : \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

est une isométrie sur le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^2(\mu)$ formé des f tels que $f = 0$ μ-p.p. sur $\{\rho = 0\} \cup \{\rho = \infty\}$. Ceci montre en particulier que $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est

$$(f|\, g)_{\mu,\rho} := \int \overline{f} \cdot g \cdot \rho \, d\mu \ .$$

Si $\mathfrak{A}$ est une tribu d'ensembles μ-mesurables, on peut également considérer le sous-espace vectoriel $\mathbf{L}^2(\mu, \rho, \mathfrak{A})$ de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ formé des classes de fonctions contenant un représentant $\mathfrak{A}$-mesurable. On vérifie facilement qu'il est fermé.

REMARQUE 4 On a $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathbf{L}^2(\rho \cdot \mu)$ si $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Sans cette hypothèse on ne peut pas définir une intégrale de Radon $\rho \cdot \mu$.

EXEMPLE 4 Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont des espaces de Hilbert, alors $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$, muni du produit scalaire

$$((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)) \longmapsto (\xi_1|\, \xi_2)_{\mathcal{H}} + (\eta_1|\, \eta_2)_{\mathcal{G}} \ ,$$

est un espace de Hilbert.

EXEMPLE 5 Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\mathcal{G}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, on écrit $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{H}$, alors $\mathcal{G}$ est un espace de Hilbert.

1.3 Formules de polarisation

PROPOSITION *Soit $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire sur F . Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a*

(i)

$$2 \cdot [\mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \mathfrak{s}(\psi, \varphi)] = \sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \varepsilon \cdot \psi, \varphi + \varepsilon \cdot \psi) \ .$$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \varepsilon \cdot \psi, \varphi + \varepsilon \cdot \psi) \ .$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi, \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi) \ .$$

En particulier si $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in F$, alors $\mathfrak{s}$ est hermitienne.

En effet

$$\sum_{\varepsilon} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi, \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi) =$$

$$= \sum_{\varepsilon} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) + \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\psi, \varphi) + \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \ ,$$

d'où les formules de polarisation en remarquant que $\bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$,

$$\sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon = 0 \quad , \quad \sum_{\varepsilon^2 = 1} 1 = \sum_{\varepsilon^2 = 1} \varepsilon^2 = 2 \quad , \quad \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon = \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\varepsilon^4 = 1} 1 = 4 \ .$$

Finalement si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\overline{\mathfrak{s}(\varphi, \psi)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi, \bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \varphi + \bar{\varepsilon} \cdot \psi) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\varepsilon \cdot \varphi + \psi, \varepsilon \cdot \varphi + \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\psi + \bar{\varepsilon} \cdot \varphi, \psi + \bar{\varepsilon} \cdot \varphi) = \mathfrak{s}(\psi, \varphi) \ ,$$

donc $\mathfrak{s}$ est hermitienne. □

COROLLAIRE (Egalité du parallélogramme ou identité de la médiane)
Soit (F, p) un espace semi-normé. Il existe une unique forme hermitienne positive $\mathfrak{s}$ sur F induisant la semi-norme p si, et seulement si, pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$p(\varphi + \psi)^2 + p(\varphi - \psi)^2 = 2 \cdot \left[p(\varphi)^2 + p(\psi)^2\right] \ .$$

La nécessité se démontre immédiatement en développant le membre de gauche. L'unicité découle des formules ci-dessus, que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^{2\cdot\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}}=1} \varepsilon \cdot \|\varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi\|^2 \ . \tag{$*$}$$

Réciproquement, cette formule permettent de définir une application continue

$$\mathfrak{s} : (\varphi, \psi) \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi, \psi) : F \times F \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

On vérifie immédiatement que $\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \mathfrak{s}(\psi, \varphi)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \overline{\mathfrak{s}(\psi, \varphi)}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donc que $\mathfrak{s}$ est hermitienne. L'égalité du parallélogramme montre alors que cette application est additive en les deux variables, i.e. $\mathbb{Z}$-bilinéaire. On en déduit qu'elle est $\mathbb{Q}$-bilinéaire, puis par continuité qu'elle est $\mathbb{R}$-bilinéaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on montre facilement que

$$(\varphi|\, i \cdot \psi) = i \cdot (\varphi|\, \psi) \ ,$$

ce qui finit de prouver la sesquilinéarité. Finalement les formules de polarisation montrent que $\mathfrak{s}$ induit bien la semi-norme p , et en particulier que $\mathfrak{s}$ est positive. $\square$

REMARQUE Une isométrie d'un espace préhilbertien dans un autre conserve le produit scalaire, puisque celui-ci s'exprime à l'aide de la norme grâce à la formule de polarisation $(*)$.

EXERCICE Si $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ est une suite finie dans un espace préhilbertien F , alors

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \left(\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon(j) \cdot \varphi_j \right\|^2 \right) = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^2 \ .$$

1.4 Théorème de la projection

Dans ce paragraphe F désigne un espace préhilbertien, muni de la norme déduite du produit scalaire.

Rappelons tout d'abord que si G, H sont des espaces normés et $T : G \longrightarrow H$ est une application (semi-)linéaire, alors la plus petite constante M satisfaisant à

$$\|T\gamma\|_H \leqslant M \cdot \|\gamma\|_G \quad \text{pour tout } \gamma \in G \tag{$*$}$$

est

$$\|T\| := \sup_{\gamma \in G, \|\gamma\|_G \leqslant 1} \|T\gamma\|_H \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Si $L(G, H)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires $T : G \longrightarrow H$, alors

$$T \longmapsto \|T\| : L(G, H) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est une fonctionnelle absolument homogène et sous-additive. On dit que $\|T\|$ est la norme de T .

Pour quer T soit continue, il faut et il suffit que qu'il existe une constante $M < \infty$ satisfaisant à $(*)$, i.e. que $\|T\| < \infty$. On dit aussi que T est *bornée* .

Ceci fut démontré dans le cours d'Analyse [17], § 11.8.

Si $\mathcal{L}(G, H)$ désigne l'ensemble des applications linéaires $T : G \longrightarrow H$ qui sont continues et on a

$$\mathcal{L}(G, H) = \{T \in L(G, H) \mid \|T\| < \infty\} \ ,$$

et les propriétés de la norme montrent que c'est un sous-espace vectoriel de $L(G, H)$ et que

$$T \longmapsto \|T\| : \mathcal{L}(G, H) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une norme.

DEFINITION 1 Pour tout $\xi, \eta \in F$, on dit que ξ et η sont *orthogonaux* et on écrit $\xi \perp \eta$, si $(\xi| \eta) = 0$. Si A est une partie de F , on désigne par $A^\perp$ l' *ensemble orthogonal* formé des $\eta \in F$ tels que $(A| \eta) = 0$, i.e. $(\xi| \eta) = 0$ pour tout $\xi \in A$.

LEMME (Egalité de Pythagore) *Si $\xi, \eta \in F$ sont orthogonaux, alors*

$$\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \ .$$

La réciproque est vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

C'est immédiat, puisque

$$\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + (\xi| \eta) + (\eta| \xi) + \|\eta\|^2 \ . \quad \square$$

EXEMPLE 1 Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la réciproque est fausse ; on a par exemple

$$|1 + i|^2 = |1|^2 + |i|^2 \quad \text{et} \quad (1| i) = i \ .$$

Nous allons maintenant généraliser le théorème 15.16 de meilleure approximation que nous avons démontré dans le cours d'Analyse [17].

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien et $\mathcal{G}$ une partie convexe complète $\neq \emptyset$ de F .*

(i) Pour tout $\xi \in F$, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{G}} \|\xi - \gamma\| = d(\xi, \mathcal{G}) = \|\xi - \theta\| \ . \tag{$*$}$$

On le note $P_{\mathcal{G}}\xi$ et on dit c'est la meilleure approximation de ξ par un élément de $\mathcal{G}$.

(ii) Pour tout $\xi \in F$, l'élément $P_{\mathcal{G}}\xi$ est l'unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\operatorname{Re}(\gamma - \theta | \, \theta - \xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ . \tag{$**$}$$

On a

$$\|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\| \leqslant \|\xi - \eta\| \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in F \ .$$

Si $\mathcal{G}$ est sous-espace vectoriel, alors

(iii) Pour tout $\xi \in F$, l'élément $P_{\mathcal{G}}\xi$ est l'unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que $(\xi - \theta) \perp \mathcal{G}$, i.e. tel que

$$(\gamma | \, \xi) = (\gamma | \, \theta) \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ .$$

(iv) L'application $P_{\mathcal{G}} : F \longrightarrow F$ est linéaire. C'est une projection, i.e. $P_{\mathcal{G}}^2 = P_{\mathcal{G}}$, et elle est de norme 1 si $\mathcal{G} \neq \{0\}$. Son noyau est le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{G}$; il est fermé et on a

$$F = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^{\perp} \ .$$

(v) On a

$$\mathcal{G}^{\perp\perp} = \mathcal{G} \ .$$

Démonstration de (i) Etant donné $\xi \in F$, il existe une suite $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ telle que $d(\xi, \mathcal{G}) = \lim_k \|\xi - \gamma_k\|$. Nous allons montrer que $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Par l'égalité du parallélogramme (corollaire 3.3), on a

$$\|\gamma_k - \gamma_l\|^2 = 2 \cdot \left(\|\xi - \gamma_k\|^2 + \|\xi - \gamma_l\|^2\right) - 4 \cdot \left\|\xi - \frac{\gamma_k + \gamma_l}{2}\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left(\|\xi - \gamma_k\|^2 + \|\xi - \gamma_l\|^2\right) - 4 \cdot d(\xi, \mathcal{G})^2 \ ,$$

puisque $\mathcal{G}$ est convexe :

$$\frac{\gamma_k + \gamma_l}{2} \in \mathcal{G} \ .$$

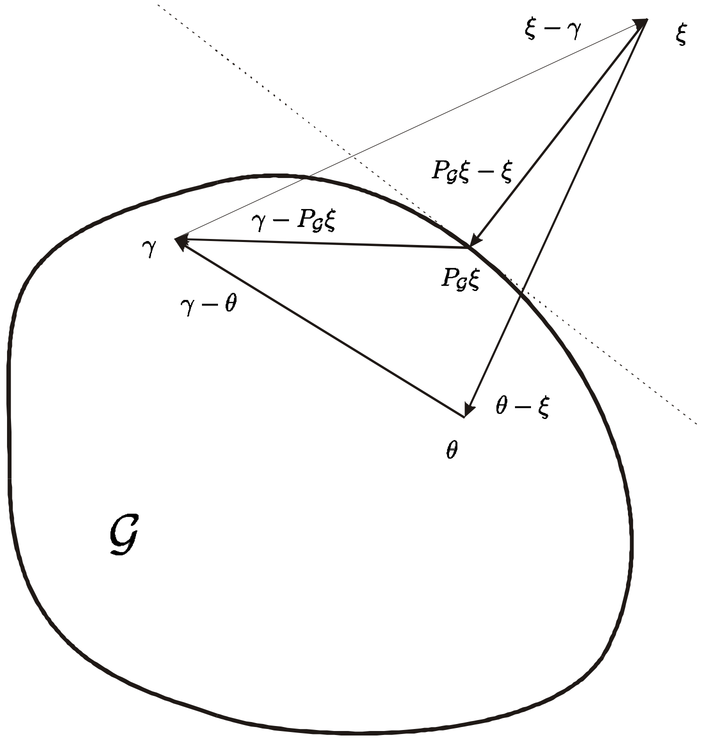
Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque k, l tendent vers l'infini, notre assertion est prouvée et $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\|\xi - \theta\| = \lim_k \|\xi - \gamma_k\| = d(\xi, \mathcal{G}) \ .$$

Si $\widetilde{\theta} \in \mathcal{G}$ est tel que $d(\xi, \mathcal{G}) = \left\|\xi - \widetilde{\theta}\right\|$, alors

$$\left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|^2 = 2 \cdot \left(\|\xi - \theta\|^2 + \left\|\xi - \widetilde{\theta}\right\|^2\right) - 4 \cdot \left\|\xi - \frac{\theta + \widetilde{\theta}}{2}\right\|^2 \leqslant 0 \ ,$$

d'où l'on obtient $\theta = \widetilde{\theta}$.



Démonstration de (ii) Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ et $\alpha \in \left]0,1\right]$, on a $\alpha \cdot \gamma + (1-\alpha) \cdot P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$, donc

$$\|P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 \leqslant \|\alpha \cdot \gamma + (1-\alpha) \cdot P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 = \|\alpha \cdot (\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi) + P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 =$$

$$= \alpha^2 \cdot \|\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 + 2\alpha \cdot \operatorname{Re}(\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi |\, P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) + \|P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2$$

et par suite

$$\operatorname{Re}(\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi |\, P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \geqslant -\frac{\alpha}{2} \cdot \|\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 \ ,$$

d'où $(**)$ en faisant tendre α vers 0 .

Réciproquement soit θ vérifiant $(**)$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, il vient

$$\|\gamma - \xi\|^2 = \|\gamma - \theta + \theta - \xi\|^2 = \|\gamma - \theta\|^2 + 2\operatorname{Re}(\gamma - \theta |\, \theta - \xi) + \|\theta - \xi\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \|\theta - \xi\|^2 \ ,$$

ce qui montre que θ vérifie $(*)$. On a bien $\theta = P_{\mathcal{G}}\xi$.

Finalement pour prouver l'inégalité, puisque $P_{\mathcal{G}}\eta, P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$, constatons que

$$\operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\eta - P_{\mathcal{G}}\xi |\, P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \ , \ \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta |\, P_{\mathcal{G}}\eta - \eta) \geqslant 0 \ .$$

En additionnant on obtient

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta |\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi + P_{\mathcal{G}}\eta - \eta) =$$

$$= \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta |\, \xi - \eta) - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \leqslant |(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta |\, \xi - \eta)| - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\xi - \eta\| \cdot \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\| - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \ ,$$

d'où le résultat.

Démonstration de (iii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$, on a $\overline{\alpha} \cdot \gamma \in \mathcal{G}$, donc

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(\overline{\alpha} \cdot \gamma - P_{\mathcal{G}}\xi |\, P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) = \operatorname{Re}\alpha \cdot (\gamma |\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) - \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi |\, P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \ .$$

En faisant après division tendre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers $\pm\infty$, on obtient $\operatorname{Re}(\gamma|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en remplaçant α par $i \cdot \alpha$, on obtient $\operatorname{Im}(\gamma|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$, donc $(\gamma|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$. Nous avons donc prouvé que $(\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G}$.

Réciproquement étant donné $\theta \in \mathcal{G}$ tel que $(\xi - \theta) \perp \mathcal{G}$, pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, on a

$$\|\xi - (\theta + \gamma)\|^2 = \|\xi - \theta\|^2 + \|\gamma\|^2$$

par le lemme de Pythagore, donc

$$d(\xi, \mathcal{G})^2 = \inf_{\gamma \in \mathcal{G}} \|\xi - (\theta + \gamma)\|^2 = \|\xi - \theta\|^2 \ .$$

Grâce à (i), on obtient $\theta = P_{\mathcal{G}}\xi$.

Démonstration de (iv) La linéarité découle immédiatement de (iii). Par exemple pour tout $\xi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a évidemment

$$\alpha \cdot \xi - \alpha \cdot P_{\mathcal{G}}\xi = \alpha \cdot (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G} \ ,$$

donc $P_{\mathcal{G}}(\alpha \cdot \xi) = \alpha \cdot P_{\mathcal{G}}\xi$. C'est une projection, car $(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G}$! D'autre part

$$\|\xi\|^2 = \|P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 + \|\xi - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 \ ,$$

d'où l'on tire $\|P_{\mathcal{G}}\xi\| \leqslant \|\xi\|$, et par suite $\|P_{\mathcal{G}}\| \leqslant 1$. Si $\mathcal{G} \neq \{0\}$, soit $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\|\gamma\| = 1$. On a alors $\|P_{\mathcal{G}}\gamma\| = \|\gamma\| = 1$, donc $\|P_{\mathcal{G}}\| = 1$. Finalement, on a $\operatorname{Ker} P_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{\perp}$ par (iii) ; c'est donc un sous-espace vectoriel fermé puisque $P_{\mathcal{G}}$ est continue, et la décomposition $\xi = P_{\mathcal{G}}\xi + (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi)$ montre que $F = \mathcal{G} + \mathcal{G}^{\perp}$. Comme manifestement $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\perp} = \{0\}$, nous avons finit de prouver (iv).

Démonstration de (v) On a $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^{\perp\perp}$ et si $\xi \in \mathcal{G}^{\perp\perp}$, alors comme $\xi - P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}^{\perp}$ par (iii), il vient

$$(\xi|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \quad \text{et} \quad (P_{\mathcal{G}}\xi|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \ ,$$

donc

$$\|\xi - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 = (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = (\xi|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) + (P_{\mathcal{G}}\xi|\, \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \ ,$$

i.e. $\xi = P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$. □

DEFINITION 2 Si $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel complet, on dit que $P_{\mathcal{G}}$ est la *projection orthogonale* ou l' *orthoprojecteur* de F sur $\mathcal{G}$. Nous écrirons

$$F = \mathcal{G} \boxplus \mathcal{G}^{\perp}$$

pour montrer que cette décomposition est orthogonale et que l'on a l'égalité de Pythagore.

REMARQUE 1 On peut également étendre ce résultat à certains espaces normés, dits *uniformément convexes* , par exemple les espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour $p \in \left]1, \infty\right[$.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $|\cdot|_{\infty}$, l'assertion (i) est fausse. Par exemple si $\varphi = (1, 0)$, alors tous les points de $\{0\} \times [-1, 1]$ sont meilleure approximation de φ dans $\{0\} \times \mathbb{R}$.

EXEMPLE 2 Etant donné $\epsilon \in F \setminus \{0\}$, alors $\mathbb{K} \cdot \epsilon$ est complet et

$$P_{\mathbb{K}\cdot\epsilon}\xi = \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon \ .$$

En effet $\mathbb{K} \cdot \epsilon$ est complet, car $\alpha \longmapsto \alpha \cdot \frac{\epsilon}{\|\epsilon\|} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \cdot \epsilon$ est un isomorphisme. Il n'est évidemment pas nécessaire de le savoir pour constater que $\frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\,\xi) \cdot \epsilon$ est la projection de ξ sur $\mathbb{K} \cdot \epsilon$. En effet

$$\left(\xi - \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\,\xi) \cdot \epsilon \,\middle|\, \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\,\xi) \cdot \epsilon\right) = \frac{(\epsilon|\,\xi) \cdot (\xi|\,\epsilon)}{\|\epsilon\|^2} - \frac{\overline{(\epsilon|\,\xi)} \cdot (\epsilon|\,\xi) \cdot \|\epsilon\|^2}{\|\epsilon\|^4} = 0 \ . \quad \square$$

COROLLAIRE *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.*

Pour qu'une partie A de $\mathcal{H}$ soit totale, il faut et il suffit que, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\xi \perp A$, i.e. tel que $(A|\,\xi) = \{0\}$, on ait $\xi = 0$.

Soit $\mathcal{G} := \overline{\operatorname{lin}} A$. Puisque $\mathcal{H}$ est complet, il en est de même de $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{H} = \mathcal{G} \boxplus \mathcal{G}^\perp$. Par définition A est totale si, et seulement si, $\mathcal{G} = \mathcal{H}$, i.e. $\mathcal{G}^\perp = \{0\}$, d'où l'assertion puisque $A^\perp = \mathcal{G}^\perp$ par linéarité et continuité (cf. remarque 1.1.2). $\square$

EXERCICE 1 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces vectoriels de F .

(a) Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont complets, alors $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ si, et seulement si, on a $P_\mathcal{G} = P_\mathcal{G} P_\mathcal{H}$.

(b) Si $\mathcal{H} \perp \mathcal{G}$, alors $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est complet si, et seulement si, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ le sont. Dans ce cas, on a

$$P_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} = P_\mathcal{H} + P_\mathcal{G} \ .$$

EXERCICE 2 Dans l'espace de Banach $c^0(\mathbb{N})$ des zéro-suites, sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, il existe des hyperplans fermés H , i.e. $H = \operatorname{Ker} \mu$ pour une forme linéaire continue $\mu \in c^0(\mathbb{N})' = \ell^1(\mathbb{N})$ (cf. exercice 3.8.1), tels que tout $\varphi \in F \smallsetminus H$ n'ait pas de meilleure approximation dans H (cf. exercice 3.8.2).

1.5 Théorème de représentation de Riesz

Si F est un espace vectoriel nous désignerons par $F^{\circledast}$ l'espace vectoriel des formes semi-linéaires μ sur F . La forme sesquilinéaire (à gauche) qui lui est associée sera notée

$$F \times F^{\circledast} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle := \mu(\varphi)$$

comme généralisation d'un produit scalaire. Nous écrirons la forme semi-linéaire μ sous la forme d'un *vecteur ket*

$$|\mu\rangle : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle = \mu(\varphi) \ .$$

Ce formalisme fait partie de celui de Dirac et sera développé plus tard (cf. 3.4, 3.5 et 5.19).

DEFINITION Si F est un espace normé, on muni l'espace vectoriel $F^{\dagger}$ des formes semi-linéaires continues sur F de la norme

$$\|\mu\| := \sup\nolimits_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} |\langle \varphi | \, \mu \rangle| \ .$$

On dit que c'est le *semi-dual fort* de F .

Si G et H sont des espaces normés, on dit qu'une application sesquilinéaire $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est *bornée* s'il existe une constante $M < \infty$ telle que

$$\|\mathfrak{s}(\varphi, \gamma)\|_H \leqslant M \cdot \|\varphi\|_F \cdot \|\gamma\|_G \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \ ,$$

i.e. si

$$\|\mathfrak{s}\| := \sup_{\substack{\varphi \in F, \gamma \in G \\ \|\varphi\|_F, \|\gamma\|_G \leqslant 1}} \|\mathfrak{s}(\varphi, \gamma)\|_H < \infty \ ,$$

qui est la plus petite de ces constantes.

On a

$$\|\mathfrak{s}(\varphi, \gamma)\|_H \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\varphi\|_F \cdot \|\gamma\|_G \ .$$

EXEMPLE La forme sesquilinéaire canonique

$$F \times F^{\dagger} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle$$

est bornée.

En effet on a

$$|\langle \varphi | \, \mu \rangle| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\mu\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \mu \in F^{\dagger} \ .$$

On peut considérer cette inégalité comme une *inégalité de Hölder abstraite* .

Nous montrerons sous forme plus générale dans la proposition 2.4 qu'une application sesquilinéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée. En fait il suffit d'adapter la démonstration de la continuité de la multiplication dans $\mathbb{K}$ (cours d'Analyse [17], théorème 5.5.iii).

Voir aussi 3.1, 3.2 et 3.8 pour d'autres détails.

PROPOSITION *Soit F un espace préhilbertien. Pour tout $\xi \in F$, la forme semi-linéaire*

$$|\xi) : \varphi \longmapsto (\varphi | \, \xi) : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue sur F *, et l'application linéaire, dite de Riesz,*

$$R : F \longrightarrow F^{\dagger}_{\beta} : \xi \longmapsto |\xi)$$

est une isométrie.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|(\varphi|\, \xi)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\xi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Ceci montre que $\| |\xi) \| \leqslant \|\xi\|$. Si $\xi \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\| = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \middle|\, \xi \right) = \|\xi\| \ ,$$

ce qui prouve que $\| |\xi) \| = \|\xi\|$. □

REMARQUE 1 L'application de Riesz est en général non-surjective, mais on a le

THEOREME (de représentation de Riesz) *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert. L'application de Riesz* $R : \xi \longmapsto |\xi)$ *est une isométrie de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{H}^{\dagger}_{\beta}$ *. En outre si* $\mu \in \mathcal{H}^{\dagger}$ *, alors la fonction réelle sur* $\mathcal{H}$

$$\varphi \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \|\varphi\|^2 - \operatorname{Re} \langle \varphi|\, \mu\rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

atteint son minimum en $\xi \in \mathcal{H}$ *tel que* $\mu = |\xi)$ *.*

Il nous reste à montrer que l'application de Riesz est surjective. Etant donné $\mu \in \mathcal{H}^{\dagger} \setminus \{0\}$, on a $(\operatorname{Ker} \mu)^{\perp} \neq \{0\}$ et le théorème de la projection 1.4 montre que $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} \mu \oplus (\operatorname{Ker} \mu)^{\perp}$. Il existe donc $\widetilde{\xi} \in (\operatorname{Ker} \mu)^{\perp}$ tel que $\left(\widetilde{\xi} \middle|\, \mu \right) = 1$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a alors $\varphi - \overline{\langle \varphi|\, \mu\rangle} \cdot \widetilde{\xi} \in \operatorname{Ker} \mu$ et en posant

$$\xi := \frac{\widetilde{\xi}}{\left\| \widetilde{\xi} \right\|^2} \in (\operatorname{Ker} \mu)^{\perp} \ ,$$

il vient

$$(\varphi|\, \xi) = \left(\varphi - \overline{\langle \varphi|\, \mu\rangle} \cdot \widetilde{\xi} \middle|\, \xi \right) + \left(\overline{\langle \varphi|\, \mu\rangle} \cdot \widetilde{\xi} \middle|\, \xi \right) = \left(\overline{\langle \varphi|\, \mu\rangle} \cdot \widetilde{\xi} \middle|\, \frac{\widetilde{\xi}}{\left\| \widetilde{\xi} \right\|^2} \right) = \langle \varphi|\, \mu\rangle \ ,$$

i.e. $\mu = |\xi)$.

Finalement, on a

$$\|\varphi - \xi\|^2 = \|\varphi\|^2 - 2 \operatorname{Re} (\varphi|\, \xi) + \|\xi\|^2 = \|\varphi\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \varphi|\, \mu\rangle + \|\xi\|^2 \ ,$$

d'où la seconde assertion. □

REMARQUE 2 On peut donc munir le semi-dual fort $\mathcal{H}^{\dagger}_{\beta}$ de $\mathcal{H}$ d'un produit scalaire compatible avec sa norme en posant

$$(\mu|\, \nu)_{\mathcal{H}^{\dagger}_{\beta}} := \left(R^{-1}\mu \middle|\, R^{-1}\nu \right)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \mu, \nu \in \mathcal{H}^{\dagger}_{\beta} \ ,$$

qui en fait un espace de Hilbert isomorphe à $\mathcal{H}$.

Attention, ce théorème pourrait nous inciter à identifier le semi-dual fort $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ à $\mathcal{H}$, mais dans les applications on rencontre souvent d'autres représentations, plus intéressantes, de $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ (cf. exemple 3.4.5).

COROLLAIRE *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Il y a correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues*

$$S : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

et les formes sesquilinéaires bornées

$$\mathfrak{s} : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}$$

donnée par

$$\mathfrak{s}(\xi, \gamma) = (\xi | S\gamma)_{\mathcal{H}} \ .$$

Dans ce cas

$$\|S\| = \|\mathfrak{s}\| \ .$$

Si S est linéaire continue, il est clair que $\mathfrak{s}$ est sesquilinéaire (cf. exemple 1.1). Elle est bornée car

$$|\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| = |(\xi | S\gamma)| \leqslant \|\xi\| \cdot \|S\gamma\| \leqslant \|S\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\mu\| \ .$$

Réciproquement si $\mathfrak{s}$ est une forme sesquilinéaire bornée, pour tout $\gamma \in G$

$$\xi \longmapsto \mathfrak{s}(\xi, \gamma) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme semi-linéaire continue, représentée par $S\gamma \in \mathcal{H}$, puisque

$$|\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\gamma\| \cdot \|\xi\| \ .$$

Par construction $\mathfrak{s}(\xi, \gamma) = (\xi | S\gamma)$ et $\|S\gamma\| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\gamma\|$. D'autre part

$$S : \gamma \longmapsto S\gamma : G \longrightarrow \mathcal{H}$$

est linéaire et

$$\|S\| = \sup_{\gamma \in G, \|\gamma\| \leqslant 1} \|S\gamma\| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \ ,$$

ce qui prouve la continuité. Mais comme

$$\|\mathfrak{s}\| = \sup_{\|\xi\|, \|\gamma\| \leqslant 1} |\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| = \sup_{\|\xi\|, \|\gamma\| \leqslant 1} |(\xi | S\gamma)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\xi\|, \|\gamma\| \leqslant 1} \|\xi\| \cdot \|S\gamma\| \leqslant \sup_{\|\gamma\| \leqslant 1} \|S\gamma\| = \|S\| \ ,$$

on obtient l'autre inégalité. $\square$

EXERCICE Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. Montrer que pour toute forme semi-linéaire continue μ sur F , il existe une unique forme semi-linéaire continue ν sur $\mathcal{H}$ telle que $\nu_{|F} = \mu$ und $\nu_{|F^\perp} = 0$.

1.6 Les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram

Dans ce paragraphe $\mathcal{H}$ désigne un espace hilbertien

DEFINITION Une forme sesquilinéaire bornée $\mathfrak{s} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite *strictement positive* ou *coercitive* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathfrak{s}(\xi,\xi) \geqslant \varepsilon \cdot \|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} .$$

L'application linéaire continue $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui lui est associée est aussi dite strictement positive.

THEOREME (de Stampacchia) *Soient $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire bornée coercitive sur $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ une partie convexe fermée $\neq \emptyset$ de $\mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$. Alors*

(i) Il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle \gamma - \theta | \mu\rangle \leqslant \operatorname{Re}\mathfrak{s}(\gamma - \theta, \theta) \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} . \tag{$*$}$$

(ii) Si de plus $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors θ est caractérisé par la propriété

$$\theta \in \mathcal{G} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{s}(\theta,\theta) - \operatorname{Re}\langle\theta|\mu\rangle = \min_{\gamma\in\mathcal{G}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\gamma,\gamma) - \operatorname{Re}\langle\gamma|\mu\rangle\right) .$$

Démonstration de (i) Utilisons l'application linéaire continue S associé à la forme sesquilinéaire $\mathfrak{s}$ (corollaire 1.5), donc telle que $\mathfrak{s}(\xi,\eta) = (\xi| S\eta)$. On a

$$\varepsilon \cdot \|\xi\|^2 \leqslant \mathfrak{s}(\xi,\xi) = (\xi| S\xi) \leqslant \|S\| \cdot \|\xi\|^2 , \tag{$**$}$$

ce qui montre que $\varepsilon \leqslant \|S\|$. Soit d'autre part $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $|\mu\rangle = |\xi)$ (théorème de Riesz 1.5).

La condition $(*)$ sur θ s'écrit alors

$$\operatorname{Re}(\gamma - \theta| S\theta - \xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} ,$$

ou encore

$$\operatorname{Re}(\gamma - \theta| \theta - [\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta]) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} ,$$

pour une constante $\alpha > 0$ que nous allons choisir. Grâce au théorème de la projection 1.4.ii, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ satisfaisant à $(*)$ si, et seulement si, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\theta = P_{\mathcal{G}}(\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta) .$$

Nous sommes donc ramené à un problème de point fixe dans $\mathcal{G}$, qui est un espace métrique complet, puisque fermé dans $\mathcal{H}$. Montrons que l'application

$$\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} : \theta \longmapsto P_{\mathcal{G}}(\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta)$$

est q-lipschitzienne pour un $q \in [0,1[$. Pour tout $\theta,\gamma \in \mathcal{G}$, l'inégalité du théorème de la projection 1.4.ii montre que

$$\|\Phi\theta - \Phi\gamma\|^2 \leqslant \|\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\theta + \theta - (\alpha\cdot\xi - \alpha\cdot S\gamma + \gamma)\|^2 =$$

$$= \|\theta - \gamma - \alpha\cdot S(\theta-\gamma)\|^2 = \|\theta-\gamma\|^2 - 2\alpha\cdot\operatorname{Re}(\theta-\gamma| S(\theta-\gamma)) + \alpha^2\cdot\|S(\theta-\gamma)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - 2\varepsilon \cdot \alpha + \|S\|^2 \cdot \alpha^2\right) \cdot \|\theta - \gamma\|^2 \ .$$

Le minimum de $\alpha \longmapsto 1 - 2\varepsilon \cdot \alpha + \|S\|^2 \cdot \alpha^2$ est atteint en

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\|S\|^2}$$

et vaut

$$q^2 := 1 - 2\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{\|S\|^2} + \|S\|^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\|S\|^2}\right)^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\|S\|^2} \in [0,1[\ ,$$

puisque $\varepsilon \leqslant \|S\|$. Le théorème du point fixe de Banach (cours d'Analyse [17], exemple 12.5.1) nous permet de conclure.

Démonstration de (ii) Si $\mathfrak{s}$ est en outre hermitienne, elle définit un nouveau produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Mais puisque la nouvelle norme est équivalente à l'ancienne par $(**)$, on obtient un nouvel espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$. Utilisant le théorème de représentation de Riesz dans cet espace, il existe $\widetilde{\xi} \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$ tel que

$$(\eta|\, \xi) = \mathfrak{s}\left(\eta, \widetilde{\xi}\right) \quad \text{pour tout } \eta \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \ .$$

La condition $(*)$ s'écrit alors

$$\operatorname{Re}\left(\gamma - \theta|\, \xi\right) \leqslant \operatorname{Re}\mathfrak{s}\left(\gamma - \theta, \theta\right) \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ . \tag{$*$}$$

$$\operatorname{Re}\mathfrak{s}\left(\gamma - \theta, \theta - \widetilde{\xi}\right) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G}$$

et le théorème de la projection 1.4.i dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$ montre que θ est la meilleure approximation de $\widetilde{\xi}$ par un élément de $\mathcal{G}$, donc que θ réalise

$$\min_{\gamma \in \mathcal{G}} \mathfrak{s}\left(\gamma - \widetilde{\xi}, \gamma - \widetilde{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

ce qui revient à minimiser

$$\mathfrak{s}\left(\gamma - \widetilde{\xi}, \gamma - \widetilde{\xi}\right) = \mathfrak{s}\left(\gamma, \gamma\right) - 2 \cdot \operatorname{Re}\mathfrak{s}\left(\gamma, \widetilde{\xi}\right) + \mathfrak{s}\left(\widetilde{\xi}, \widetilde{\xi}\right)$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\mathfrak{s}\left(\gamma, \gamma\right) - \operatorname{Re}\left(\gamma|\, \xi\right) \ .$$

Ceci finit de prouver le théorème. $\square$

COROLLAIRE (Lax-Milgram) *Soit $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire bornée coercitive sur $\mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$. Alors*

(i) Il existe un unique $\theta \in \mathcal{H}$ tel que

$$\mathfrak{s}\left(\gamma, \theta\right) = \langle \gamma|\, \mu \rangle \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{H} \ .$$

(ii) Si de plus $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors θ est caractérisé par la propriété

$$\theta \in \mathcal{H} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{s}\left(\theta, \theta\right) - \operatorname{Re}\langle \theta|\, \mu \rangle = \min_{\gamma \in \mathcal{G}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}\left(\gamma, \gamma\right) - \operatorname{Re}\langle \gamma|\, \mu \rangle\right) \ .$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Stampacchia en prenant $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ en remarquant, comme dans la démonstration du théorème de la projection (iii), que l'unique solution $\theta \in \mathcal{H}$ est caractérisée par

$$\operatorname{Re}\langle \alpha\cdot\gamma-\theta|\,\mu\rangle \leqslant \operatorname{Re}\mathfrak{s}\left(\alpha\cdot\gamma-\theta,\theta\right) \quad \text{pour tout } \alpha\in\mathbb{K} \text{ et } \gamma\in\mathcal{H}\ ,$$

c'est-à-dire

$$0\leqslant \operatorname{Re}\Big(\alpha\cdot\left[\mathfrak{s}\left(\gamma,\theta\right)-\langle\gamma|\,\mu\rangle\right]\Big)-\operatorname{Re}\mathfrak{s}\left(\theta,\theta\right)+\operatorname{Re}\langle\theta|\,\mu\rangle\ \ ,$$

ce qui n'est possible que si

$$\mathfrak{s}\left(\gamma,\theta\right)-\langle\gamma|\,\mu\rangle=0 \quad \text{pour tout } \gamma\in\mathcal{H}\ .$$

L'existence peut se démontrer directement et de manière plus générale (cf. exercice 1.16). □

REMARQUE 1 L'équation

$$\mathfrak{s}\left(\gamma,\theta\right)=\langle\gamma|\,\mu\rangle \quad \text{pour tout } \gamma\in\mathcal{H}\ ,$$

est celle d'Euler associée à l'extrémalisation sur $\mathcal{H}$ de la fonction réelle

$$\gamma\longmapsto\frac{1}{2}\cdot\mathfrak{s}\left(\gamma,\gamma\right)-\operatorname{Re}\langle\gamma|\,\mu\rangle\ \ ,$$

plus précisément que θ en soit un point critique, c'est-à-dire que, pour tout $\gamma\in\mathcal{H}$, 0 soit un point critique de la fonction

$$f_\gamma : t\longmapsto\frac{1}{2}\cdot\mathfrak{s}\left(\theta+t\cdot\gamma,\theta+t\cdot\gamma\right)-\operatorname{Re}\langle\theta+t\cdot\gamma|\,\mu\rangle\ \ ,$$

i.e. $f_\gamma'(0)=0$. Mais

$$f_\gamma'(t)=\partial_t\left(\frac{1}{2}\cdot\mathfrak{s}\left(\theta+t\cdot\gamma,\theta+t\cdot\gamma\right)-\operatorname{Re}\langle\theta+t\cdot\gamma|\,\mu\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\mathfrak{s}\left(\partial_t\left[\theta+t\cdot\gamma\right],\theta+t\cdot\gamma\right)+\mathfrak{s}\left(\theta+t\cdot\gamma,\partial_t\left[\theta+t\cdot\gamma\right]\right)\right\}-\operatorname{Re}\langle\partial_t\left[\theta+t\cdot\gamma\right]|\,\mu\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\mathfrak{s}\left(\gamma,\theta+t\cdot\gamma\right)+\mathfrak{s}\left(\theta+t\cdot\gamma,\gamma\right)\right\}-\operatorname{Re}\langle\gamma|\,\mu\rangle=\operatorname{Re}\Big[\mathfrak{s}\left(\gamma,\theta+t\cdot\gamma\right)-\langle\gamma|\,\mu\rangle\Big]\ \ ,$$

ce qui nous conduit à l'équation

$$\operatorname{Re}\Big[\mathfrak{s}\left(\gamma,\theta\right)-\langle\gamma|\,\mu\rangle\Big]=0 \quad \text{pour tout } \gamma\in\mathcal{H}\ ,$$

et par suite le résultat. □

REMARQUE 2 Ces théorèmes conduisent aux méthodes dites variationnelles de résolution des équations aux dérivées partielles. Rappelons que l'équation d'Euler dans le cadre du principe de moindre action conduit aux équations de Lagrange de la mécanique.

1.7 Les espaces de Sobolev sur un intervalle

Dans ce paragraphe J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Rappelons la notion de fonction (localement) absolument continue et les résultats importants qui ont été démontrés dans le cours d'Analyse [17] : 15.19, 16.4 et 16.10.

DEFINITION 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, soit

$$1_{a,b} := \begin{cases} 1_{[a,b]} & \text{si} \quad a \leqslant b \\ -1_{[b,a]} & \phantom{\text{si}} \quad b < a \end{cases}$$

la *fonction caractéristique signée* .

LEMME *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.*

(i) Pour tout $a, b, c \in J$, on a

$$1_{a,b} + 1_{b,c} = 1_{a,c} \ .$$

(ii) Une fonction f sur J est localement λ_J-intégrable si, et seulement si, pour tout intervalle compact $[a, b] \subset J$, la fonction $1_{[a,b]} \cdot f$ est λ_J-intégrable.

(iii) Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ et $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$, respectivement $\varphi \in \mathcal{K}_+(J)$, alors $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. .

Etant donné $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, $\tau \in J$ et $c \in \mathbb{C}$, on considère la fonction

$$F : J \longrightarrow \mathbb{K} : t \longmapsto c + \int_\tau^t f(s)\, ds := c + \int 1_{\tau,t} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Alors

(iv) F est continue.

(v) F est croissante, si, et seulement si, $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. . En particulier pour que F soit constante, il faut et il suffit que que $f = 0$ λ_J-p.p. .

(vi) La classe de f est univoquement déterminée par F .

(vii) Si f est continue en t , alors F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$.

Bien que la démonstration ait été faite en 15.19, donnons quelques indications.

(a) C'est immédiat.

(b) La nécessité découle de la compacité d'un intervalle fermé, la suffisance du fait que J est localement compact.

(c) Ce point sera démontré de manière plus générale dans la proposition 1.15.

(d) Il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue.

(e) Si F est croissante, pour tout $s,t \in J$ tels que $s < t$, on a

$$0 \leqslant F(t) - F(s) = \int 1_{s,t} \cdot f \, d\lambda = \int 1_{[s,t]} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Par linéarité on obtient $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$, donc $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. , par (iii). La récipproque est immédiate.

(f) Si, pour tout $t \in J$, on a

$$F(t) = d + \int_{\widetilde{\tau}}^{t} g \quad \text{avec } g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \ ,$$

alors $F(\tau) = d + \int_{\widetilde{\tau}}^{\tau} g$, donc

$$F(t) = F(\tau) - \int 1_{\widetilde{\tau},\tau} \cdot g \, d\lambda_J + \int 1_{\widetilde{\tau},t} \cdot g \, d\lambda_J = F(\tau) + \int_{\tau}^{t} g$$

et par suite $\int_{\tau}^{t} (f - g) = 0$, donc $f = g$.

(g) Il suffit d'estimer en utilisant la continuité en t . □

DEFINITION 2 Nous dirons qu'une fonction F du type

$$F = F(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} f \quad \text{pour un } f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$$

est *(localement) absolument continue* . L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{AC}(J)$.
Nous dirons que f est la dérivée (en un sens généralisé) de F ; on la note ∂F .

Cette définition est bien posée puisque la fonction f est univoquement déterminée par F à égalité λ_J-presque partout. C'est une généralisation, puisque toute fonction g continûment dérivable est localement absolument continue :

$$g(t) = g(\tau) + \int_{\tau}^{t} g'(s) \, ds \ ,$$

par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (cours d'analyse 9.9). On a donc $\partial g = g'$. Ainsi $\mathcal{C}^{(1)}(J) \subset \mathcal{AC}(J) \subset \mathcal{C}(J)$.

EXEMPLE 1 On a $|\mathrm{id}|$, $\mathrm{id}^+ = \max(0, \mathrm{id}) \in \mathcal{AC}(\mathbb{R})$ et $\partial |\mathrm{id}| = \mathrm{signum}$, $\partial \, \mathrm{id}^+ = 1_{\mathbb{R}_+}$.

PROPOSITION *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ et $a, b \in J$. Alors*

(i) ***Intégration par parties***

$$\int_a^b \partial F \cdot G = \Big[F \cdot G \Big]_a^b - \int_a^b F \cdot \partial G \ .$$

En particulier $F \cdot G \in \mathcal{A}(J)$ et

$$\partial (F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \ .$$

(ii) ***Règle de substitution*** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\Phi : I \longrightarrow J$ une fonction localement absolument continue, $I(a,b)$ l'intervalle compact d'extrémités $a, b \in I$ et*

$$\zeta : \Phi(I(a,b)) \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

Si Φ est réelle croissante, alors l'image de $\partial\Phi \cdot \lambda_{I(a,b)}$ par Φ est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$ et ζ est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$-intégrable si, et seulement si, $\zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable. Dans ce cas on a

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} \zeta = \int_a^b \zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi \ .$$

Plus généralement si $\zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable, alors ζ est $1_{\Phi(a),\Phi(b)} \cdot \lambda_{\Phi([a,b])}$-intégrable (ou bien $\lambda_{I(\Phi(a),\Phi(b))}$-intégrable) et on a la même formule. Cette condition est en particulier satisfaite si $\partial\Phi \in \mathbf{L}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\lambda_J)$, i.e. si Φ est localement lipschitzienne.

(iii) Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\Phi : I \longrightarrow J$, $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions localement absolument continues. Si Φ est monotone ou $\partial\Phi \in \mathbf{L}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\lambda_J)$, plus généralement si $\partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est localement λ_I-intégrable, alors $G \circ \Phi$ est localement absolument continue et on a

$$\partial (G \circ \Phi) = \partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi \ .$$

Démonstration de (i) En exprimant F et G à l'aide de ∂F et respectivement ∂G on obtient des intégrales doubles. L'égalité découle alors du théorème de Fubini comme nous l'avons fait dans le cours d'Analyse [17], théorème 16.4.

Démonstration de (ii) Cf. cours d'Analyse [17], théorème 16.10.

Démonstration de (iii) C'est immédiat par (ii) (cours d'Analyse [17], corollaire 16.10 !). □

EXEMPLE 2 Si $F \in \mathcal{AC}(J)$, alors $\overline{F} \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial\left(\overline{F}\right) = \overline{\partial F}$. En particulier $|F|^2 \in \mathcal{AC}(J)$ et

$$\partial\left(|F|^2\right) = \partial\overline{F} \cdot F + \overline{F} \cdot \partial F = 2\,\mathrm{Re}\left(\partial\overline{F} \cdot F\right) \ .$$

C'est immédiat puisque

$$\overline{F} = \overline{F(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} f} = \overline{F}(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} \overline{f} \ . \quad \square$$

EXEMPLE 3 Si $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ et $G > 0$ sur J , alors $\frac{F}{G} \in \mathcal{AC}(J)$ et

$$\partial\frac{F}{G} = \frac{\partial F \cdot G - F \cdot \partial G}{G^2} \ .$$

En effet il suffit de montrer que $\frac{1}{G} \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial\frac{1}{G} = -\frac{\partial G}{G^2}$, donc, pour tout $t \in J$, que

$$\frac{1}{G(t)} = \frac{1}{G(\tau)} - \int_{\tau}^{t} \frac{\partial G}{G^2} \ .$$

Mais $\frac{\partial G}{G^2} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ et grâce à la règle de substitution on obtient

$$\int_{\tau}^{t} \frac{\partial G}{G^2} = \int_{G(\tau)}^{G(t)} \frac{1}{\mathrm{id}^2} = \left[-\frac{1}{\mathrm{id}}\right]_{G(\tau)}^{G(t)} = \frac{1}{G(\tau)} - \frac{1}{G(t)} \ . \quad \square$$

DEFINITION 3 Soient $\mathcal{AC}^{(0)}(J) := \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, $\partial^0 f := f$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{AC}^{(k+1)}(J) := \left\{ f \in \mathcal{AC}^{(k)}(J) \;\middle|\; \partial^k f \in \mathcal{AC}(J) \right\} \ ,$$

$$\partial^{k+1} f := \partial\left(\partial^k f\right)$$

et

$$\mathcal{H}^{(k)}(J) := \left\{ \xi \in \mathcal{AC}^{(k)}(J) \;\middle|\; \partial^j \xi \in \mathbf{L}^2(J) \text{ pour tout } j = 0, \ldots, k \right\} ,$$

l'espace de Sobolev d'ordre k . Nous munirons cet espace vectoriel du produit scalaire

$$(\cdot|\cdot)_{(k)} := \sum_{j=0}^{k} \left(\partial^j \xi \middle| \partial^j \xi \right) ,$$

dont la norme est

$$\|\xi\|_{2,(k)}^2 := \sum_{j=0}^{k} \left\| \partial^j \xi \right\|_2^2 .$$

On a

$$\mathcal{AC}^{(k+1)}(J) \subset \mathcal{C}^{(k)}(J) \subset \mathcal{AC}^{(k)}(J) ,$$

$\mathcal{H}^{(0)}(J) = \mathbf{L}^2(J)$ et

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) := \left\{ \xi \in \mathcal{AC}(J) \;\middle|\; \xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J) \right\} .$$

REMARQUE 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2 + b^2\right) ,$$

en particulier

$$\|\xi\|_2 + \|\partial\xi\|_2 \leqslant \sqrt{2} \cdot \|\xi\|_{2,(1)} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) .$$

En effet l'inégalité est équivalente à $(a-b)^2 \geqslant 0$! □

THEOREME *On a :*

(i) *Si $F \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial F \in \mathbf{L}^1(J)$, alors*

$$\lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} F(a) \quad \textit{et} \quad \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} F(b)$$

existent, i.e. F possède un prolongement continu à $J \cup \{\inf J, \sup J\}$, que nous noterons encore par F .

Si $c \in \{\inf J, \sup J\}$, on a

$$F(t) = F(c) + \int_c^t \partial F \quad \textit{pour tout } t \in J \cup \{\inf J, \sup J\} .$$

(ii) ***Généralisation de l'intégration par parties*** *Si $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial F \cdot G$, $F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J)$, alors*

$$\lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) \quad \textit{et} \quad \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b)$$

existent et on a

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b) - \lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) =$$

$$=: \Big[F \cdot G \Big]_{\inf J}^{\sup J} .$$

(iii) *Si* $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$ *, alors* ξ *possède un prolongement continu à* $J \cup \{\inf J, \sup J\}$ *. Si* $c \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$ *, on a*

$$\xi(c) = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) \subset \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right) \ ,$$

où $\overline{J}$ *désigne la fermeture de* J *dans* $\mathbb{R}$ *.*

(iv) ***Inégalité de Sobolev*** *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$ *, on a*

$$\|\xi\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2 \ ,$$

en particulier

$$\|\xi\|_\infty \leqslant \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right) \cdot \|\xi\|_{2,(1)} \ .$$

En outre l'injection canonique

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$$

et, pour tout $t \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$ *, la forme semi-linéaire*

$$|\varepsilon_t\rangle : \xi \longmapsto \langle \xi | \varepsilon_t\rangle := \overline{\xi(t)} : \mathcal{H}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont continues.

(v) $\mathcal{H}^{(k)}(J)$ *est, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, un espace de Hilbert.*
Les injections canoniques

$$\mathcal{H}^{(k+1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(k)}(J) : \xi \longmapsto \xi \ ,$$

ainsi que les applications de dérivation

$$\partial : \mathcal{H}^{(k+1)}(J) \longrightarrow \mathcal{H}^{(k)}(J) : \xi \longmapsto \partial\xi \ ,$$

sont continues.

Démonstration de (i) C'est immédiat en utilisant le théorème de Lebesgue : étant donné $t \in J$ et $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $c \in \{\inf J, \sup J\}$, on a

$$\lim_k F(t_k) = F(t) + \lim_k \int_t^{t_k} \partial F = F(t) + \lim_k \int_J 1_{t,t_k} \cdot \partial F =$$

$$= F(t) + \int_J \lim_k 1_{t,t_k} \cdot \partial F = F(t) + \int_J 1_{t,c} \cdot \partial F = F(t) + \int_t^c \partial F \ ,$$

puisque $\lim_k 1_{t,t_k} = 1_{t,c}$ λ_J-p.p. et $|1_{t,t_k} \cdot \partial F| \leqslant |\partial F| \in \mathbf{L}^1(J)$. Ainsi

$$F(t) = F(c) + \int_c^t \partial F ;$$

en passant à la limite cette formule est encore vraie pour $t \in \{\inf J, \sup J\}$.

Démonstration de (ii) On a

$$\partial(F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

d'où l'existence des limites par (i), donc

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim\nolimits_{a \to \inf J} \lim\nolimits_{b \to \sup J} \int_a^b \partial (F \cdot G) =$$

$$= \lim\nolimits_{a \to \inf J} \lim\nolimits_{b \to \sup J} ((F \cdot G)(b) - (F \cdot G)(a)) =$$

$$= \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b) - \lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) \ .$$

Démonstration de (iii) Si J est borné, on a $\mathbf{L}^2(J) \subset \mathbf{L}^1(J)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque pour $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$, on a

$$\int_J |\eta| = \int_J 1 \cdot |\eta| \leqslant \left(\int_J 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_J |\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ ,$$

d'où le résultat par (i).

Etant donné $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$, on a $\xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J)$, donc

$$\partial \left(|\xi|^2 \right) = \partial \left(\overline{\xi} \cdot \xi \right) = \overline{\partial \xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial \xi \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

et si $c \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$, alors $|\xi|^2$ possède une limite $|\xi|^2(c)$ en c qui ne peut être que 0 , puisque $|\xi|^2 \in \mathbf{L}^1(J)$. Mais ceci montre que $\xi(c) = 0$.

Démonstration de (iv) Soit $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$. Pour tout $a, b \in J$, nous pouvons supposer que $a < b$, il existe $\tau \in \left]a, b\right[$ tel que

$$|\xi(\tau)|^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |\xi|^2 \ ,$$

donc

$$|\xi(\tau)|^2 \leqslant \frac{1}{|b-a|} \cdot \|\xi\|_2^2 \ .$$

Puisque $|\xi|^2 = \overline{\xi} \cdot \xi \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial \left(\overline{\xi} \cdot \xi \right) = \partial \overline{\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial \xi \in \mathbf{L}^1(J)$, (i) montre que pour tout $t \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$, on peut écrire

$$|\xi(t)|^2 = |\xi(\tau)|^2 + \int_\tau^t \partial \left(\overline{\xi} \cdot \xi \right) \leqslant |\xi(\tau)|^2 + \left| \int_\tau^t \left(\partial \overline{\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial \xi \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi(\tau)|^2 + 2 \cdot \int |\xi| \cdot |\partial \xi| \leqslant \frac{1}{|b-a|} \cdot \|\xi\|_2^2 + 2 \cdot \|\xi\|_2 \cdot \|\partial \xi\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left[\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\varepsilon} \right] \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial \xi\|_2 \right)^2 \ ,$$

donc que

$$\|\xi\|_{\infty, J \cup \{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left[\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\varepsilon} \right] \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial \xi\|_2 \ .$$

En passant à la limite on obtient

$$\|\xi\|_{\infty, J \cup \{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial \xi\|_2 \ .$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$,

$$\|\xi\|_{\infty,J\cup\{\inf J,\sup J\}} \leqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right)\cdot\left(\|\xi\|_2+\|\partial\xi\|_2\right) \leqslant \sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right)\cdot\|\xi\|_{2,(1)}$$

par la remarque 1 ci-dessus. Ceci montre que l'injection canonique $\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$ et $|\varepsilon_t\rangle$ sont continues, puisque

$$|\langle\xi|\,\varepsilon_t\rangle| \leqslant \|\xi\|_{\infty,J\cup\{\inf J,\sup J\}} \ .$$

Démonstration de (v) Montrons que $\mathcal{H}^{(k)}(J)$ est complet. Puisque nous savons que $\mathbf{L}^2(J)$ est complet (cours d'Analyse [17], théorème de Riesz-Fischer 15.14), nous pouvons supposer que $k \geqslant 1$ .Si $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_{(k),2}$, alors quel que soit $j = 0,\ldots,k$ la suite $(\partial^j\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(J)$, donc converge vers $\eta_j \in \mathbf{L}^2(J)$. Comme $(\partial^{j-1}\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^{(1)}(J)$, l'inégalité de Sobolev (iv) montre que c'est aussi une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^b(J)$; cette suite converge donc uniformément. Mais par le théorème de Riesz-Fischer il existe une sous-suite de $(\partial^{j-1}\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente λ_J-p.p. vers η_{j-1} , qui est donc égale à la limite dans $\mathcal{C}^b(J)$ en ayant au besoin changer de représentant. Etant donné $\tau \in J$, pour tout $t \in J$, il vient alors

$$\eta_{j-1}(t) = \lim_k \partial^{j-1}\xi_k(t) = \lim_k\left(\partial^{j-1}\xi_k(\tau)+\int_\tau^t \partial^j\xi_k\right) =$$

$$= \eta_{j-1}(\tau)+\lim_k\left(1_{\tau,t}\middle|\,\partial^j\xi_k\right)_{\mathbf{L}^2(J)} = \eta_{j-1}(\tau)+\left(1_{\tau,t}\middle|\,\lim_k\partial^j\xi_k\right)_{\mathbf{L}^2(J)} =$$

$$= \eta_{j-1}(\tau)+\int_\tau^t \eta_j \ ,$$

ce qui montre que η_{j-1} est localement absolument continue et que $\partial\eta_{j-1} = \eta_j$. Nous avons utilisé la continuité du produit scalaire (cf. remarque 1.1.2). Ainsi $\xi := \eta_0 \in \mathcal{H}^{(k)}(J)$, $\partial^j\xi = \eta_j$ et

$$\|\xi_k-\xi\|_{2,(k)}^2 = \sum_{j=0}^k \left\|\partial^j\xi_k-\partial^j\xi\right\|_2^2 = \sum_{j=0}^k \left\|\partial^j\xi_k-\eta_j\right\|_2^2 \to 0 \ ,$$

donc $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ dans $\mathcal{H}^{(k)}(J)$. □

REMARQUE 2 Est-ce que la constante $\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}+\frac{1}{\varepsilon}$ dans l'inégalité de Sobolev est la plus petite constante C_ε possible, donc telle que

$$\|\xi\|_\infty \leqslant C_\varepsilon\cdot\|\xi\|_2+\varepsilon\cdot\|\partial\xi\|_2 \ ?$$

Considérons sur l'intervalle J la fonction constante 1 . On a $\|1\|_\infty = 1$, $\|1\|_2 = \sqrt{\lambda(J)}$ et $\|\partial 1\|_2 = 0$. Ceci montre que $C_\varepsilon \geqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}$.

DEFINITION 4 On pose

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(J) = \left\{\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \;\middle|\; \xi(\inf J) = \xi(\sup J) = 0\right\} \ .$$

COROLLAIRE *$\mathcal{H}_0^{(1)}(J)$ est un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}^{(1)}(J)$.*

*Si J est borné, on a l'**inégalité de Poincaré***

$$\|\xi\|_2 \leqslant \frac{\lambda(J)}{\sqrt{2}} \cdot \|\partial\xi\|_2 \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(J) \ .$$

En effet

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(J) = \operatorname{Ker} |\varepsilon_{\inf J}\rangle \cap \operatorname{Ker} |\varepsilon_{\sup J}\rangle$$

est un sous-espace vectoriel fermé, donc complet.

Pour tout $t \in J$, on a

$$|\xi(t)| = |\xi(t) - \xi(\inf J)| = \left|\int_{\inf J}^{t} \partial\xi\right| \leqslant \int_J 1_{\inf J,t} \cdot |\partial\xi| \leqslant \|1_{\inf J,t}\|_2 \cdot \|\partial\xi\|_2 =$$

$$= \sqrt{t - \inf J} \cdot \|\partial\xi\|_2 \ ,$$

donc

$$\|\xi\|_2^2 \leqslant \left(\int_J (t - \inf J)\ dt\right) \cdot \|\partial\xi\|_2^2 = \left[\frac{t^2}{2} - \inf J \cdot t\right]_{\inf J}^{\sup J} \cdot \|\partial\xi\|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sup J - \inf J)^2 \cdot \|\partial\xi\|_2^2 \ . \quad \square$$

1.8 Problèmes aux limites sur un intervalle

DEFINITION On désigne par $\mathcal{K}^{(1)}(J)$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables à support compact dans J et $\partial : \mathcal{K}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathcal{K}(J) : f \longmapsto \partial f$ l'application de dérivation.

PROPOSITION

(i) *Il existe* $\chi \in \mathcal{K}(J)$ *tel que*

$$\mathcal{K}(J) = \partial\mathcal{K}^{(1)}(J) \oplus \mathbb{K} \cdot \chi \ .$$

(ii) *Si* $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *et* $\int \partial\varphi \cdot f \, d\lambda_J = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$ *, il existe* $c \in \mathbb{K}$ *tel que* $f = c$ *.*

(iii) *Si* $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *et* $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$ *, alors* $f = 0$ *.*

La démonstration est laissée en exercice. $\square$

EXEMPLE 1 Etant donné $\rho, p \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ tels que $\rho, p > 0$ sur $[0,1]$ et $q \in \mathcal{C}_+([0,1])$, considérons le *problème* (inhomogène) *aux limites homogènes* suivant :

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) + q \cdot f = g \quad \text{sur } J \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0 \ . \tag{$*$}$$

Si $f \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ est solution de $(*)$, on dit que c'est une *solution classique* . Remarquons que l'existence d'une solution classique entraîne nécessairement $g \in \mathcal{C}([0,1])$.

Par opposition on dit qu'une solution $\theta \in \mathcal{H}^{(1)}_0(]0,1[)$ de

$$\int_0^1 q \cdot \overline{\gamma} \cdot \theta \cdot \rho + \int_0^1 p \cdot \overline{\partial\gamma} \cdot \partial\theta \cdot \rho = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \cdot \rho \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1)}_0(]0,1[) \tag{$**$}$$

est *faible* . Ici il suffit que l'on ait $\rho, p \in \mathcal{AC}([0,1])$ et $q, g \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$ tels que $\rho, p > 0$ sur $[0,1]$ et $q \geqslant 0$!

Remarquons tout d'abord qu'une solution classique est solution faible : on a évidemment $f \in \mathcal{H}^{(1)}_0(]0,1[)$ et en en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 q \cdot \overline{\gamma} \cdot f \cdot \rho + \int_0^1 p \cdot \overline{\partial\gamma} \cdot \partial f \cdot \rho = \int_0^1 q \cdot \overline{\gamma} \cdot f \cdot \rho + \Big[p \cdot \overline{\gamma} \cdot \partial f \cdot \rho\Big]_0^1 - \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) =$$

$$= \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \left(q \cdot f - \frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f)\right) \cdot \rho = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \cdot \rho \ .$$

Réciproquement si $\theta \in \mathcal{H}^{(1)}_0(]0,1[)$ est une solution faible, en posant

$$H := \int_0^{\diamond} (g - q \cdot \theta) \cdot \rho \in \mathcal{AC}(]0,1[) \ ,$$

on obtient

$$\int_0^1 p \cdot \overline{\partial\gamma} \cdot \partial\theta \cdot \rho = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot (g - q \cdot \theta) \cdot \rho = \Big[\overline{\gamma} \cdot H\Big]_0^1 - \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot H = -\int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot H \ ,$$

donc

$$\partial\theta = \frac{-H+c}{p\cdot\rho} \in \mathcal{AC}\left(]0,1[\right)$$

pour une constante $c \in \mathbb{K}$ par la proposition (ii) et l'exemple 1.7.3. Ceci montre que $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}\left(]0,1[\right)$ et intégrant le membre de gauche par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{\gamma}\cdot\left[g - q\cdot\theta + \frac{1}{\rho}\cdot\partial\left(\rho\cdot p\cdot\partial\theta\right)\right]\cdot\rho = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}_0^{(1)}\left(]0,1[\right) \supset \mathcal{K}^{(1)}\left(]0,1[\right)\ .$$

On en déduit

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\partial\left(\rho\cdot p\cdot\partial\theta\right) + q\cdot\theta = g \quad \text{dans } \mathbf{L}^2\left(]0,1[\right)$$

grâce à la proposition (iii).

Si en plus $\rho, p \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$ et $g \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$, on a $H \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$, donc $\partial\theta \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$, puis $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}\left([0,1]\right)$, et par suite $-\frac{1}{\rho}\cdot\partial\left(\rho\cdot p\cdot\partial\theta\right) + q\cdot\theta = g$ partout, puisque cette fonction est continue. Ceci montre que la solution faible θ est une solution classique.

Montrons maintenant qu'il existe une unique solution faible. Il suffit de constater que $(**)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{s}\left(\gamma,\theta\right) = \left\langle\gamma\right|\left. g\cdot\rho\right\rangle\ ,$$

en définissant

$$\mathfrak{s} : (\gamma,\xi) \longmapsto \int_0^1 q\cdot\overline{\gamma}\cdot\xi\cdot\rho + \int_0^1 p\cdot\overline{\partial\gamma}\cdot\partial\xi\cdot\rho : \mathcal{H}_0^{(1)}\left(]0,1[\right)\times\mathcal{H}_0^{(1)}\left(]0,1[\right) \longrightarrow \mathbb{K}$$

et

$$\left|g\right\rangle : \gamma \longmapsto \int_0^1 \overline{\gamma}\cdot g\cdot\rho : \mathcal{H}_0^{(1)}\left(]0,1[\right) \longrightarrow \mathbb{K}\ .$$

La forme sesquilinéaire $\mathfrak{s}$ est bornée, puisque

$$\left|\mathfrak{s}\left(\gamma,\xi\right)\right| \leqslant \left\|q\cdot\rho\right\|_\infty\cdot\left\|\gamma\right\|_2\cdot\left\|\xi\right\|_2 + \left\|p\cdot\rho\right\|_\infty\cdot\left\|\partial\gamma\right\|_2\cdot\left\|\partial\xi\right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant cst\cdot\Big(\left\|\gamma\right\|_2\cdot\left\|\xi\right\|_2 + \left\|\partial\gamma\right\|_2\cdot\left\|\partial\xi\right\|_2\Big) \leqslant cst\cdot\left\|\gamma\right\|_{2,(1)}\cdot\left\|\xi\right\|_{2,(1)}\ ,$$

tandis que la forme semi-linéaire $\left|g\right\rangle$ est continue, puisque

$$\left|\left\langle\gamma\right|\left. g\cdot\rho\right\rangle\right| \leqslant \left\|\gamma\right\|_2\cdot\left\|g\cdot\rho\right\|_2 \leqslant \left\|\rho\right\|_\infty\cdot\left\|g\right\|_2\cdot\left\|\gamma\right\|_{2,(1)}\ .$$

D'autre part $\mathfrak{s}$ est évidemment hermitienne et elle est coercitive, car pour un $\varepsilon > 0$, on a $\rho, p \geqslant \varepsilon$ sur $[0,1]$, donc

$$\mathfrak{s}\left(\xi,\xi\right) = \int_0^1 q\cdot\left|\xi\right|^2\cdot\rho + \int_0^1 p\cdot\left|\partial\xi\right|^2\cdot\rho \geqslant \varepsilon^2\cdot\left\|\partial\xi\right\|_2^2 \geqslant \frac{2}{3}\cdot\varepsilon^2\cdot\left\|\xi\right\|_{2,(1)}^2$$

par l'inégalité de Poincaré.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lax-Milgram 1.6 à la forme hermitienne $\mathfrak{s}$. Nous avons donc prouver :

Pour tout $\rho, p \in \mathcal{AC}\left([0,1]\right)$ *et* $q, g \in \mathbf{L}^2\left(]0,1[\right)$ *tels que* $\rho, p > 0$ *sur* $[0,1]$ *et* $q \geqslant 0$ *, il existe une unique solution* $\theta \in \mathcal{H}_0^{(1)}\left(]0,1[\right)$ *de*

$$\int_0^1 q\cdot\overline{\gamma}\cdot\theta\cdot\rho + \int_0^1 p\cdot\overline{\partial\gamma}\cdot\partial\theta\cdot\rho = \int_0^1 \overline{\gamma}\cdot g\cdot\rho \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}_0^{(1)}\left(]0,1[\right)$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(q\cdot|\gamma|^2 + p\cdot|\partial\gamma|^2\right)\cdot\rho - \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{\gamma}\cdot g\cdot\rho$$

sur $\mathcal{H}_0^{(1)}\left(]0,1[\right)$ *. On* $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}\left(]0,1[\right)$ *et c'est une solution de* $(*)$ *dans* $\mathbf{L}^2\left(]0,1[\right)$ *.*

Si en plus $\rho, p \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$ *et* $q, g \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$ *, alors* $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}\left([0,1]\right)$ *et c'est une solution (classique) de* $(*)$ *.*

EXEMPLE 2 Considérons maintenant le problème aux limites inhomogènes suivant :

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\partial\left(\rho\cdot p\cdot\partial f\right) + q\cdot f = g \quad \text{sur }]0,1[\quad \text{et} \quad f(0) = \alpha \quad , \quad f(1) = \beta \tag{$\circledast$}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Dans $\mathcal{H}^{(1)}\left(]0,1[\right)$ on considère le sous-espace affine

$$\mathcal{G} := \left\{\gamma \in \mathcal{H}^{(1)}\left(]0,1[\right) \mid \gamma(0) = \alpha \ ,\ \gamma(1) = \beta\right\} \ ,$$

qui est évidemment un ensemble convexe fermé.

Si $f \in \mathcal{C}^{(2)}\left([0,1]\right)$ est une solution classique de $(\circledast)$, donc $g \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$, ou plus généralement si $\theta \in \mathcal{H}^2\left(]0,1[\right)$ est solution de $(\circledast)$ dans $\mathbf{L}^2\left(]0,1[\right)$, donc $g \in \mathbf{L}^2\left(]0,1[\right)$, en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 q\cdot\overline{(\theta-\gamma)}\cdot\theta\cdot\rho + \int_0^1 p\cdot\overline{\partial(\theta-\gamma)}\cdot\partial\theta\cdot\rho =$$

$$= \int_0^1 q\cdot\overline{(\theta-\gamma)}\cdot\theta\cdot\rho + \left[p\cdot\overline{(\theta-\gamma)}\cdot\partial\theta\cdot\rho\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot\partial\left(\rho\cdot p\cdot\partial\theta\right) =$$

$$= \int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot\left(q\cdot\theta - \frac{1}{\rho}\cdot\partial\left(\rho\cdot p\cdot\partial\theta\right)\right)\cdot\rho = \int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot g\cdot\rho \ ,$$

donc en particulier

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 q\cdot\overline{(\theta-\gamma)}\cdot\theta\cdot\rho + \int_0^1 p\cdot\overline{\partial(\theta-\gamma)}\cdot\partial\theta\cdot\rho\right) \geqslant \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot g\cdot\rho \ .$$

Ceci nous conduit à utiliser le théorème de Stampacchia :

Pour tout $\rho, p \in \mathcal{AC}\left([0,1]\right)$ *et* $q, g \in \mathbf{L}^2\left(]0,1[\right)$ *, tels que* $\rho, p > 0$ *sur* $[0,1]$ *et* $q \geqslant 0$ *, et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *, il existe une unique solution* $\theta \in \mathcal{G}$ *de*

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 q\cdot\overline{(\theta-\gamma)}\cdot\theta\cdot\rho + \int_0^1 p\cdot\overline{\partial(\theta-\gamma)}\cdot\partial\theta\cdot\rho\right) \geqslant \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)}\cdot g\cdot\rho \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \tag{$\circledast\circledast$}$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(q\cdot|\gamma|^2 + p\cdot|\partial\gamma|^2\right)\cdot\rho - \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{\gamma}\cdot g\cdot\rho$$

sur $\mathcal{G}$ *. On a* $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}\left(]0,1[\right)$ *et c'est une solution de* $(\circledast)$ *dans* $\mathbf{L}^2\left(]0,1[\right)$ *.*

Si en plus $\rho, p \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$ *et* $q, g \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$ *, alors* $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}\left([0,1]\right)$ *et c'est une solution classique de* $(\circledast)$ *.*

Comme dans l'exemple précédent il suffit d'utiliser la forme hermitienne coercitive

$$\mathfrak{s} : (\gamma, \xi) \longmapsto \int_0^1 q \cdot \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \xi \cdot \rho + \int_0^1 p \cdot \overline{\partial (\theta - \gamma)} \cdot \partial\xi \cdot \rho : \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[) \times \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{K} ,$$

d'où la première partie. En faisant $\gamma := \theta \pm \eta$ avec $\eta \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ dans $(\circledast\circledast)$, il vient

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1 q \cdot \overline{\eta} \cdot \xi \cdot \rho + \int_0^1 p \cdot \overline{\partial\eta} \cdot \partial\xi \cdot \rho\right) = \mathrm{Re} \int_0^1 \overline{\eta} \cdot g \cdot \rho \ .$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en remplaçant η pat $i \cdot \eta$ on obtient l'égalité des parties imaginaires. Les dernières assertions se montrent alors comme ci-dessus. $\square$

REMARQUE Il est possible de ramener le problème aux limites inhomogènes ci-dessus à un problème aux limites homogènes, ce qui permet de le résoudre seulement à l'aide du théorème de Lax-Milgram. En effet il existe une fonction $\chi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ telles que $\chi(0) = \alpha$ et $\chi(1) = \beta$ et en faisant le changement de fonctions inconnue $\eta = \theta - \chi$, on voit que θ est solution de $(\circledast)$ si, et seulement si, η est solution de $(*)$. Ceci n'est malheureusement plus possible en dimension supérieure sans hypothèses restrictives sur la régularité du bord ou sur la fonction définie sur ce bord.

1.9 Sommes hilbertiennes

Nous allons maintenant généraliser le théorème 15.18 du cours d'Analyse [17] sur les bases hilbertiennes.

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien, $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels complets deux à deux orthogonaux, P_j l'orthoprojecteur de F sur $\mathcal{H}_j$, $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par les $\mathcal{H}_j$ et $\xi \in F$.*

Alors

$$\mathcal{G} = \overline{\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j} \ ,$$

*la famille $(P_j\xi)_{j\in J}$ est de absolument de carré sommable, i.e. $\left(\|P_j\xi\|^2\right)_{j\in J}$ est sommable, l'ensemble $\{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ est dénombrable et si $\sigma : I \longrightarrow \{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ en est une énumération, on a l'**inégalité de Bessel***

$$\sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 = \sum_{l=0}^{\sup I} \left\|P_{\sigma(l)}\xi\right\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ .$$

En outre les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\xi \in \mathcal{G}$.

(ii) ***Egalité de Parseval***

$$\sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 = \|\xi\|^2 \ .$$

(iii) La famille $(P_j\xi)_{j\in J}$ est sommable, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ satisfaisant à $L \supset K_\varepsilon$, on ait

$$\left\|\sum_{j\in L} P_j\xi - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

(iv) Pour toute énumération $\sigma : I \longrightarrow \{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ la série $\sum_{l=0}^{\sup I} P_{\sigma(l)}\xi$ est convergente, et on a

$$\xi = \sum_{l=0}^{\sup I} P_{\sigma(l)}\xi \ .$$

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(J)$ soit $\mathcal{H}_K := \sum_{j\in K} \mathcal{H}_j$. Si $L \in \mathfrak{K}(J)$ est tel que $K \cap L = \emptyset$, alors $\mathcal{H}_K \perp \mathcal{H}_L$, donc en particulier $\mathcal{H}_K \cap \mathcal{H}_L = \{0\}$. Ceci montre que la somme des $\mathcal{H}_j$, i.e. le sous-espace vectoriel engendré par les $\mathcal{H}_j$, est directe. On a donc bien $\mathcal{G} = \overline{\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j}$. D'autre part le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_K = \boxplus_{j\in K} \mathcal{H}_j$ est complet par l'exercice 1.4.1.b, et en posant $P_K := P_{\mathcal{H}_K}$, on a

$$P_K\xi = \sum_{j\in K} P_j\xi \ .$$

Grâce à l'égalité de Pythagore, on obtient

$$\sum_{j\in K}\|P_j\xi\|^2 = \left\|\sum_{j\in K}P_j\xi\right\|^2 = \|P_K\xi\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ , \tag{$*$}$$

puisque $\|P_K\| \leqslant 1$ par le théorème de la projection 1.4.iv. On en déduit évidemment l'inégalité de Bessel et les premières assertions à l'aide du lemme 1.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si l'égalité de Parseval est satisfaite, pour tout $\varepsilon > 0$, grâce à l'égalité dans $(*)$ et la propriété d'approximation du supremum, il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que

$$\|P_K\xi\|^2 = \sum_{j\in K}\|P_j\xi\|^2 \geqslant \|\xi\|^2 - \varepsilon^2$$

pour toute partie $K \in \mathfrak{K}(J)$, $K \supset K_\varepsilon$. Comme $P_K\xi \perp (P_K\xi - \xi)$, il vient alors

$$\|P_K\xi - \xi\|^2 = \|\xi\|^2 - \|P_K\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

par l'égalité de Pythagore, donc (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $k \geqslant N_\varepsilon := \max\sigma^{-1}(K_\varepsilon)$, on a $L := \sigma(\{0,\ldots,k\}) \supset K_\varepsilon$, donc

$$\left\|\sum_{l=0}^{k}P_{\sigma(l)}\xi - \xi\right\| = \left\|\sum_{j\in L}P_j\xi - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) C'est évident, puisque $\mathcal{G}$ est fermé et $\sum_{l=0}^{k}P_{\sigma(l)}\xi \in \mathcal{G}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Par définition de $\mathcal{G}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(J)$, $(\eta_j)_{j\in K}$ tels que $\eta_j \in \mathcal{H}_j$ et

$$\left\|\sum_{j\in K}\eta_j - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Puisque $P_K\xi$ est la meilleure approximation de ξ par un élément de $\mathcal{H}_K$ par le théorème de la projection 1.4.i, on a

$$\|P_K\xi - \xi\| \leqslant \left\|\sum_{j\in K}\eta_j - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Utilisant à nouveau l'égalité de Pythagore et $(*)$, on obtient

$$\|\xi\|^2 = \|P_K\xi - \xi\|^2 + \|P_K\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \sum_{j\in K}\|P_j\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \sum_{j\in J}\|P_j\xi\|^2 \ ,$$

d'où l'égalité de Parseval. □

DEFINITION Nous écrirons

$$\mathcal{G} = \boxplus_{j\in J}\mathcal{H}_j \ ,$$

et nous dirons que c'est une *décomposition hilbertienne* de $\mathcal{G}$, ou encore que $\mathcal{G}$ est la *somme hilbertienne* de $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$.

Nous utilisons le signe $\boxplus$ pour montrer que cette décomposition est orthogonale et que l'on a l'égalité de Parseval, généralisation de celle de Pythagore.

PROPOSITION *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de $\mathcal{H}$. Alors toute famille $\left(\xi_j\right)_{j\in J}$, telle que $\xi_j \in \mathcal{H}_j$ pour tout $j \in J$ et $\sum_{j\in J} \left\|\xi_j\right\|^2 < \infty$, est sommable dans $\mathcal{H}$. Si $\xi := \sum_{j\in J} \xi_j$, on a $\xi_j = P_{\mathcal{H}_j}\xi$ pour tout $j \in J$.*

Etant donné une énumération σ de $\left\{j \in J \mid \left\|\xi_j\right\| > 0\right\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\sum_{l=0}^{k} \xi_{\sigma(l)}\right\|^2 = \sum_{l=0}^{k} \left\|\xi_{\sigma(l)}\right\|^2 \ .$$

Le lemme montre alors que la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}$ satisfait au critère de Cauchy (cf. cours d'Analyse [17], remarque 10.7). Posons $\xi := \sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}$. Pour tout $j \in J$, la continuité de $P_j := P_{\mathcal{H}_j}$ nous permet d'écrire

$$P_j\xi = P_j\left(\sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}\right) = \sum_{l=0}^{\sup I} P_j\left(\xi_{\sigma(l)}\right) = \xi_j \ .$$

Le théorème montre alors que $\left(\xi_j\right)_{j\in J}$ est sommable, que

$$\xi = \sum_{j\in J} P_j\xi = \sum_{j\in J} \xi_j$$

et que ξ ne dépend pas de l'énumération choisie. $\square$

Le théorème et la proposition peuvent être résumés dans le

SCOLIE *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de $\mathcal{H}$.*

$$\xi \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 < \infty$$

$$\xi \in \boxplus_{j\in J} \mathcal{H}_j \quad \Longrightarrow \quad \xi = \sum_{j\in J} P_j\xi \quad \textit{et} \quad \|\xi\|^2 = \sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2$$

$$\xi := \sum_{j\in J} \xi_j \in \boxplus_{j\in J} \mathcal{H}_j \quad \textit{et} \quad \|\xi\|^2 = \sum_{j\in J} \left\|\xi_j\right\|^2 \quad \Longleftarrow \quad \xi_j \in \mathcal{H}_j \quad \textit{et} \quad \sum_{j\in J} \left\|\xi_j\right\|^2 < \infty$$

EXERCICE Pour toute famille $\left(\xi_j\right)_{j\in J}$ sommable d'un espace de Hilbert, la famille

$$\left(\left\|\xi_j\right\|^2\right)_{j\in J}$$

est sommable dans $\mathbb{R}$.

1.10 Bases hilbertiennes

DEFINITION 1 Soit F un espace préhilbertien. Nous dirons qu'une famille $(\epsilon_x)_{x\in X} \subset F$ est un *système orthonormé* si l'on a

$$(\epsilon_x|\,\epsilon_y) = \delta_{x,y} \quad \text{pour tout } x, y \in X \ .$$

On dit que c'est une *base hilbertienne* si en plus $(\epsilon_x)_{x\in X}$ est total dans F .

Si $(\epsilon_x)_{x\in X}$ est un système orthonormé, alors $(\mathbb{K}\cdot\epsilon_x)_{x\in X}$ est évidemment une famille de sous-espaces vectoriels complets, et il sont deux à deux orthogonaux. D'après l'exemple 1.4.2 , pour tout $\xi \in F$ et tout $x \in X$, on a

$$P_{\mathbb{K}\cdot\epsilon_x}\xi = (\epsilon_x|\,\xi)\cdot\epsilon_x \quad \text{pour tout } x \in X \ .$$

Si $(\epsilon_x)_{x\in X}$ est une base hilbertienne, on obtient

$$F = \boxplus_{x\in X} \mathbb{K}\cdot\epsilon_x \ .$$

par le théorème 1.9. Plus généralement on retrouve le théorème 15.18 du cours d'Analyse [17] :

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien et $(\epsilon_x)_{x\in X}$ un système orthonormé dans F .*
On a l' ***inégalité de Bessel***

$$\sum_{x\in X} |(\epsilon_x|\,\xi)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ ,$$

et les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\xi \in \boxplus_{x\in X} \mathbb{K}\cdot\epsilon_x \ .$$

(ii) ***Egalité de Parseval***

$$\sum_{x\in X} |(\epsilon_x|\,\xi)|^2 = \|\xi\|^2 \ .$$

(iii) La famille $((\epsilon_x|\,\xi)\cdot\epsilon_x)_{x\in X}$ est sommable et

$$\xi = \sum_{x\in X} (\epsilon_x|\,\xi)\cdot\epsilon_x \ .$$

D'autre part soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\epsilon_x)_{x\in X}$ un système orthonormé dans $\mathcal{H}$. Pour toute famille $(\alpha_x)_{x\in X} \subset \mathbb{K}$ telle que $\sum_{x\in X} |\alpha_x|^2 < \infty$, la famille $(\alpha_x\cdot\epsilon_x)_{x\in X}$ est sommable dans $\mathcal{H}$ et si $\xi := \sum_{x\in X} \alpha_x\cdot\epsilon_x$, on a $\alpha_x = (\epsilon_x|\,\xi)$ pour tout $x \in X$.

DEFINITION 2 Par analogie avec le second exemple qui va suivre, nous dirons que le nombre $(\epsilon_x|\,\xi)$ est le *x-ième coefficient de Fourier* de ξ dans le système orthonormé $(\epsilon_x)_{x\in X}$.

EXEMPLE 1 Soit X un ensemble. Pour tout $x \in X$ considérons la fonctions caractéristique $1_{\{x\}} \in \ell^2(X)$; on a

$$1_{\{x\}}(y) := \delta_{x,y} \quad \text{pour tout } y \in X \ .$$

La famille $\left(1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(X)$.

On vérifie immédiatement que cette famille est orthonormée. Il nous reste donc à prouver qu'elle est totale. Mais par le corollaire 1.4, il nous suffit de montrer que, pour tout $f \in \ell^2(X)$ tel que $f \perp 1_{\{x\}}$ pour tout $x \in X$, on a $f = 0$. Mais

$$0 = \left(1_{\{x\}} \middle| f\right) = \sum_{y\in X} \overline{1_{\{x\}}(y)} \cdot f(y) = f(x) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 Par ce qui précède, on en déduit que, pour tout $f \in \ell^2(X)$, la famille $\left(f(x) \cdot 1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ est sommable et

$$f = \sum_{x\in X} f(x) \cdot 1_{\{x\}} \ .$$

Si $(\epsilon_x)_{x\in X}$ est une base hilbertienne d'un espace préhilbertien F , alors l'application

$$F \longrightarrow \ell^2(X) : \xi \longmapsto \left((\epsilon_x| \xi)\right)_{x\in X}$$

est une isométrie, ceci n'étant qu'une reformulation de l'égalité de Parseval. Elle est surjective si, et seulement si, F est un espace de Hilbert.

EXEMPLE 2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ soit

$$e_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto e^{2\pi i k x} \ .$$

La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2([0,1])$.

Ceci a déjà été démontré dans le cours d'Analyse [17], exemple 15.17. Rappelons que la partie difficile est de prouver que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale dans $\mathbf{L}^2([0,1])$: on constate tout d'abord que l'ensemble des fonctions de la forme $1_{[0,a]}$ pour $0 < a \leqslant 1$ est total dans $\mathbf{L}^2([0,1])$, puis que

$$1_{[0,a]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(e_k \middle| 1_{[0,a]}\right) \cdot e_k$$

car

$$\left\|1_{[0,a]}\right\|_2^2 = a = a^2 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi k a}{k^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left(e_k \middle| 1_{[0,a]}\right)\right|^2$$

(cf. applications 9.16 et 10.9).

On peut aussi utiliser le théorème de Stone-Weierstraß formulé ci-dessous. On remarque tout d'abord que les applications

$$\mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2(]0,1[) : f \longmapsto f_{|]0,1[}$$

et

$$\mathbf{L}^2\left(\frac{1}{2\pi} \cdot \lambda_{\mathbb{U}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(]0,1[) : f \longmapsto f \circ \exp(2\pi i \cdot \diamond) \ ,$$

sont des isométries telles que

$$\mathrm{id}^k \circ \exp = e_{k|]0,1[} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

puisque $\{1\}$ est $\lambda_{\mathbb{U}}$-négligeable et

$$\exp(2\pi i \cdot \diamond) : x \longmapsto e^{2\pi i x} :]0,1[\longrightarrow \mathbb{U} \setminus \{1\}$$

est bijective. Mais le sous-espace vectoriel engendré par $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une sous-algèbre unifère de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$. Elle est involutive, puisque

$$\overline{\mathrm{id}^k} = \mathrm{id}^{-k} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

et id sépare les points de $\mathbb{U}$. Elle est donc dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Comme $\|\cdot\|_{2,\frac{1}{2\pi}\cdot\lambda_{\mathbb{U}}} \leqslant \|\cdot\|_\infty$, ce sous-espace vectoriel est aussi dense dans $\mathbf{L}^2\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\lambda_{\mathbb{U}}\right)$, ce qui finit de prouver que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est total dans $\mathbf{L}^2([0,1])$.

THEOREME (de Stone-Weierstraß) *Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre involutive contenant 1 et séparant les points de X , i.e. telle que pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$ il existe $a \in \mathcal{A}$ satisfaisant à $a(x) \neq a(y)$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.*

1.11 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit F un espace préhilbertien et $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants de F . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{G}_n := \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{K} \cdot \xi_k \ .$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$. On démontre par récurrence qu'il est complet dans F et en définissant $\epsilon_0 := \xi_0 \in \mathcal{G}_0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon_{n+1} := \xi_{n+1} - P_{\mathcal{G}_n}\xi_{n+1} \ ,$$

on a

$$\epsilon_{n+1} \in \mathcal{G}_{n+1} \quad \text{et} \quad \epsilon_{n+1} \perp \mathcal{G}_n \ ,$$

donc $\left(\frac{\epsilon_k}{\|\epsilon_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé dans F et $\left(\frac{\epsilon_k}{\|\epsilon_k\|}\right)_{k=0,\ldots,n}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{G}_n$.

En effet $\mathbb{K} \cdot \xi_0 = \mathbb{K} \cdot \frac{\epsilon_0}{\|\epsilon_0\|}$ est complet et $P_{\mathcal{G}_0}\xi_1 = \frac{1}{\|\epsilon_0\|^2} \cdot (\epsilon_0 | \, \xi_1) \cdot \epsilon_0$ (cf. exemple 1.4.2). Si maintenant $\mathcal{G}_n$ est complet, alors

$$P_{\mathcal{G}_n}\xi_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\epsilon_j\|^2} \cdot \left(\epsilon_j | \, \xi_{n+1}\right) \cdot \epsilon_j \ ,$$

(vérification immédiate) et

$$\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n \boxplus \mathbb{K} \cdot \epsilon_{n+1}$$

est complet par l'exercice 1.4.1.ii. La formule ci-dessus permet de calculer les ϵ_k et $\|\epsilon_k\|$ inductivement.

Cette construction s'appelle le *procédé d'orthogonalisation (ou d'orthonormalisation) de Gram-Schmidt* .

Sa mise en oeuvre pratique est fastidieuse, à moins d'avoir une méthode particulière liée au problème considéré, comme nous le verrons dans les paragraphes qui suivent.

REMARQUE Nous démontrerons plus tard que tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet (cf. corollaire 2.7).

DEFINITION Nous dirons qu'un espace normé est de *type dénombrable* ou *(séparable)* s'il contient une suite totale.

PROPOSITION *Un espace préhilbertien de type dénombrable possède une base hilbertienne (dénombrable).*

En effet, en extrayant d'une suite totale une suite linéairement indépendante et en lui appliquant le procédé d'orthogonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient un système orthonormé dénombrable et total, ce qu'il fallait démontrer. □

THEOREME *Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne. Plus généralement tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

Dans l'ensemble de tous les systèmes orthonormés $\mathcal{SON}$ de cet espace de Hilbert $\mathcal{H}$, ordonné par l'inclusion, il existe par le principe de maximalité de Hausdorff une chaîne maximale $\mathcal{C}$ contenant le système orthonormé donné. La réunion

$$B := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

est un système orthonormé. En effet si $\xi, \eta \in B$, il existe $C, D \in \mathcal{C}$ tels que $\xi \in C$ et $\eta \in D$ et, puisque $\mathcal{C}$ est une chaîne, on a $C \subset D$ ou $D \subset C$; mais ceci montre que ξ et η appartiennent à un système orthonormé, donc que $(\xi | \eta) = \delta_{\xi,\eta}$. Il nous suffit de montrer que B est total dans $\mathcal{H}$. Si le sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{G}$ engendré par B est $\neq \mathcal{H}$, en choisissant $\gamma \in \mathcal{G}^{\perp} \setminus \{0\}$, on obtient un système orthonormé $B \cup \{\gamma\}$ contenant tous les $C \in \mathcal{C}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{C}$. $\square$

1.12 Polynômes orthogonaux

DEFINITION 1 Nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et désignons par $\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ le cône convexe des intégrales de Radon μ telles que

$$\int^* |\mathrm{id}|^k \, d\mu < \infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

On dit alors que

$$m_k(\mu) := \int \mathrm{id}^k \, d\mu$$

est le *moment* d'ordre k de μ .

Si $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$, alors μ est bornée, i.e. $\mu^*(X) < \infty$.

EXERCICE 1 Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$. L'application canonique

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : p \longmapsto \left[p_{|X}\right]$$

n'est pas injective si, et seulement si, μ est une combinaison linéaire finie (à coefficients strictement positifs) d'intégrales de Dirac (on pourrait dire une intégrale moléculaire !). Dans ce cas l'image de $\mathcal{P}$ est égale à $\mathbf{L}^2(\mu)$ et c'est un espace vectoriel de dimension finie.

Utiliser le support de μ (cf. remarque 1.2.3).

Pour éviter le cas trivial de la dimension finie, nous supposerons $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ n'est pas une combinaison linéaire finie d'intégrales de Dirac, i.e. $\operatorname{supp}\mu$ est infini.

Dans ce cas on a $\mathcal{P} \subset \mathbf{L}^2(\mu)$. Le *problème des moments* consiste à étudier l'application

$$m : \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \mu \longmapsto m(\mu) := (m_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}} \ ,$$

en particulier son injectivité, et à décrire son image. Dans le cas général il est très difficile de déterminer les intégrales de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ telles que $\mathcal{P}$ soit dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.

PROPOSITION *Si X est une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ quel que soit $\mu \in \mathcal{M}_+^b(X)$.*

Remarquons, puisque X est bornée, que tout polynôme est borné sur X , donc que

$$\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X) = \mathcal{M}_+^b(X) \ .$$

La fermeture $\overline{X}$ de X dans $\mathbb{R}$ étant compacte, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X \subset [a, b]$. Pour toute partie $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$1_K = \inf\nolimits_k (1 - k \cdot d(\diamond, K))_{|X}^+ \quad \text{et} \quad (1 - k \cdot d(\diamond, K))_{|[a,b]}^+ \in \mathcal{C}([a, b]) \ ;$$

grâce au théorème de Lebesgue on a $1_K = \lim_k (1 - k \cdot d(\diamond, K))_{|X}^+$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, ce qui montre que $\mathcal{C}([a, b])_{|X}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ par le théorème de densité 15.15 du cours d'Analyse [17].

Mais $\mathcal{P}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\overline{X}}$, par le théorème de Stone-Weierstraß ou celui de Bernstein (voir l'exercice ci-dessous). Il suffit donc de remarquer que

$$\left\|f_{|X}\right\|_{2,\mu}^{2} \leqslant \mu(X) \cdot \|f\|_{\infty,[a,b]}^{2} \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}([a,b])$$

pour pouvoir conclure. □

DEFINITION 2 Désignons par $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant k$ et posons $\mathcal{P}_{-1} := \{0\}$. On dit que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un *système de polynômes orthogonaux* par rapport à $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ si

(a) p_k est un polynôme de degré k , i.e. $p_k \in \mathcal{P}_k \smallsetminus \mathcal{P}_{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) $p_k \perp p_l$, i.e. $\int_X \overline{p_k} \cdot p_l \, d\mu = 0$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq l$.

REMARQUE Il suffit d'exiger que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit un polynôme de degré au plus k , i.e. $p_k \in \mathcal{P}_k$, et que $p_k \perp \mathcal{P}_{k-1}$.

Un tel système est déterminé à une constante multiplicative près et s'obtient par exemple à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas tout ces polynômes sont réels. On peut normaliser les p_k de différentes manières :

(1) on fixe la valeur de la constante $\partial^k p_k$, par exemple $p_k \in \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$,

(2) on fixe la valeur de p_k en un point,

ou bien

(3) on normalise $\|p_k\|_{2,\mu} = 1$, $p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$ et $g_k > 0$.

Dans ce dernier cas, on dit que c'est le *système de polynômes orthonormés* associé à μ . On a

$$p_0 = \frac{1}{\mu(X)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad p_1 = \frac{\mathrm{id} - (p_0|\,\mathrm{id}) \cdot p_0}{\|\mathrm{id} - (p_0|\,\mathrm{id}) \cdot p_0\|_{2,\mu}} = \frac{\mu(X) \cdot \mathrm{id} - (1|\,\mathrm{id})_\mu \cdot 1}{\left\|\mu(X) \cdot \mathrm{id} - (1|\,\mathrm{id})_\mu \cdot 1\right\|_{2,\mu}} \quad , \quad \text{etc...!}$$

THEOREME *Il existe une* ***relation de récurrence*** *de la forme*

$$\mathrm{id} \cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k + c_k \cdot p_{k-1} \ ,$$

en ayant posé $p_{-1} = 0$. En outre si $p_0 = g_0 \cdot 1$, $\widetilde{g_0} = 0$ et

$$p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^{k-1} + \mathcal{P}_{k-2} \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \ ,$$

on a $g_k \neq 0$ et

$$a_k = \frac{g_k}{g_{k+1}} \quad , \quad b_k = \frac{\widetilde{g_k}}{g_k} - \frac{\widetilde{g_{k+1}}}{g_{k+1}} \quad , \quad c_k = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}} \cdot a_{k-1} \ .$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si le système est orthonormé, alors

$$c_k = a_{k-1} \ .$$

En effet, comme $\left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}}\right)_{j=0,\ldots,k+1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{P}_{k+1}$ et que $\mathrm{id}\cdot p_k \in \mathcal{P}_{k+1}$, on a

$$\mathrm{id}\cdot p_k = \sum_{j=0}^{k+1} \left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right) \cdot \frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \ .$$

Mais

$$\left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right) = \int \overline{\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}}} \cdot \mathrm{id}\cdot p_k \, d\mu = \left(\frac{\mathrm{id}\cdot p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| p_k \right) = 0$$

pour tout $j \leqslant k-2$, puisqu'alors $\mathrm{id}\cdot p_j \in \mathcal{P}_{k-1} \perp p_k$! On a donc bien la relation de récurrence indiquée. En calculant $\mathrm{mod}\,\mathcal{P}_{k-1}$, on peut écrire

$$g_k \cdot \mathrm{id}^{k+1} + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^k = \mathrm{id}\cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k =$$

$$= a_k \cdot \left(g_{k+1} \cdot \mathrm{id}^{k+1} + \widetilde{g_{k+1}} \cdot \mathrm{id}^k \right) + b_k \cdot g_k \cdot \mathrm{id}^k \ ,$$

donc

$$g_k = a_k \cdot g_{k+1} \quad \text{et} \quad \widetilde{g_k} = a_k \cdot \widetilde{g_{k+1}} + b_k \cdot g_k$$

et par suite les deux premières relations. Quant à la dernière on a

$$a_k = \left(\frac{p_{k+1}}{\|p_{k+1}\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right)$$

et

$$c_k = \left(\frac{p_{k-1}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right) = \left(\frac{\mathrm{id}\cdot p_{k-1}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \middle| p_k \right) =$$

$$= \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \cdot \left(\frac{p_k}{\|p_k\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_{k-1} \right) = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \cdot a_{k-1} \ . \quad \square$$

EXERCICE 2 (Polynômes de Bernstein) Pour tout fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième *polynôme de Bernstein* $B_n f \in \mathcal{P}_n([0,1])$ de f par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \ .$$

(a) Montrer que si $f = 1$ ou $f = \mathrm{id}$ on a $B_n f = f$.

(b) Calculer pour $f = \mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})$ la suite $B_n f$ et montrer que l'on a

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{uniformément sur } [0,1] \ .$$

(c) Montrer que l'inégalité

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n} \quad \text{pour tout } x \in [0,1]$$

est vraie en introduisant un f convenable et en calculant $B_n f$.

(d) Pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > 0$ on considère les ensembles

$$A_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \ \middle| \ \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \delta \right\}$$

et

$$B_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; \left| x - \frac{k}{n} \right| > \delta \right\} \ .$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C < \infty$ tel que

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leqslant \frac{2C}{\delta^2} \cdot \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \text{ et tout } k \in B_n(\delta) \ .$$

(e) En déduire que

$$f = \lim\nolimits_n B_n f \quad \text{uniformément sur } [0,1] \ .$$

(f) **Théorème de Weierstraß** Montrer finalement que, pour tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des polynômes $\mathcal{P}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$.

1.13 Caractérisation des polynômes classiques orthogonaux

On considère maintenant un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ et un *poids* , i.e. une fonction

$$\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

localement λ-intégrable telle que $\rho \cdot \lambda_J \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(J)$. Un poids est en particulier λ_J-intégrable.

Les *polynômes classiques orthogonaux* sont ceux de la tabelle suivante :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	Hermite H_k
J	$]-1,1[$	$]0,\infty[$	$]-\infty,\infty[$
ρ	$(1-\mathrm{id})^\alpha \cdot (1+\mathrm{id})^\beta$ $\alpha,\beta > -1$	$\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ $\alpha > -1$	$e^{-\mathrm{id}^2}$
Normalisation	$J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha+k}{k}$	$L_k^{(\alpha)}(0) = \binom{\alpha+k}{k}$	$H_k \in 2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$
g_k	$\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}$	$\frac{(-1)^k}{k!}$	2^k
$\left\Vert p_k \right\Vert_{2,\rho}^2$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1) \cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(\alpha+k)!}{k!}$	$\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!$
a_k	$\frac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$-(k+1)$	$\frac{1}{2}$
c_k	$\frac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)}$	$-(\alpha+k)$	k
$\widetilde{g}_k$	$-\frac{(\beta-\alpha)}{2^k \cdot (k-1)!} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}$	0
b_k	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$\alpha+2k+1$	0

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le *coefficient binomial généralisé* par

$$\binom{z}{k} = \prod_{l=1}^{k} \frac{z+1-l}{l} = \frac{z \cdot (z-1) \cdots (z+1-k)}{k!} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

En particulier $\binom{z}{0} = 1$ et $z \longmapsto \binom{z}{k}$ est un polynôme!

Nous avons aussi utilisé la notation

$$z! := \Gamma(z+1) \ .$$

Rappelons que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, que pour tout $\operatorname{Re} z > -1$, on a

$$z! = \int_0^\infty \mathrm{id}^z \cdot e^{-\mathrm{id}} \ ,$$

et que Γ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et n'a que des pôles simples en $-k$, pour $k \in \mathbb{N}$, de résidu $\frac{(-1)^k}{n!}$. En particulier

$$\binom{z}{k} = \frac{z!}{k! \cdot (z-k)!} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(z+1-k)} \ ,$$

cette formule étant vraie par continuité si $z+1 = -l$ pour un $l \in \mathbb{N}$, puisque

$$\binom{z}{k} = \binom{-l-1}{k} = \frac{(-l-1)(-l-2)\cdots(-l-k)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(l+k)!}{k! \cdot l!}$$

et

$$w \cdot \Gamma(-l+w) \to \frac{(-1)^l}{l!} \quad \text{et} \quad w \cdot \Gamma(-l-k+w) \to \frac{(-1)^{l+k}}{(l+k)!} \quad \text{lorsque } w \to 0 \ .$$

Dans la littérature on rencontre encore le *symbole de Pochhammer* défini par

$$(z)_k := \prod_{l=0}^{k-1} (z+l) = z \cdot (z+1) \cdots (z+k-1) = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)} = \frac{(z-1+k)!}{(z-1)!} \ .$$

En particulier $(z)_0 := 1$.

Finalement rappelons la formule de Stirling

$$\alpha! \sim \sqrt{2\pi \cdot \alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \quad \text{pour } \alpha \to \infty \ .$$

La mise en oeuvre du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt conduit à des calculs fastidieux. Mais heureusement à équivalence près, i.e. après une transformation affine et une renormalisation, les polynômes classiques sont caractérisés par une formule ou une équation différentielle, ce qui nous permettra de déterminer les constantes de la table ci-dessus.

THEOREME *Soient $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ un poids et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système de polynômes orthogonaux associé à ρ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est équivalent à un système classique de polynômes.*

(ii) ***Formule de Rodrigues***

Le poids ρ est indéfiniment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$p_k = \frac{1}{d_k \cdot \rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

(iii) ***Equation différentielle de type hypergéométrique***

Le poids ρ *est continûment dérivable, il existe un polynôme* $p > 0$ *sur* J *de degré* $\leqslant 2$ *sans racine multiple tel que* $p = 0$ *sur* ∂J *et une suite* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tels que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, on ait*

$$Lp_k := -\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial p_k) = \lambda_k \cdot p_k$$

ou bien

$$p \cdot \partial^2 p_k + q \cdot \partial p_k + \lambda_k \cdot p_k = 0 \ ,$$

où

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} \ .$$

Dans ce cas q *est un polynôme de degré* 1 *et*

$$\lambda_k = -k \cdot \left[\partial q + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right]$$

et les constantes sont données dans la table qui précède et la suivante :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	*Laguerre* $L_k^{(\alpha)}$	*Hermite* H_k
p	$1 - \mathrm{id}^2$	id	1
d_k	$(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!$	$k!$	$(-1)^k$
λ_k	$k \cdot (\alpha + \beta + k + 1)$	k	$2k$
q	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha + 1 - \mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** Il nous suffit de démontrer que la formule de Rodrigues définit un système de polynômes orthogonaux associé au poinds ρ . L'unicité à une constante multiplicative près montre alors qu'en choisissant d_k convenablement on obtient les polynômes classiques.

Remarquons tout d'abord que, étant donné $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leqslant k$, on a

$$\partial^j\left(\rho \cdot p^k\right) = \rho \cdot p^{k-j} \cdot P_{k,j} \quad \text{pour un } P_{k,j} \in \mathcal{P}_j \ .$$

Cette formule est trivialement vraie pour $j = 0$ avec $P_{k,0} = 1$. D'autre part $\deg p \leqslant 2$ et on vérifie explicitement que $q := \frac{\partial(\rho\cdot p)}{\rho} \in \mathcal{P}_1$ (voir la table ci-dessus et remarquer qu'une transformation affine ne modifie pas le degré). L'assertion en découle par récurrence sur j puisque, en supposant que $j + 1 \leqslant k$, on a

$$\partial^{j+1}\left(\rho \cdot p^k\right) = \partial\left(\rho \cdot p \cdot p^{k-j-1} \cdot P_{k,j}\right) =$$

$$= \partial(\rho \cdot p) \cdot p^{k-j-1} \cdot P_{k,j} + \rho \cdot p \cdot (k-j-1) \cdot p^{k-j-2} \cdot \partial p \cdot P_{k,j} + \rho \cdot p^{k-j} \cdot \partial P_{k,j} =$$

$$= \rho \cdot p^{k-j-1} \cdot (q \cdot P_{k,j} + (k-j-1) \cdot \partial p \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j})$$

et par suite

$$P_{k,j+1} = \Big[q + (k-j-1) \cdot \partial p\Big] \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j} \in \mathcal{P}_{j+1} \ . \qquad (*)$$

Il est alors clair que $p_k = \frac{1}{d_k} \cdot P_{k,k} \in \mathcal{P}_k$ et il nous reste à montrer que $p_k \perp \mathcal{P}_{k-1}$. Mais on constate dans chaque cas que

$$\rho \cdot p^j \cdot P \in \mathcal{C}^0(J) \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } P \in \mathcal{P} \ .$$

En intégrant successivement par parties, pour tout $f \in \mathcal{P}_{k-1}$, on obtient

$$d_k \cdot (p_k | f)_\rho = \int_J \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \cdot f = \left[\partial^{k-1}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot f\right]_J - \int_J \partial^{k-1}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot \partial f =$$

$$= \ldots = (-1)^k \cdot \int_J \rho \cdot p^k \cdot \partial^k f = 0 \ ,$$

puisque

$$\partial^{k-j}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot \partial^{j-1} f = \rho \cdot p^j \cdot P_{k,k-j} \cdot \partial^{j-1} f \in \mathcal{C}^0(J) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Montrons tout d'abord que l'on a nécessairement $\deg p \leqslant 2$. En effet

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = d_1 \cdot p_1$$

est un polynôme de degré 1 et

$$d_2 \cdot \rho \cdot p_2 = \partial^2\left(\rho \cdot p^2\right) = \partial\Big[\partial(\rho \cdot p) \cdot p + \rho \cdot p \cdot \partial p\Big] = \partial\Big[\rho \cdot p \cdot (q + \partial p)\Big] =$$

$$= \rho \cdot q \cdot (q + \partial p) + \rho \cdot p \cdot \partial(q + \partial p) \ ,$$

donc

$$p \cdot \partial^2 p = d_2 \cdot p_2 - q^2 - \partial(q \cdot p) \ .$$

Mais si $\deg p > 2$, alors

$$\deg\left(p \cdot \partial^2 p\right) = \deg p + \deg p - 2 > \deg p = \deg \partial(q \cdot p) = \deg\left(d_2 \cdot p_2 - q^2 - \partial(q \cdot p)\right) \ ,$$

ce qui est absurde.

Montrons maintenant que p_k satisfait à l'équation différentielle. Remarquons tout d'abord que

$$\rho \cdot q = \partial(\rho \cdot p) = \partial\rho \cdot p + \rho \cdot \partial p \ ,$$

donc

$$\frac{p \cdot \partial\rho}{\rho} = q - \partial p \ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a alors

$$-d_k \cdot \rho \cdot L p_k =$$

$$= \partial(\rho \cdot p \cdot d_k \cdot \partial p_k) = \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial\left[\frac{1}{\rho} \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right)\right]\right) =$$

$$= \partial\left(-\frac{p\cdot\partial\rho}{\rho}\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)+p\cdot\partial^{k+1}\left(\rho\cdot p^k\right)\right)=$$

$$= -\partial\left[q-\partial p\right]\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)-\left[q-\partial p\right]\cdot\partial^{k+1}\left(\rho\cdot p^k\right)$$

$$+\partial p\cdot\partial^{k+1}\left(\rho\cdot p^k\right)+p\cdot\partial^{k+2}\left(\rho\cdot p^k\right)=$$

$$=\left[\partial^2 p-\partial q\right]\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)+\left[2\partial p-q\right]\cdot\partial^{k+1}\left(\rho\cdot p^k\right)+p\cdot\partial^{k+2}\left(\rho\cdot p^k\right)\ .$$

D'autre part comme

$$p\cdot\partial\left(\rho\cdot p^k\right)=p\cdot\partial\rho\cdot p^k+k\cdot\rho\cdot p^k\cdot\partial p=\left(p\cdot\partial\rho+k\cdot\rho\cdot\partial p\right)\cdot p^k=$$

$$=\left[q+(k-1)\cdot\partial p\right]\cdot\rho\cdot p^k\ ,$$

on peut appliquer la formule de Leibniz à chacun des membres de

$$\partial^{k+1}\left[p\cdot\partial\left(\rho\cdot p^k\right)\right]=\partial^{k+1}\left(\left[q+(k-1)\cdot\partial p\right]\cdot\rho\cdot p^k\right)\ .$$

Puisque $\deg p\leqslant 2$ et $\deg\left[q+(k-1)\cdot\partial p\right]\leqslant 1$, on obtient

$$p\cdot\partial^{k+2}\left(\rho\cdot p^k\right)+\binom{k+1}{1}\cdot\partial p\cdot\partial^{k+1}\left(\rho\cdot p^k\right)+\binom{k+1}{2}\cdot\partial^2 p\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)=$$

$$=\left[q+(k-1)\cdot\partial p\right]\cdot\partial^{k+1}\left(\rho\cdot p^k\right)+\binom{k+1}{1}\cdot\left[q+(k-1)\cdot\partial^2 p\right]\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)\ ,$$

c'est-à-dire

$$p\cdot\partial^{k+2}\left(\rho\cdot p^k\right)+\left[2\partial p-q\right]\cdot\partial^{k+1}\left(\rho\cdot p^k\right)=$$

$$=(k+1)\cdot\left[\partial q+\left(\frac{k}{2}-1\right)\cdot\partial^2 p\right]\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)\ .$$

Ainsi

$$-d_k\cdot\rho\cdot Lp_k=$$

$$=\left[\partial^2 p-\partial q\right]\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)+(k+1)\cdot\left[\partial q+\left(\frac{k}{2}-1\right)\cdot\partial^2 p\right]\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)=$$

$$=\left[k\cdot\partial q+\frac{k\,(k-1)}{2}\cdot\partial^2 p\right]\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right)$$

et finalement

$$Lp_k=-k\cdot\left[\partial q+\frac{k-1}{2}\cdot\partial^2 p\right]\cdot p_k\ .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) A l'aide d'un changement affine de variable on peut supposer, en modifiant les

λ_k si nécessaire, que J et p sont comme dans la situation classique :

$\deg p$	2	1	0
J	$]-1,1[$	$]0,\infty[$	$]-\infty,\infty[$
p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1

Puisque $\deg p_1 = 1$, l'équation différentielle pour $k = 1$ montre que

$$q := \frac{\partial(\rho\cdot p)}{\rho} = -\frac{\lambda_1\cdot p_1}{\partial p_1}$$

est un polynôme de degré 1 et que

$$\frac{\partial\rho}{\rho} = \frac{1}{p}\cdot(q-\partial p) = \frac{a\cdot\mathrm{id}+b}{p} \ .$$

On obtient

p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1
$\frac{\partial\rho}{\rho}$	$\frac{\frac{a+b}{2}}{1-\mathrm{id}} + \frac{\frac{b-a}{2}}{1+\mathrm{id}}$	$\frac{b}{\mathrm{id}}+a$	$a\cdot\mathrm{id}+b$
ρ	$(1-\mathrm{id})^{\frac{a+b}{2}}\cdot(1+\mathrm{id})^{\frac{b-a}{2}}$	$\mathrm{id}^b\cdot e^{a\cdot\mathrm{id}}$	$e^{\frac{a}{2}\cdot\mathrm{id}^2+b\cdot\mathrm{id}}$

la constante d'intégration e^c disparaissant en renormalisant, i.e. en multipliant ρ par une constante > 0 .

Rappelons que ρ est λ_J-intégrable. Dans le premier cas on a nécessairement

$$\alpha := \frac{a+b}{2} > -1 \quad \text{et} \quad \beta := \frac{b-a}{2} > -1 \ .$$

Dans le deuxième cas $a < 0$ et en faisant une homothétie, on peut supposer que $a = -1$. Il suffit donc de poser $\alpha := b > -1$. Dans le troisième cas, on nécessairement $a > 0$ et à l'aide d'une transformation affine on se ramène au cas $\rho = e^{-\mathrm{id}^2}$, ce qui finit la démonstration des équivalences.

Détermination des constantes Elles dépendent évidemment de la normalisation choisie. Nous utiliserons évidemment la formule de Rodrigues et celle de Leibniz.

Comme dans la démonstration (i)$\Rightarrow$(ii) en intégrant k fois par parties on obtient

$$\|p_k\|_{2,\rho}^2 = (p_k|\, p_k)_\rho = \left(g_k\cdot\mathrm{id}^k\middle|\, p_k\right)_\rho = \frac{g_k}{d_k}\cdot\int_J \mathrm{id}^k\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right) =$$

$$= \ldots = (-1)^k\cdot\frac{g_k}{d_k}\cdot k!\cdot\int_J \rho\cdot p^k \ .$$

D'autre part soit

$$P_{k,j} \in g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^j + \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + \mathcal{P}_{j-2} \ .$$

Rappelons que $P_{k,0} = 1$, donc $g_{k,0} = 1$ et $\widetilde{g_{k,0}} = 0$.

On a $q = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = \frac{\partial\rho}{\rho} \cdot p + \partial p$ et soit $\widetilde{q} := \frac{\partial\rho}{\rho} \cdot p \in \mathcal{P}_1$. La relation de récurrence $(*)$ s'écrit alors

$$P_{k,j+1} = \left[\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial p\right] \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j} \in \mathcal{P}_{j+1} \ .$$

et montre que

$$\begin{aligned}
P_{k,j+1} \in & \left[\widetilde{q}\,(0) + \partial\widetilde{q} \cdot \mathrm{id} + (k-j) \cdot \left(\partial p\,(0) + \partial^2 p \cdot \mathrm{id}\right)\right] \\
& \qquad \cdot \left[g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^j + \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + \mathcal{P}_{j-2}\right] \\
& + \left(p\,(0) + \partial p\,(0) \cdot \mathrm{id} + \frac{\partial^2 p}{2} \cdot \mathrm{id}^2\right) \cdot \left[j \cdot g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + (j-1) \cdot \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-2} + \mathcal{P}_{j-3}\right] = \\
= & \left[\partial\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial^2 p + j \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^{j+1} \\
& + \left\{ \left[\widetilde{q}\,(0) + (k-j) \cdot \partial p\,(0) + j \cdot \partial p\,(0)\right] \cdot g_{k,j} \right. \\
& \left. + \left[\partial\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial^2 p + (j-1) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot \widetilde{g_{k,j}} \right\} \cdot \mathrm{id}^j + \mathcal{P}_{j-1} \ ,
\end{aligned}$$

donc que $g_{k,j}$ et $\widetilde{g_{k,j}}$ satisfont aux relations de récurrence suivantes :

$$g_{k,0} = 1 \quad \text{et} \quad \widetilde{g_{k,0}} = 0$$

$$g_{k,j+1} = \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \tag{$**$}$$

et

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = \left[\widetilde{q}\,(0) + k \cdot \partial p\,(0)\right] \cdot g_{k,j} + \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j-1) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ . \tag{$***$}$$

On a alors

$$g_k = \frac{1}{d_k} \cdot g_{k,k} \quad \text{et} \quad \widetilde{g_k} = \frac{1}{d_k} \cdot \widetilde{g_{k,k}} \ ,$$

ainsi que la table

p	$1 - \mathrm{id}^2$	id	1
$\widetilde{q} = \frac{\partial\rho}{\rho} \cdot p$	$\beta - \alpha - (\alpha+\beta) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha - \mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

Polynômes de Jacobi

On a

$$\binom{\alpha+k}{k} = J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(1-\mathrm{id})^{-\alpha}(1+\mathrm{id})^{-\beta}}{d_k} \cdot \partial^k \left[(1-\mathrm{id})^{\alpha+k}(1+\mathrm{id})^{\beta+k}\right](1) =$$

$$= \frac{(1-\mathrm{id})^{-\alpha}(1+\mathrm{id})^{-\beta}}{d_k} \cdot \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j (1-\mathrm{id})^{\alpha+k} \cdot \partial^{k-j}(1+\mathrm{id})^{\beta+k}\right](1) =$$

$$= \frac{1}{d_k} \cdot (\alpha+k)\cdots(\alpha+1)\cdot(-1)^k \cdot 2^k \ ,$$

donc

$$d_k = (-1)^k \cdot \frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha+1)}{\frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha+1)}{k!}} \cdot 2^k = (-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \ .$$

D'autre part si $j+1 \leqslant k$, on a

$$g_{k,j+1} = -(\alpha+\beta+2k-j)\cdot g_{k,j} \ ,$$

donc

$$g_{k,j} = (-1)^j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

par récurrence, et par suite

$$g_k = \frac{1}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot (-1)^k \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+k)!} =$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \ .$$

Ainsi

$$\left\| J_k^{(\alpha,\beta)} \right\|^2_{2,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta} = (-1)^k \cdot \frac{\frac{1}{2^k}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot k! \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+k}\cdot(1+x)^{\beta+k}\, dx =$$

$$= \frac{\binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \int_0^1 (2t)^{\alpha+k}\cdot(2-2t)^{\beta+k}\cdot 2\, dt =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \cdot B(\alpha+k+1, \beta+k+1) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\cdot\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2k+2)} =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{k!\cdot(\alpha+\beta+k)!} \cdot \frac{(\alpha+k)!\cdot(\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1)!} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\cdot(\alpha+k)!\cdot(\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1)\cdot k!\cdot(\alpha+\beta+k)!} \ ,$$

en ayant fait le changement de variable $x = 1 - 2 \cdot t$ et utilisé la fonction béta d'Euler :

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1} \cdot (1-t)^{w-1}\, dt = \frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad \text{pour tout } z,w > -1 \ .$$

Il vient alors

$$a_k = \frac{\frac{1}{2^k}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k+2}{k+1}} = \frac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$$

et

$$c_k = \frac{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\cdot(\alpha+k)!\cdot(\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1)\cdot k!\cdot(\alpha+\beta+k)!}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\cdot(\alpha+k-1)!\cdot(\beta+k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-1)\cdot(k-1)!\cdot(\alpha+\beta+k-1)!}}\cdot\frac{2k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k+1)\,k\,(\alpha+\beta+k)}\cdot\frac{2k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)} =$$

$$= \frac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)} \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (\beta-\alpha)\cdot g_{k,j} + \left[-(\alpha+\beta)-(2k-j-1)\right]\cdot\widetilde{g_{k,j}} =$$

$$= (\beta-\alpha)\cdot(-1)^j\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} - (\alpha+\beta+2k-j-1)\cdot\widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_{k,j}} = (-1)^{j-1}\cdot(\beta-\alpha)\cdot j\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

par récurrence, puisque

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (\beta-\alpha)\cdot(-1)^j\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

$$-(\alpha+\beta+2k-j-1)\cdot(-1)^{j-1}\cdot(\beta-\alpha)\cdot j\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)\cdot(-1)^j\cdot(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}\cdot\left[(\alpha+\beta+2k)+(\alpha+\beta+2k-j-1)\cdot j\right] =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)\cdot(-1)^j\cdot(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}\cdot(j+1)\cdot(\alpha+\beta+2k-j) =$$

$$= (-1)^j\cdot(\beta-\alpha)\cdot(j+1)\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j-1)!} \ .$$

Ainsi

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{(-1)^k\cdot 2^k\cdot k!}\cdot(-1)^{k-1}\cdot(\beta-\alpha)\cdot k\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!} =$$

$$= -\frac{(\beta-\alpha)}{2^k\cdot(k-1)!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!} \ ,$$

et par suite

$$b_k = \frac{-\frac{(\beta-\alpha)}{2^k\cdot(k-1)!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}}{\frac{1}{2^k}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k}{k}} - \frac{-\frac{(\beta-\alpha)}{2^{k+1}\cdot k!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k+1)!}{(\alpha+\beta+k+1)!}}{\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k+2}{k+1}} =$$

$$= (\beta-\alpha)\cdot\left(\frac{(k+1)}{\alpha+\beta+2k+2} - \frac{k}{\alpha+\beta+2k}\right) =$$

$$= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+2)}\ .$$

Les 5 premiers polynômes de Jacobi :

$$J_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$$

$$J_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$J_2^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{8}(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)\,x^2 + \frac{1}{4}(\alpha+\beta+3)(\alpha-\beta)\,x + \frac{1}{8}(\alpha-\beta)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}$$

$$J_3^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{48}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)\,x^3 + \frac{1}{16}(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)(\alpha-\beta)\,x^2$$

$$+\frac{1}{16}(\alpha+\beta+4)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-6\right)x + \frac{1}{48}(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-16\right)$$

$$J_4^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{384}(\alpha+\beta+8)(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\,x^4$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\,x^3$$

$$+\frac{1}{64}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-8\right)x^2$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-22\right)x$$

$$+\frac{1}{384}(\alpha-\beta)^4 - \frac{1}{64}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 - \frac{37}{384}(\alpha-\beta)^2 + 6\alpha\beta + \frac{7}{64}(\alpha+\beta) + \frac{3}{8}$$

Polynômes de Laguerre

Ici on a

$$\binom{\alpha+k}{k} = L_k^{(\alpha)}(0) = \frac{\mathrm{id}^{-\alpha}\cdot e^{\mathrm{id}}}{d_k}\cdot\partial^k\left[\mathrm{id}^{\alpha+k}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right](0) =$$

$$= \frac{\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}}}{d_k} \cdot \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j \, \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot \partial^{k-j} e^{-\,\mathrm{id}} \right] (0) = \frac{1}{d_k} \cdot (\alpha + k) \cdots (\alpha) \ ,$$

donc

$$d_k = \frac{(\alpha + k) \cdots (\alpha)}{\frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha)}{k!}} = k! \ .$$

D'autre part

$$g_{k,j+1} = (-1) \cdot g_{k,j} \ ,$$

donc

$$g_k = \frac{(-1)^k}{k!} \ ,$$

puis

$$\left\| L_k^{(\alpha)} \right\|_{2,\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\,\mathrm{id}}}^2 = (-1)^k \cdot \frac{\frac{(-1)^k}{k!}}{k!} \cdot k! \cdot \int_0^\infty \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\,\mathrm{id}} = \frac{(\alpha + k)!}{k!} \ ,$$

$$a_k = \frac{\frac{(-1)^k}{k!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}} = -\,(k+1)$$

et

$$c_k = \frac{\frac{(\alpha+k)!}{k!}}{\frac{(\alpha+k-1)!}{(k-1)!}} \cdot (-k) = -\,(\alpha + k) \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (-1)^j \cdot (\alpha + k) - \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_{k,j}} = (-1)^{j-1} \cdot j \cdot (\alpha + k)$$

par récurrence, puisque

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (-1)^j \cdot (\alpha + k) - (-1)^{j-1} \cdot j \cdot (\alpha + k) = (-1)^j \cdot (j+1) \cdot (\alpha + k) \ .$$

Ainsi

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{k!} \cdot (-1)^{k-1} \cdot k \cdot (\alpha + k) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha + k)}{(k-1)!}$$

et par suite

$$b_k = \frac{\frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}}{\frac{(-1)^k}{k!}} - \frac{\frac{(-1)^k \cdot (\alpha+k+1)}{(k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}} = -k \cdot (\alpha + k) + (k+1) \cdot (\alpha + k + 1) =$$

$$= \alpha + 2k + 1 \ .$$

Les 5 premiers polynômes de Laguerre :

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\alpha+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L_3^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}(\alpha+3)\,x^2 - \frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)\,x + \frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L_4^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}(\alpha+4)\,x^3 + \frac{1}{4}(\alpha+4)(\alpha+3)\,x^2$$

$$-\frac{1}{6}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)\,x + \frac{1}{24}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

Polynômes d'Hermite

Finalement on a

$$2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1} \ni H_k = \frac{e^{\mathrm{id}^2}}{d_k} \cdot \partial^k \left(e^{-\mathrm{id}^2}\right) \in \frac{1}{d_k} \cdot (-2 \cdot \mathrm{id})^k + \mathcal{P}_{k-1} \ ,$$

donc

$$d_k = (-1)^k \quad \text{et} \quad g_k = 2^k \ ,$$

puis

$$\|H_k\|^2_{2,e^{-\mathrm{id}^2}} = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{(-1)^k} \cdot k! \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{id}^2} = \sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k! \ ,$$

$$a_k = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

et

$$c_k = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{k-1} \cdot (k-1)!} \cdot \frac{1}{2} = k \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = -2 \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{(-1)^k} \cdot \widetilde{g_{k,k}} = 0 \ ,$$

et par suite

$$b_k = 0 \ .$$

Les 5 premiers polynômes d'Hermite :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Le théorème est enfin complètement démontré. $\square$

Polynômes de Jacobi spéciaux

Legendre :

$$P_k := J_k^{(0,0)} \ .$$

Les 5 premiers polynômes de Legendre :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

Tchebycheff :

1^e^ espèce

$$T_k := \frac{1}{\binom{-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \ .$$

2^e^ espèce

$$U_k := \frac{k+1}{\binom{\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \ .$$

On a les relations

$$T_k(\cos t) = \cos(k \cdot t) \quad \text{et} \quad U_k(\cos t) = \frac{\sin\left[(k+1)\cdot t\right]}{\sin t} \ .$$

En effet, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, soit $t := \arccos x \in \left]0,\pi\right[$; puisque $\sin t > 0$, il vient $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, donc

$$\cos(k \cdot \arccos x) = \operatorname{Re}\left(e^{ki\cdot\arccos x}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\cdot\arccos x}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Re}\Big(\cos(\arccos x) + i\cdot\sin(\arccos x)\Big)^k = \operatorname{Re}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\cdot x^{k-l}\cdot i^l\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}\binom{k}{2l}\cdot x^{k-2l}\cdot(-1)^l\cdot\left(1-x^2\right)^l \in \mathcal{P}_k \ .$$

Mais comme

$$\int_{-1}^{1} \cos(k \cdot \arccos x) \cdot \cos(l \cdot \arccos x)\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos(k \cdot t) \cdot \cos(l \cdot t)\ dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} \pi & k = l = 0 \\ \left[\frac{1}{2k}\cos kt \sin kt + \frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{si} & k = l \neq 0 \\ \left[\frac{k \cdot \sin(k \cdot t) \cdot \cos(l \cdot t) - l \cdot \cos(k \cdot t) \cdot \sin(l \cdot t)}{k^2 - l^2}\right]_0^\pi = 0 & k \neq l \end{array} \right. ,$$

grâce au changement de variable $t = \arccos x$, et puisque $\cos(k \cdot \arccos 1) = 1$, l'unicité montre que $T_k = \cos(k \cdot \arccos)$, ce qu'il fallait démontrer.

Un calcul analogue montre que

$$\frac{\sin\Big[(k+1) \cdot \arccos x\Big]}{\sin(\arccos x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{Im}\left(e^{(k+1)i \cdot \arccos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{k}{2l} \cdot x^{k-2l-1} \cdot (-1)^l \cdot \left(1-x^2\right)^{l+\frac{1}{2}} \in \mathcal{P}_k ,$$

puis que

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\Big[(k+1) \cdot \arccos x\Big] \cdot \sin\Big[(l+1) \cdot \arccos x\Big]}{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^\pi \sin\Big[(k+1) \cdot t\Big] \cdot \sin\Big[(l+1) \cdot t\Big]\ dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}\frac{\cos[(k+1)t] \cdot \sin[(k+1)t] - (k+1)t}{k+1}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} & & k = l \\ & \text{si} & \\ \left[\frac{(k+1)\cos[(k+1) \cdot t] \cdot \sin[(l+1) \cdot t] - (l+1)\sin[(k+1) \cdot t]\cos[(l+1) \cdot t]}{-(k+1)^2 + (l+1)^2}\right]_0^\pi = 0 & & k \neq l \end{array} \right. ,$$

et finalement que

$$\frac{\sin[(k+1) \cdot \arccos]}{\sin(\arccos)}(1) = (k+1) \cdot \lim_{t \to 0+} \frac{\sin[(k+1) \cdot t]}{(k+1) \cdot t} \cdot \frac{t}{\sin t} = k+1 .$$

Grâce à l'unicité on obtient $U_k = \frac{\sin[(k+1) \cdot \arccos]}{\sin(\arccos)}$. □

Les 5 premiers polynômes de Tchebycheff de 1e espèce et 2e espèce :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

Gegenbauer (ou ultraspériques) :

$$G_k^{(\gamma)} = \frac{\binom{2\gamma+k-1}{k}}{\binom{\gamma-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}\right)} \quad \text{pour } 0 \neq \gamma > -\frac{1}{2} \ .$$

et

$$G_k^{(0)} := \lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{\gamma} \cdot G_k^{(\gamma)} \ .$$

Les 5 premiers polynômes de Gegenbauer lorsque $\gamma \neq 0$:

$$G_0^{(\gamma)}(x) = 1$$

$$G_1^{(\gamma)}(x) = 2\gamma x$$

$$G_2^{(\gamma)}(x) = 2\gamma(\gamma+1)x^2 - \gamma$$

$$G_3^{(\gamma)}(x) = \frac{4}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^3 - 2\gamma(\gamma+1)x$$

$$G_4^{(\gamma)}(x) = \frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^4 - 2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^2 + 2(\gamma+1)\gamma$$

et si $\gamma = 0$

$$G_0^{(0)}(x) = 1$$

$$G_1^{(0)}(x) = 2x$$

$$G_2^{(0)}(x) = 2x^2 - 1$$

$$G_3^{(0)}(x) = \frac{8}{3}x^3 - 2x$$

$$G_4^{(0)}(x) = 4x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

Les valeurs des différentes constantes sont données dans la table suivante :

	P_k	T_k	U_k	$G_k^{(\gamma)}$
ρ	1	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}$
Normalisation en 1	1	1	$k+1$	$\binom{2\gamma+k-1}{k}$
$\left\Vert p_k\right\Vert_{2,\rho}^2$	$\frac{2}{2k+1}$	π si $k=0$; $\frac{\pi}{2}$ si $k>0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi 2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma+k)}{(\gamma+k)\cdot k!\cdot\Gamma(\gamma)^2}$ si $\gamma\neq 0$; 2 si $k=0$, $\frac{2\pi}{k^2}$ sinon, si $\gamma=0$
a_k	$\frac{k+1}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{k+1}{2(\gamma+k)}$
c_k	$\frac{k}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\gamma+k-1}{2(\gamma+k)}$
b_k	0	0	0	0
d_k	$(-1)^k\, 2^k\cdot k!$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^k\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^{k+1}\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)\cdot\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^k\cdot k!\cdot\Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+k)\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}$
λ_k	$k\cdot(k+1)$	k^2	$k\,(k+2)$	$k\,(2\gamma+k)$

1.14 Les équations différentielles associées aux polynômes classiques

Voici tout d'abord un théorème de transformation d'une équation différentielle du second ordre sur un intervalle J de $\mathbb{R}$.

THEOREME *Considérons $\rho, p \in \mathcal{AC}(J)$ et $q \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ tels que $\rho, p > 0$ sur J , l'application linéaire*

$$L : \mathcal{AC}^{(2)}(J) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) : f \longmapsto -\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) + q \cdot f$$

(on dit que c'est un opérateur) et I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\omega, \varkappa \in \mathcal{AC}^{(2)}(I)$ tels que $\omega > 0$ sur I et $\varkappa : I \longrightarrow J$ soit une bijection.

La transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \omega \cdot f \circ \varkappa : \mathbb{K}^J \longrightarrow \mathbb{K}^I$$

est bijective et l'application réciproque est donnée par

$$\overset{-1}{\Phi} g = \frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \ ;$$

elle induit une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ sur $\mathbf{L}^2(J, \widetilde{\rho})$ et transforme l'opérateur L en l'opérateur

$$\widetilde{L} : \mathcal{AC}^{(2)}(I) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I) : g \longmapsto -\frac{1}{\widetilde{\rho}} \cdot \partial(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial g) + \widetilde{q} \cdot g \ ,$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AC}^{(2)}(J) & \xrightarrow{L} & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \\ \overset{-1}{\Phi} \uparrow & & \downarrow \Phi \\ \mathcal{AC}^{(2)}(I) & \xrightarrow[\widetilde{L}]{} & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I) \end{array}$$

où

$$\widetilde{\rho} = \frac{|\partial\varkappa| \cdot \rho \circ \varkappa}{\omega^2} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{p \circ \varkappa}{|\partial\varkappa|^2} \quad , \quad \widetilde{q} = \frac{\partial(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial\omega)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa \ .$$

En effet on vérifie facilement que $\overset{-1}{\Phi}$ et Φ sont des bijections entre les espaces considérés (cf. proposition 1.7 et exemple 1.7.3) et on a

$$\int |f|^2 \cdot \rho \, d\lambda_J = \int |f \circ \varkappa|^2 \cdot \rho \circ \varkappa \cdot |\partial\varkappa| \, d\lambda_I = \int |\omega \cdot f \circ \varkappa|^2 \cdot \frac{|\partial\varkappa| \cdot \rho \circ \varkappa}{\omega^2} \, d\lambda_I =$$

$$= \int |\Phi f|^2 \cdot \widetilde{\rho} \, d\lambda_I \ .$$

D'autre part

$$\widetilde{L}g = \omega \cdot L\left(\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa}\right) \circ \varkappa = -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial\left[\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa}\right]\right) \circ \varkappa + q \circ \varkappa \cdot g \ ,$$

mais

$$\rho \cdot p \cdot \partial\left[\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa}\right] = \rho \cdot p \cdot \left[\partial\left(\frac{g}{\omega}\right) \cdot \frac{1}{\partial \varkappa}\right] \circ \overset{-1}{\varkappa} =$$

$$= \left[\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g - \frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial \omega \cdot g\right] \circ \overset{-1}{\varkappa}$$

donc

$$\widetilde{L}g = -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial\left(\left[\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g - \frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot g\right] \circ \overset{-1}{\varkappa}\right) \circ \varkappa + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial\left[\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g \cdot \omega - \frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot g \cdot \partial \omega\right] \cdot \frac{1}{\partial \varkappa} + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\partial \varkappa \cdot \rho \circ \varkappa} \cdot \left[\partial\left(\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g\right) - \frac{1}{\omega} \cdot \partial\left(\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial \omega\right) \cdot g\right] + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{1}{\widetilde{\rho}} \cdot \partial\left(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial g\right) + \left[\frac{\partial\left(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega\right)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa\right] \cdot g \ . \quad \square$$

EXEMPLE Si l'on veut éliminer la densité ρ , il suffit de considérer la transformation

$$\Phi : f \longmapsto \sqrt{\rho} \cdot f$$

qui induit une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ sur $\mathbf{L}^2(J)$ et transforme L en

$$\widetilde{L} : g \longmapsto -\partial\left(p \cdot \partial g\right) + \left[\frac{\partial\left(p \cdot \partial\sqrt{\rho}\right)}{\sqrt{\rho}} + q\right] \cdot g \ .$$

REMARQUE 1 Rappelons que si l'on connait une solution de l'équation différentielle $Lf = 0$, on peut déterminer une seconde solution linéairement indépendante de la première en utilisant la méthode de réduction de d'Alembert (cf. cours d'Analyse [17], proposition 12.13).

L'équation différentielle de Jacobi

Le polynôme de Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$ satisfait sur $]-1,1[$ à l'équation différentielle

$$(1-\mathrm{id})^{-\alpha} \cdot (1+\mathrm{id})^{-\beta} \cdot \partial\left[(1-\mathrm{id})^{\alpha+1} \cdot (1+\mathrm{id})^{\beta+1} \cdot \partial f\right] + k \cdot (\alpha+\beta+k+1) \cdot f = 0 \ ,$$

c'est-à-dire à

$$\left(1-\mathrm{id}^2\right) \cdot \partial^2 f + \left[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2) \cdot \mathrm{id}\right] \cdot \partial f + k \cdot (\alpha+\beta+k+1) \cdot f = 0 \ .$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := 2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}} \cdot f\left(1 - 2 \cdot \mathrm{id}\right) : \mathbb{K}^{]-1,1[} \longrightarrow \mathbb{K}^{]0,1[} \,;$$

puisque

$$\rho = (1-\mathrm{id})^{\alpha} \cdot (1+\mathrm{id})^{\beta} \quad , \quad p = 1 - \mathrm{id}^2 \quad \text{et} \quad q = -k \cdot (\alpha+\beta+k+1) \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{2 \cdot (2 \cdot \mathrm{id})^{\alpha} \cdot (2 - 2 \cdot \mathrm{id})^{\beta}}{2^{\alpha+\beta+1}} = \mathrm{id}^{\alpha} \cdot (1 - \mathrm{id})^{\beta} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{1 - (1 - 2 \cdot \mathrm{id})^2}{2^2} = \mathrm{id} \cdot (1 - \mathrm{id})$$

et

$$\widetilde{q} = -k \cdot (\alpha + \beta + k + 1) \ .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot (1 - \mathrm{id})^{-\beta} \cdot \partial \left[\mathrm{id}^{\alpha+1} \cdot (1 - \mathrm{id})^{\beta+1} \cdot \partial g \right] + k \cdot (\alpha + \beta + k + 1) \cdot g = 0$$

ou bien

$$\mathrm{id} \cdot (1 - \mathrm{id}) \cdot \partial^2 g + [\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2) \cdot \mathrm{id}] \cdot \partial g + k \cdot (\alpha + \beta + k + 1) \cdot g = 0 \ .$$

Mise sous la forme

$$\mathrm{id} \cdot (1 - \mathrm{id}) \cdot \partial^2 g + [c - (a + b + 1) \cdot \mathrm{id}] \cdot \partial g - ab \cdot g = 0 \ ,$$

en posant $a := -k$, $b := \alpha + \beta + k + 1$ et $c := \alpha + 1$, on dit que c'est l'*équation différentielle hypergéométrique* . Une solution de cette équation est donnée par la *série hypergéométrique* ou de *Gauß*

$$F(a, b; c; z) := {}_2F_1(a, b, c; z) :=$$

$$:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \cdot (b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + k) \cdot \Gamma(b + k)}{\Gamma(c + k)} \cdot \frac{z^k}{k!} \ ,$$

dont le rayon de convergence est 1 pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Cette fonction peut être prolongée analytiquement dans $\mathbb{C} \setminus [1, \infty[$ grâce à la représentatrion intégrale

$$F(a, b; c; z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(c - b)} \cdot \int_0^1 \mathrm{id}^{b-1} \cdot (1 - \mathrm{id})^{c-b-1} \cdot (1 - z \cdot \mathrm{id})^{-a} \ ,$$

pour autant que l'on ait $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Si $c, c - a - b, a - b \notin \mathbb{Z}$, une seconde solution linéairement indépendante est

$$\mathrm{id}^{1-c} \cdot F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; \mathrm{id}) \ .$$

Les polynômes de Jacobi sont donnés par

$$J_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{\alpha + k}{k} \cdot F\left(-k, \alpha + \beta + k + 1; \alpha + 1; \frac{1 - x}{2}\right) \ .$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $0 < q < p + 1$. Les *polynômes hypergéométriques* $G_k^{(p,q)}$ sont ceux qui sont orthogonaux sur l'intervalle $]0, 1[$ par rapport au poids $\mathrm{id}^{q-1} \cdot (1 - \mathrm{id})^{p-q}$ et tels que $G_k^{(p,q)}(1) = 1$.

Grâce à la transformation ci-dessus ils correspondent aux polynômes de Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$ pour $\alpha, \beta \in]-1, \infty[$ tels que $q = \alpha + 1$ et $p = \alpha + \beta + 1$. Il vient

$$G_k^{(p,q)} = \frac{1}{\binom{q-1+k}{k}} \cdot J_k^{(q-1,p-q)}(1 - 2 \cdot \mathrm{id}) = F(-k, p + k; q; \mathrm{id}) \ .$$

Citons en plus quelques formules remarquables :

$$\ln(1 - z) = -z \cdot F(1, 1; 2; z)$$

$$\ln \frac{1 + z}{1 - z} = 2z \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

$$\arctan z = z \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right)$$

$$\arcsin z = z \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = z \cdot \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot F\left(1, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

L'équation différentielle de Laguerre

Le polynôme de Laguerre $L_k^{(\alpha)}$ satisfait sur $]0, \infty[$ à l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left[\mathrm{id}^{\alpha+1} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f\right] + k \cdot f = 0 \ ,$$

c'est-à-dire à

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + [\alpha + 1 - \mathrm{id}] \cdot \partial f + k \cdot f = 0 \ .$$

Mise sous la forme

$$\mathrm{id}^{1-b} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left[\mathrm{id}^{b} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f\right] - a \cdot f = 0 \ ,$$

en posant $a := -k$ et $b := \alpha + 1$, ou bien

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + [b - \mathrm{id}] \cdot \partial f - a \cdot f = 0$$

on dit que c'est l'*équation différentielle hypergéométrique confluente* . Une solution de cette équation est donnée par la *série hypergéométrique confluente de Kummer*

$$M(a, b; z) := {}_1F_1(a; b; z) :=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \cdot \frac{z^k}{k!} \ ,$$

dont le rayon de convergence est ∞ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Cette fonction peut être mise sous forme intégrale

$$M(a, b; z) := \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b-a)} \cdot \int_0^1 \mathrm{id}^{a-1} \cdot (1 - \mathrm{id})^{b-a-1} \cdot e^{z \cdot \mathrm{id}} \ ,$$

pour autant que l'on ait $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a > 0$. Une seconde solution linéairement indépendante est

$$U(a, b; \mathrm{id}) := \frac{\pi}{\sin(\pi\, \mathrm{id})} \cdot \left[\frac{M(a, b, \mathrm{id})}{\Gamma(a - b + 1) \cdot \Gamma(b)} - \mathrm{id}^{1-b} \cdot \frac{M(a - b + 1, 2 - b, \mathrm{id})}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(2 - b)}\right] \ .$$

Les polynômes de Laguerre sont donnés par

$$L_k^{(\alpha)}(t) = \binom{\alpha + k}{k} \cdot M(-k, \alpha + 1; t) \ .$$

Citons en plus quelques formules remarquables :

$$e^z = M(a, a; z)$$

$$\sin z = z \cdot e^{i \cdot z} \cdot M(1, 2; -2i \cdot z)$$

$$\sinh z = z \cdot e^{-z} \cdot M(1, 2; 2z)$$

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \cdot M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -t^2\right)$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot f : \mathbb{K}^{]0,\infty[} \longrightarrow \mathbb{K}^{]0,\infty[} ;$$

puisque

$$\rho = \mathrm{id}^{b-1} \quad , \quad p = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad q = a \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{1}{\mathrm{id}} \quad , \quad \widetilde{p} = \mathrm{id}$$

et, utilisant la formule de Leibniz,

$$\widetilde{q} = \mathrm{id}^{-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \mathrm{id} \cdot \partial \left[\frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \right) \right] + a = \mathrm{id}^{1-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \partial^2 \left(\mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \right) + a =$$

$$= \mathrm{id}^{1-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \left[\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} - 1 \right) \mathrm{id}^{\frac{b}{2}-2} + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \mathrm{id}^{\frac{b}{2}-1} + \frac{1}{4} \mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \right] \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} + a =$$

$$= - \left[\frac{\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2} \right)^2}{\mathrm{id}} + \frac{b}{2} - a - \frac{\mathrm{id}}{4} \right] .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 g + \left[\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2} \right)^2}{\mathrm{id}} + \frac{b}{2} - a - \frac{\mathrm{id}}{4} \right] \cdot g = 0 .$$

Mise sous la forme

$$\partial^2 g + \left[\frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\mathrm{id}^2} + \frac{\kappa}{\mathrm{id}} - \frac{1}{4} \right] \cdot g = 0 ,$$

en posant $\kappa := \frac{b}{2} - a$ et $\mu := \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$, on dit que c'est l'*équation différentielle de Whittaker* dont un système fondamental de solutions est formé par les *fonctions de Whittaker*

$$M_{\kappa,\mu} := \mathrm{id}^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot M \left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, \mathrm{id} \right)$$

et de

$$W_{\kappa,\mu} := \mathrm{id}^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot U \left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, \mathrm{id} \right) =$$

$$= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \kappa - \mu \right)} \cdot M_{\kappa,\mu} + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \kappa + \mu \right)} \cdot M_{\kappa,-\mu} .$$

La fonction de Kummer est aussi liée aux fonctions de Bessel par la transformation

$$f \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} \cdot f(2i \cdot \mathrm{id}) : \mathbb{C}^{\mathbb{C} \smallsetminus i \cdot \mathbb{R}_+} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-} .$$

Mais attention cette transformation n'est pas du type décrit dans le théorème puisque le changement de variable se fait dans le domaine complexe :

$$]0, \infty[\longrightarrow i \cdot]0, \infty[: s \longmapsto 2i \cdot s .$$

Son image n'est pas l'ensemble de définition $]0, \infty[$ de l'équation différentielle de Kummer, mais $i \cdot]0, \infty[$ surlequel on peut considérer une nouvelle équation différentielle obtenue par restriction de l'équation différentielle de Kummer considérée dans le domaine complexe. Considérons tout d'abord la transformation

$$f \longmapsto h := f\left(2i \cdot \mathrm{id}\right) : \mathcal{O}\left(\mathbb{C} \smallsetminus i \cdot \mathbb{R}_+\right) \longrightarrow \mathcal{O}\left(\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-\right) \ ,$$

on obtient

$$(2i \cdot \mathrm{id})^{1-b} \cdot e^{2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \cdot \partial \left[(2i \cdot \mathrm{id})^b \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial h\right] - a \cdot h = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^{1-b} \cdot e^{2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial \left[\mathrm{id}^b \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial h\right] - 2i \cdot a \cdot h = 0 \ .$$

Remarquons que le poids n'est plus réel ; on ne peut donc pas lui associer un espace de Hilbert. Faisons maintenant la transformation

$$h \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} \cdot h : \mathbb{C}^{]0,\infty[} \longrightarrow \mathbb{C}^{]0,\infty[} \ .$$

Puisque

$$\rho = \mathrm{id}^{b-1} \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \quad , \quad p = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad q = 2i \cdot a \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = \mathrm{id}$$

et

$$\widetilde{q} = \mathrm{id}^{\frac{1-b}{2}} \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial \left[\mathrm{id} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}}\right)\right] + 2i \cdot a =$$

$$= \mathrm{id}^{\frac{1-b}{2}} \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial \left[\left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right) \cdot \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}}\right] + 2i \cdot a =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[-i \cdot \mathrm{id} + \frac{b-1}{2} \cdot \left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right) - i \cdot \mathrm{id} \cdot \left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[\left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right)^2 - i \cdot \mathrm{id} + 2i \cdot a \cdot \mathrm{id}\right] \ .$$

En choisissant $a := \nu + \frac{1}{2}$ et $b := 2\nu + 1$, on obtient l'équation différentielle

$$\partial\left(\mathrm{id} \cdot \partial g\right) - \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[(\nu - i \cdot \mathrm{id})^2 + 2i \cdot \nu \cdot \mathrm{id}\right] \cdot g = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 g + \mathrm{id} \cdot \partial g + \left(\mathrm{id}^2 - \nu^2\right) \cdot g = 0 \ .$$

C'est l'*équation différentielle de Bessel* . La *fonction de Bessel* (ou *fonction cylindrique*) d'ordre $\nu \in \mathbb{C}$ est définie par

$$J_\nu\left(s\right) := \frac{1}{\Gamma\left(\nu + 1\right)} \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^\nu \cdot e^{-i \cdot s} \cdot M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2i \cdot s\right)$$

en est une solution. Les fonctions J_ν et $J_{-\nu}$ forment un système fondamental de solutions.si $\nu \notin \mathbb{Z}$. Quel que soit $\nu \in \mathbb{C}$ il en est de même de la fonction de Bessel J_ν et de la fonction de *Weber*

$$Y_\nu := \frac{1}{\sin\left(\pi\nu\right)} \cdot \left(\cos\left(\pi\nu\right) \cdot J_\nu - J_{-\nu}\right) \ .$$

L'équation différentielle d'Hermite

Le polynôme de d'Hermite H_k satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle

$$e^{\mathrm{id}^2} \cdot \partial \left[e^{-\mathrm{id}^2} \cdot \partial f \right] + 2k \cdot f = 0 \ ,$$

c'est-à-dire à

$$\partial^2 f - 2\,\mathrm{id} \cdot \partial f + 2k \cdot f = 0 \ .$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot f\left(\frac{\diamond}{\sqrt{2}} \right) : \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \ .$$

Puisque

$$\rho = e^{-\mathrm{id}^2} \quad , \quad p = 1 \quad \text{et} \quad q = -2k \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\left(\frac{\mathrm{id}}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}}} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = 2$$

et

$$\widetilde{q} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot \partial \left(2 \cdot \partial \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \right) - 2k = 2 \cdot e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot \partial^2 e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} - 2k =$$

$$= -e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot \partial \left(\mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \right) - 2k = -1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{id}^2 - 2k \ .$$

Ainsi Φ est une isométrie de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ et on obtient l'équation différentielle

$$\partial^2 g - \left(\frac{\mathrm{id}^2}{4} + a \right) \cdot g = 0$$

en ayant posé $a := -k - \frac{1}{2}$. Un système fondamental de solutions de cette équation sont les fonctions dites *paraboliques cylindriques* :

$$e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot M\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{id}^2}{2} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} M\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{id}^2}{2} \right) \ .$$

On peut aussi considérer la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot f : \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \ .$$

Dans ce cas il vient évidemment

$$\widetilde{\rho} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = 1$$

et

$$\widetilde{q} = e^{\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot \partial^2 e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}} - 2k = -e^{\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot \partial \left(\mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \right) - 2k =$$

$$= -1 + \mathrm{id}^2 - 2k \ .$$

Ainsi Φ est aussi une isométrie de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ et on obtient l'équation différentielle

$$\partial^2 g - \mathrm{id}^2 \cdot g + (2k+1) \cdot g = 0 \ .$$

Puisque les polynômes d'Hermite $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\operatorname{id}^2}\right)$ (théorème 1.15 ci-dessous), il en est de même de l'ensemble des *fonctions d'Hermite*

$$h_k := (-1)^k \cdot \left(\sqrt{\pi}\cdot 2^k \cdot k!\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{id}^2} \cdot H_k$$

dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Nous verrons plus tard que l'opérateur auto-adjoint non-borné

$$\widetilde{L} : g \longmapsto -\partial^2 g + \operatorname{id}^2 \cdot g \ ,$$

décrivant l'*oscillateur harmonique*, est diagonalisable dans cette base. Les valeurs propres sont évidemment $2k+1$. Remarquons que

$$h_k = \left(\sqrt{\pi}\cdot 2^k \cdot k!\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\operatorname{id}^2} \cdot \partial^k\left(e^{-\operatorname{id}^2}\right)$$

par la formule de Rodrigues. On peut montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\operatorname{id}-\partial)\,h_k = \sqrt{k+1}\cdot h_{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\operatorname{id}+\partial)\,h_k = \sqrt{k}\cdot h_{k-1}$$

et on dit que $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\operatorname{id}-\partial)$ est l'*opérateur de création* et $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\operatorname{id}+\partial)$ l'*opérateur d'annihilation* .

Les polynômes classiques exceptionnels

Dans le théorème 1.13 nous avons supposé que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système de polynômes orthogonaux, en particulier que ρ est un poids, ce qui entraîne des restrictions sur les coefficients définissant ces poids. D'où la question : sous quelles conditions obtient-on un système de polynômes à l'aide de la formule de Rodrigues ?

On a le résultat suivant :

PROPOSITION *Soient $\rho, p \in \mathcal{C}^{(\infty)}(J)$ tels que $\rho, p > 0$ sur J et posons*

$$q := \frac{\partial(\rho\cdot p)}{\rho} \quad , \quad \widetilde{q} := \frac{\partial(\rho)}{\rho}\cdot p = q - \partial p$$

et

$$p_k := \frac{1}{d_k\cdot\rho}\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right) \quad \textit{pour tout } k\in\mathbb{N} \ .$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $q\in\mathcal{P}_1$, $p\in\mathcal{P}_2$ *et* $0\notin\partial\widetilde{q}+\frac{\partial^2 p}{2}\cdot(2+\mathbb{N})$.

(ii) $p\in\mathcal{P}$ *et* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est un système de polynômes.*

Dans ce cas chaque p_k est solution d'une équation différentielle de type hypergéométrique

$$\frac{1}{\rho}\cdot\partial(\rho\cdot p\cdot\partial f) + \lambda_k\cdot f = 0$$

ou bien

$$p\cdot\partial^2 f + q\cdot\partial f + \lambda_k\cdot f = 0$$

pour un certain $\lambda_k\in\mathbb{K}$ et

$$\lambda_k = -k\cdot\left[\partial q + (k-1)\cdot\frac{\partial^2 p}{2}\right] \ .$$

En outre

$$\rho = \frac{\rho(\tau) \cdot p(\tau)}{p} \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond \frac{q}{p}\right)$$

pour tout $\tau \in J$.

La démonstration du théorème 1.13, (i)⇒(ii), montre que si $q \in \mathcal{P}_1$, on a les relations de récurrence $(*)$ et $(**)$. Remarquer $k \geqslant 1$ et $k \geqslant j+1$ entraîne $2k \geqslant k+j+1$, donc $2k - j \geqslant k+1 \geqslant 2$.

(i) ⇒ (ii) Utilisant $(*)$, on voit immédiatement que $p_k \in \mathcal{P}_k$. Il nous suffit donc de prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}$, que $\deg p_k = k$, donc que $g_k \neq 0$. Utilisant la relation de récurrence $(**)$

$$g_{k,0} = 1 \quad \text{et} \quad g_{k,j+1} = \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \ ,$$

et l'hypothèse, on voit que chaque $g_{k,j} \neq 0$, donc que $g_k = g_{k,k} \neq 0$.

(ii) ⇒ (i) On a $q = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = p_1 \in \mathcal{P}_1$ et comme dans la démonstration du théorème, (ii)⇒(iii), on montre que $p \in \mathcal{P}_2$. Finalement puisque $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système de polynômes, on a $\deg p_k = k$, donc $g_k \neq 0$, et par suite tous les $g_{k,j}$ sont $\neq 0$ par $(**)$; mais ceci prouve que

$$\partial\widetilde{q} + (2k-j) \cdot \frac{\partial^2 p}{2} \neq 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } j \in \mathbb{N} \text{ tels que } j \leqslant k \ ,$$

donc que $0 \notin \partial\widetilde{q} + \frac{\partial^2 p}{2} \cdot (2 + \mathbb{N})$.

La dernière partie découle également de la démonstration du théorème, (ii)⇒(iii) et, puisque

$$\frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho \cdot p} = \frac{q}{p} \ ,$$

on a

$$\rho = \frac{\rho(\tau) \cdot p(\tau)}{p} \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond \frac{q}{p}\right)$$

pour tout $\tau \in J$. □

A une transformation affine et une bonne normalisation près, et en choisissant J maximal tel que $p > 0$ sur J , on peut distinguer les cas suivants :

Cas $p = 1$ On a $J =]-\infty, \infty[$; en écrivant q sous la forme $q = 2s \cdot \mathrm{id} + t$ et si $\rho(0) = 1$, on obtient

$$\rho = \exp\left(\int_0^\diamond (2s \cdot \mathrm{id} + t)\right) = e^{s \cdot \mathrm{id}^2 + t \cdot \mathrm{id}} \ ,$$

et la condition s'écrit $0 \notin \{2s\}$, i.e. $s \neq 0$.

Sous-cas $\rho = e^{-\mathrm{id}^2}$ On obtient les polynômes d'Hermite H_k .

Sous-cas $\rho = e^{\mathrm{id}^2}$ ρ n'est pas un poids. Mais dans le domaine complexe il vient

$$e^{-\mathrm{id}^2} \cdot \partial^k e^{\mathrm{id}^2} = e^{-\mathrm{id}^2} \cdot \partial^k e^{-(i \cdot \mathrm{id})^2} = e^{(i \cdot \mathrm{id})^2} \cdot \left(\partial^k e^{-\mathrm{id}^2}\right)(i \cdot \mathrm{id}) \cdot i^k =$$

$$= \frac{1}{i^k} \cdot \left[(-1)^k \cdot e^{\mathrm{id}^2} \cdot \partial^k e^{-\mathrm{id}^2}\right](i \cdot \mathrm{id}) = \frac{1}{i^k} \cdot H_k(i \cdot \mathrm{id}) \ .$$

Cas $p = \mathrm{id}$ On a $J =]0, \infty[$; en écrivant q sous la forme $q = s \cdot \mathrm{id} + \alpha + 1$ et si $\rho(1) = e^s$, on obtient

$$\rho = \frac{e^s}{\mathrm{id}} \cdot \exp\left(\int_1^\diamond \left(s + \frac{\alpha+1}{\mathrm{id}}\right)\right) = \frac{e^{s \cdot \mathrm{id} + (\alpha+1) \cdot \ln}}{\mathrm{id}} = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{s \cdot \mathrm{id}}$$

et la condition s'écrit $0 \notin \{s\}$, i.e. $s \neq 0$.

Sous-cas $\rho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ **et** $\alpha > -1$ On obtient les polynômes de Laguerre $L_k^{(\alpha)}$.

Sous-cas $\rho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ **et** $\alpha \leqslant -1$ ρ n'est pas un poids, mais les polynômes sont formellement les mêmes que ceux de Laguerre : les coefficients de $L_k^{(\alpha)}$ sont des polynômes en α !

Sous-cas $\rho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{\mathrm{id}}$ ρ n'est pas un poids sur $]0, \infty[$. Mais

$$\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial^k \left(\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{\mathrm{id}}\right) = |-(-\mathrm{id})|^{-\alpha} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial^k \left(|-(-\mathrm{id})|^\alpha \cdot e^{-(-\mathrm{id})}\right) =$$

$$= \left[|-\mathrm{id}|^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial^k \left(|-\mathrm{id}|^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\right](-\mathrm{id}) \cdot (-1)^k =$$

$$= (-1)^k \cdot L_k^{(\alpha)}(-\mathrm{id}) \ .$$

Cas $p = 1 - \mathrm{id}^2$ On a $J =]-1, 1[$; et en écrivant q sous la forme $q = (\alpha+1) \cdot (1 + \mathrm{id}) - (\beta+1) \cdot (1 - \mathrm{id})$ et si $\rho(0) = 1$, on obtient

$$\rho = \frac{1}{1 - \mathrm{id}^2} \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond \frac{-(\alpha+1) \cdot (1+\mathrm{id}) + (\beta+1) \cdot (1-\mathrm{id})}{1 - \mathrm{id}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \mathrm{id}^2} \cdot e^{(\alpha+1) \cdot \ln(1-\mathrm{id}) + (\beta+1) \cdot \ln(1+\mathrm{id})} = (1 - \mathrm{id})^\alpha \cdot (1 + \mathrm{id})^\beta$$

et la condition s'écrit

$$0 \notin \partial\Big[-(\alpha+1) \cdot (1+\mathrm{id}) + (\beta+1) \cdot (1-\mathrm{id}) + 2 \cdot \mathrm{id}\Big] - (2 + \mathbb{N}) = -\alpha - \beta - (2 + \mathbb{N}) \ ,$$

i.e. $\alpha + \beta + 2 \notin -\mathbb{N}$.

Sous-cas $\alpha, \beta > -1$ La condition est évidemment satisfaite. On obtient les polynômes de Jacobi.

Sous-cas $\alpha \leqslant -1$ **ou** $\beta \leqslant -1$ **et** $\alpha + \beta + 2 \notin -\mathbb{N}$ ρ n'est pas un poids, mais les polynômes sont formellement les mêmes que ceux de Jacobi : les coefficients de $J_k^{(\alpha,\beta)}$ sont des polynômes en α et β !

Cas $p = \mathrm{id}^2$ On a $J =]0, \infty[$; en écrivant q sous la forme $q = (s+2) \cdot \mathrm{id} + t$ et si $\rho(1) = e^{-t}$, on obtient

$$\rho = \frac{e^{-t}}{\mathrm{id}^2} \cdot \exp\left(\int_1^\diamond \left(\frac{s+2}{\mathrm{id}} + \frac{t}{\mathrm{id}^2}\right)\right) = \frac{e^{(s+2) \cdot \ln - \frac{t}{\mathrm{id}}}}{\mathrm{id}^2} = \mathrm{id}^s \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}}$$

et la condition s'écrit

$$0 \notin \partial\Big((s+2) \cdot \mathrm{id} + t - 2 \cdot \mathrm{id}\Big) + (2 + \mathbb{N}) = s + 2 + \mathbb{N} \ ,$$

i.e. $s + 2 \notin -\mathbb{N}$. Remarquons que ρ n'est jamais un poids ! On obtient un système de polynômes satisfaisant à une équation différentielle de type hypergéométrique où

$$\lambda_k = -k \cdot (s + k + 1) \ .$$

Elle s'écrit

$$\mathrm{id}^{-s} \cdot e^{\frac{t}{\mathrm{id}}} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{s+2} \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \cdot \partial h \right) + \lambda_k \cdot h = 0 \tag{$*$}$$

ou bien

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 h + \Big[(s+2) \cdot \mathrm{id} + t \Big] \cdot \partial h + \lambda_k \cdot h = 0 \ .$$

Sous-cas $t = 0$ On a

$$p_k = \frac{1}{d_k} \cdot \mathrm{id}^{-s} \cdot \partial^k \left(\mathrm{id}^{s+2k} \right) = \mathrm{id}^k$$

en prenant $d_k := (s+2k) \cdots (s+k+1) = \frac{(s+2k)!}{(s+k)!}$.

Sous-cas $t \neq 0$ Etant donné $k \in \mathbb{N}$ considérons la transformation

$$\Phi : h \longmapsto f := \mathrm{id}^k \cdot h \circ \frac{t}{\mathrm{id}} \ .$$

Remarquons que $\Phi p_k = \mathrm{id}^k \cdot p_k \left(\frac{t}{\mathrm{id}} \right)$ est un polynôme de degré k . Puisque

$$\rho = \mathrm{id}^s \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \quad , \quad p = \mathrm{id}^2 \quad \text{et} \quad q = k \cdot (s+k+1) \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{\frac{t}{\mathrm{id}^2} \cdot \left(\frac{t}{\mathrm{id}} \right)^s \cdot e^{-\frac{t}{\frac{t}{\mathrm{id}}}}}{\mathrm{id}^{2k}} = t^{s+1} \cdot \mathrm{id}^{-s-2-2k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{\left(\frac{t}{\mathrm{id}} \right)^2}{\left(\frac{t}{\mathrm{id}^2} \right)^2} = \mathrm{id}^2$$

et

$$\widetilde{q} = \frac{\partial \left(t^{s+1} \cdot \mathrm{id}^{-s-2-2k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id}^2 \cdot \partial \left[\mathrm{id}^k \right] \right)}{\mathrm{id}^k \cdot t^{s+1} \cdot \mathrm{id}^{-s-2-2k} \cdot e^{-\mathrm{id}}} + k \cdot (s+k+1) =$$

$$= k \cdot \mathrm{id}^{s+2+k} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{-s-k-1} \cdot e^{-\mathrm{id}} \right) + k \cdot (s+k+1) =$$

$$= k \cdot \mathrm{id}^{s+2+k} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \left[(-s-k+1) \cdot \mathrm{id}^{-s-k-2} - \mathrm{id}^{-s-k-1} \right] \cdot e^{-\mathrm{id}} + k \cdot (s+k+1) =$$

$$= k \cdot [(-s-k+1) + (s+k-1) - \mathrm{id}] = -k \cdot \mathrm{id} \ .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{s+2+2k} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{-s-2k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f \right) + k \cdot \mathrm{id} \cdot f = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^{s+1+2k} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{-s-2k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f \right) + k \cdot f = 0$$

ou bien

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + (-s-2k-\mathrm{id}) \cdot \partial f + k \cdot f = 0 \ ,$$

qui est l'équation de Laguerre pour $\alpha := 1-s-2k$. On peut alors voir $\Phi p_k = L_k^{(1-s-2k)}$ en ayant choisi la bonne constante d_k , donc que

$$p_k = \left(\frac{\mathrm{id}}{t} \right)^k \cdot L_k^{(1-s-2k)} \left(\frac{t}{\mathrm{id}} \right) \ .$$

REMARQUE 2 Si p_k est défini par la formule de Rodrigues, nous avonc vu que ρ est déterminé par p et $q := d_1 \cdot p_1 = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho}$:

$$\rho = \frac{\rho(\tau) \cdot p(\tau)}{p} \cdot \exp\left(\int_{\tau}^{\diamond} \frac{q}{p}\right)$$

pour tout $\tau \in J$. En outre on a l'équation différentielle non-linéaire

$$p \cdot \partial^2 p + q \cdot \partial p + \partial q \cdot p + q^2 - d_2 \cdot p_2 = 0$$

grâce à la démonstration du théorème 1.13, (ii)$\Rightarrow$(iii).

PROBLEME Existe-il des solutions p non-polynomiales de cette équation différentielle telle que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit un système de polynômes ? Plus généralement est-ce que le système de fonctions $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ possède des propriétés intéressantes ?

REMARQUE 3 Si $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système de polynômes et s'il existe $p, q, r \in \mathcal{C}^{(\infty)}(J)$ tels que chaque p_k soit solution d'une équation différentielle du type

$$p \cdot \partial^2 f + q \cdot \partial f + r \cdot f + \lambda_k \cdot f = 0 \quad \text{pour un certain } \lambda_k \in \mathbb{K} \ ,$$

alors $r \in \mathcal{P}_0$, $q \in \mathcal{P}_1$ et $p \in \mathcal{P}_2$.

En effet pour $k = 0$, on a $p_0 \neq 0$ et $\partial^2 p_0 = \partial p_0 = 0$, donc $(r + \lambda_0) \cdot p_0 = 0$, ce qui montre que $r = -\lambda_0$ est une constante. Pour $k = 1$, il vient $\partial p_1 \neq 0$ et $\partial^2 p_1 = 0$, donc $q \cdot \partial p_1 + (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot p_1 = 0$ et par suite $q = (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot \frac{p_1}{\partial p_1} \in \mathcal{P}_1$. Finalement pour $k = 2$, on obtient $\partial^2 p_2 \neq 0$ et

$$p \cdot \partial^2 p_2 + (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot \frac{p_1}{\partial p_1} \cdot \partial p_2 + (\lambda_2 - \lambda_0) \cdot p_2 = 0 \ ,$$

donc $p \in \mathcal{P}_2$. $\square$

Mais attention p_k n'est pas nécessairement donné par la formule de Rodrigues. Par exemple l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 f + s \cdot \mathrm{id} \cdot \partial f - k \cdot (s + k - 1) \cdot f = 0$$

a comme solution id^m pour autant que

$$m(m-1) + s \cdot m - k \cdot (s + k - 1) = 0 \ ,$$

i.e.

$$m \cdot (s + m - 1) = k \cdot (s + k - 1) \ .$$

En particulier id^k , mais aussi id^{1-s-k} sont des solutions. Si $s \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant 1 - s - k < k$, i.e. $1 - 2k < s \leqslant 1 - k$, alors

$$\mathrm{id}^k + c \cdot \mathrm{id}^{1-s-k}$$

est une solution dans $\mathcal{P}_k$ qui ne s'obtient pas à l'aide de la formule de Rodrigues si $c \neq 0$.

1.15 Les bases hilbertiennes de polynômes classiques

Voici maintenant le résultat fondamental pour les applications :

THEOREME *Chaque système de polynômes orthonormés classiques est une base hilbertienne de l'espace* $\mathbf{L}^2$ *correspondant. Plus précisément :*

$$\left(\frac{J_k^{(\alpha,\beta)}}{\left\|J_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_{2,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad , \quad \left(\frac{L_k^{(\alpha)}}{\left\|L_k^{(\alpha)}\right\|_{2,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad \textit{et} \quad \left(\frac{H_k}{\|H_k\|_{2,e^{-\mathrm{id}^2}}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

sont respectivement des bases hilbertiennes de

$$\mathbf{L}^2\left(\left]-1,1\right[,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta\right) \quad , \quad \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right) \quad \textit{et} \quad \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right) \ .$$

Démonstration de (i) Cela découle de la proposition 1.11.

Démonstration de (ii) La démonstration détailée est laissée en exercice. Il suffit de remarquer tout d'abord que la transformation

$$x\longmapsto e^{-x}:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\left]0,1\right[$$

définit une isométrie surjective

$$\mathbf{L}^2\left(\left]0,1\right[,(-\ln)^\alpha\right)\longrightarrow\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right):g\longmapsto g\left(e^{-\mathrm{id}}\right) \ .$$

Par suite l'image $\left(e^{-k\cdot\mathrm{id}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite totale des monômes $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{L}^2\left(\left]0,1\right[,(-\ln)^\alpha\right)$ (proposition 1.11) est totale dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$. Utilisant le théorème 1.9, on montre que

$$e^{-n\cdot\mathrm{id}}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\widetilde{L}_k^{(\alpha)}\middle|\,e^{-n\cdot\mathrm{id}}\right)\cdot\widetilde{L}_k^{(\alpha)} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}})$$

grâce à l'égalité de Parseval, qui est une conséquence de la formule du binôme ! Ceci finit de prouver que $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale.

Démonstration de (iii) En désignant par $\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ et $\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ les sous-espaces vectoriels fermés de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ formés des fonctions paires et respectivement impaires, on a

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)=\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)\boxplus\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right) \ .$$

La transformation

$$x\longmapsto x^2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$$

définit, en posant $\widetilde{g}(x)=g\left(x^2\right)$, des isométries surjectives

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\longrightarrow\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right):g\longmapsto\widetilde{g}$$

et

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\longrightarrow\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right):g\longmapsto\mathrm{id}\cdot\widetilde{g} \ .$$

On en déduit que les images des polynômes de Laguerre $L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ et $L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, qui sont des polynômes de degré $2k$ et $2k+1$ respectivement, forment un système de polynômes orthogonaux total dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$. On a donc

$$H_{2k} \sim L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \quad \text{et} \quad H_{2k+1} \sim \mathrm{id} \cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \ .$$

La totalité des polynômes d'Hermite découle alors de celle de polynômes de Laguerre. □

En comparant les coefficients de la plus haute puissance, on voit que

$$H_{2k} = (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot k! \cdot L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \quad \text{et} \quad H_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot k! \cdot \mathrm{id} \cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \ .$$

On peut aussi prouver la totalité des polynômes de Laguerre en considérant

Les fonctions génératrices

Il est souvent utile de connaître la *fonction génératrice* associée à un système de polynômes orthogonaux $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convenable, que l'on introduit pour renormaliser les polynômes. Elle est définie par

$$\Phi(x, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cdot p_k(x) \cdot z^k$$

pour tout $x \in J$ et $|z| < R$.

Le calcul de Φ se fait en utilisant la théorie des fonctions. Si γ est un lacet dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$ n'entourant qu'une fois le point $x \in \mathbb{R}_+^*$, la formule de Rodrigues et celle de Cauchy montrent que

$$p_k(x) = \frac{1}{d_k \cdot \rho(x)} \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right)(x) = \frac{1}{d_k \cdot \rho(x)} \cdot \frac{k!}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{\rho(\zeta) \cdot p(\zeta)^k}{(\zeta - x)^{k+1}}\, d\zeta \ ,$$

donc

$$\Phi(x, z) := \frac{1}{\rho(x)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot \rho_k}{2\pi i \cdot d_k} \cdot \int_\gamma \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - x} \cdot \left(\frac{z \cdot p(\zeta)}{\zeta - x}\right)^k d\zeta \ .$$

Faisons le calcul dans le cas des polynômes de Laguerre. Si ln désigne la branche principale du logarithme définie dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$, on a

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} \cdot e^x}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{e^{\alpha \cdot \ln \zeta - \zeta} \cdot \zeta^k}{(\zeta - x)^{k+1}}\, d\zeta \ ,$$

donc

$$\sum_{k\geqslant 0} L_k^{(\alpha)}(x) \cdot z_k = \frac{x^{-\alpha} \cdot e^x}{2\pi i} \cdot \sum_{k\geqslant 0} \int_\gamma e^{\alpha \cdot \ln \zeta - \zeta} \cdot \left(\frac{z \cdot \zeta}{\zeta - x}\right)^k \frac{d\zeta}{\zeta - x} \ .$$

Si $|z| < 1$, en prenant pour γ le cercle d'équation

$$\sqrt{|z|} \cdot |\zeta| = |\zeta - x| \ ,$$

dont le centre est $\frac{x}{1-|z|}$ et le rayon $\frac{x^2}{(1-|z|)^2} - \frac{x}{1-|z|}$, pour tout $\zeta \in \gamma$, on a

$$\left|\frac{z \cdot \zeta}{\zeta - x}\right| = \sqrt{|z|} < 1 \ ,$$

ce qui montre que la série $\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}\right)^k$ converge uniformément sur γ . Par permutation de la somme et de l'intégrale, on obtient

$$\sum_{k\geqslant 0} L_k^{(\alpha)}(x)\cdot z_k = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}\cdot\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}\right)^k\frac{d\zeta}{\zeta-x} =$$

$$= \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{1-\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}}\frac{d\zeta}{\zeta-x} = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{(1-z)\cdot\zeta-x}\,d\zeta =$$

$$= x^{-\alpha}\cdot e^x\cdot Res_{\zeta=\frac{x}{1-z}}\frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{(1-z)\cdot\zeta-x} = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{1-z}\cdot\exp\left(\alpha\cdot\ln\frac{x}{1-z}-\frac{x}{1-z}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{\alpha+1}}\ ,$$

grâce au théorème des résidus, car $\frac{x}{1-z}$ est à l'intérieur du cercle γ .

Ceci fournit, par exemple, une autre manière de prouver la totalité de $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, car pour $z=\frac{n}{n+1}$, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(\alpha)}(x)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\frac{\exp\left(\frac{xn}{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}\right)}{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}} = e^{-n\cdot x}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. Mais comme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|L_k^{(\alpha)}\right\|_{2,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}}^2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+k)!}{k!}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k}<\infty$$

par le critère du quotient, le théorème 1.9 montre que

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot L_k^{(\alpha)}$$

converge dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$ vers ξ . Puisqu'une sous-suite des sommes partielles converge ponctuellement presque partout vers ξ , la formule $(*)$ montre que $\xi=e^{-n\cdot\mathrm{id}}$ $\lambda_{]0,\infty[}$-p.p. . Ainsi

$$e^{-n\cdot\mathrm{id}} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot L_k^{(\alpha)}\quad\text{dans } \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\ ,$$

comme nous l'avons démontré dans le théorème ci-dessus.

On a la table suivante :

	ρ_k	$\Phi(x,z)$	R
Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	$2^{-(\alpha+\beta)}$	$\frac{\left(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\alpha}\cdot\left(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	1	$\dfrac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{a+1}}$	1
Hermite H_k	$\dfrac{1}{k!}$	e^{2xz-z^2}	∞
Legendre P_k	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Tchebycheff T_k	1	$\dfrac{(1-xz)}{1-2xz+z^2}$	1
Tchebycheff U_k	1	$\dfrac{1}{1-2xz+z^2}$	1
Gegenbauer $G_k^{(\gamma)}$	1	$\dfrac{1}{(1-2xz+z^2)^{\alpha}}$ si $\gamma \neq 0$; $-\ln(1-2xz+z^2)$ si $\gamma = 0$	1

1.16 Densité et appartenance à un espace $\mathbf{L}^2$

Soit μ une intégrale de Radon sur X .

Rappelons (cf. Analyse, définition 15.12) qu'une fonction f sur X est dite μ-modérée s'il existe une suite (croissante) $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'ensembles μ-intégrables X telle que $f = 0$ μ-p.p. hors de $\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$. Une partie $A \subset X$ est dite μ-modérée si 1_A est μ-modérée. En outre (cf. Analyse, définition 16.8.2) une intégrale de Radon μ est dite modérée si l'ensemble X est μ-modéré.

L'exemple 15.12.1 du cours d'Analyse [17] montre que toute fonction $f \in \mathbf{L}^p(\mu)$ pour $p \in [1, \infty[$ est μ-modérée, puisque $|f|^p \in \mathbf{L}^1(\mu)$. Si μ est modérée, alors toute fonction sur X est μ-modérée.

REMARQUE 1 Si l'on ne veut pas supposer que l'intégrale μ considérée soit modérée, il est indispensable d'utiliser la théorie de l'intégration essentielle. Pour plus de détails on peut consulter le cours d'Analyse [17] et les remarques correspondantes : 14.8.2, 14.10, 14.11, 14.12.2, 14.13, 15.1, 15.2.2, 15.3, 15.6, 15.7.2, 15.9.2, 15.10, 15.12, 15.13.4, 15.14.2.

Dans ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, nous n'utiliserons pas ces résultats. Nous n'aurons besoin que de la notion qui suit !

DEFINITION 1 Nous dirons qu'un ensemble μ-mesurable $A \subset X$ est *localement μ-négligeable* si, pour tout compact K de X tel que $K \subset A$, on a $\mu(K) = 0$. Une propriété P des éléments de X est dite vraie *localement* μ-p.p. si l'ensemble $\{x \in X \mid P(x) \text{ est fausse}\}$ est un ensemble localement μ-négligeable. Par exemple une fonction f sur X est dite localement μ-négligeable si $\{f \neq 0\}$ est localement μ-négligeable.

LEMME *Soit A une partie de X .*

(i) Si A est μ-mesurable et μ-modérée, alors

$$\mu^*(A) = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X), K\subset A} \mu(K) \ .$$

(ii) Pour que A soit localement μ-négligeable, il faut et il suffit que, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, l'ensemble $A \cap K$ soit μ-négligeable.

(iii) Un ensemble A est μ-négligeable si, et seulement si, A est μ-modéré et localement μ-négligeable.

(iv) L'application canonique

$$\left\{ f \in \mathbb{K}^X \mid f \ \mu\text{-modérée} \right\} / \left\{ f \ \mu\text{-négligeable} \right\} \longrightarrow \mathbb{K}^X / \left\{ f \ \text{localement } \mu\text{-négligeable} \right\}$$

est injective. En particulier on peut considérer $\mathbf{L}^p(\mu)$, pour $p \in [1, \infty[$, comme formé de classes de fonctions (essentiellement) de puissance p-ième μ-intégrable modulo les fonctions localement μ-négligeables.

Démonstration de (i) Cf. proposition 15.12.iii.

Démonstration de (ii) La condition est suffisante, car A est μ-mesurable (cf. Analyse, théorème 15.9.iii) et, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que $K \subset A$, l'ensemble $K = A \cap K$ est μ-négligeable. Réciproquement, puisque $A \cap K$ est μ-mesurable et μ-modéré, grâce à (i) on a

$$\mu(A \cap K) = \sup_{L \in \mathfrak{K}(X), L \subset A \cap K} \mu(L) = 0 \ .$$

Démonstration de (iii) C'est immédiat par (i).

Démonstration de (iv) Cela découle de (iii) et du cours d'Analyse [17], remarque 15.6. □

DEFINITION 2 Soit F est un espace vectoriel de (classes par rapport à μ de) fonctions sur X . Si toute fonction f sur X telle que $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ quel que soit $\varphi \in F$, est μ-mesurable et si en plus

$$\int \varphi \cdot f \, d\mu = 0 \text{ pour tout } \varphi \in F \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ localement } \mu\text{-p.p. ,}$$

nous dirons que F est un *espace test* (de fonctions) par rapport à μ et que μ est l'intégrale de Radon *pivot* .

PROPOSITION *Soit $\mathcal{F} \subset F$ un ensemble de (classes par rapport à μ de) fonctions sur X satisfaisant à la propriété suivante : pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ telle que*

$$|\varphi_k| \leqslant |\varphi_0| \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et

$$1_K = \lim_k \varphi_k \quad \textit{ponctuellement } \mu\textit{-p.p.}$$

Alors F est un espace test.

En outre si f est une fonction sur X telle que $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et $\int \varphi \cdot f \, d\mu \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$, alors $f \geqslant 0$ localement μ-p.p. . Si f est μ-modérée, on obtient $f \geqslant 0$ μ-p.p. .

En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$|\varphi_k \cdot f| \leqslant |\varphi_0 \cdot f| \in \mathbf{L}^1(\mu)$$

et

$$1_K \cdot f = \lim_k \varphi_k \cdot f \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p. ,}$$

donc $1_K \cdot f$ est μ-intégrable par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Par suite f est μ-mesurable (cours d'Analyse [17], théorème 15.9.iii) et si

$$\int 1_K \cdot (\mathrm{Re}\, f + i \cdot \mathrm{Im}\, f) \, d\mu = \int 1_K \cdot f \, d\mu = \lim_k \int \varphi_k \cdot f \, d\mu \left\{ \begin{array}{c} \geqslant \\ = \end{array} \right\} 0 \ ,$$

on a

$$\int 1_K \cdot \mathrm{Re}\, f \, d\mu \left\{ \begin{array}{c} \geqslant \\ = \end{array} \right\} 0 \quad \text{et} \quad \int 1_K \cdot \mathrm{Im}\, f \, d\mu = 0 \ .$$

Pour tout compact $K \subset \{\mathrm{Re}\, f < 0\}$, on a $1_K \cdot \mathrm{Re}\, f \leqslant 0$, donc $\int 1_K \cdot \mathrm{Re}\, f \, d\mu = 0$, puis $1_K \cdot \mathrm{Re}\, f = 0$ μ-p.p. et par suite $1_K = 0$ μ-p.p. , i.e. $\mu(K) = 0$. Ceci montre que $\{\mathrm{Re}\, f < 0\}$ est un ensemble localement μ-négligeable. On prouve de même que $\{\mathrm{Re}\, f > 0\}$ (dans le second cas), puis que $\{\mathrm{Im}\, f < 0\}$ et $\{\mathrm{Im}\, f > 0\}$ sont localement μ-négligeables. Ceci finit de prouver que $f \geqslant 0$, respectivement $f = 0$, localement μ-p.p.

Si f est μ-modérée, par le lemme ci-dessus, il vient

$$\mu^*(\{\mathrm{Re}\, f < 0\}) = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X),K\subset\{f<0\}} \mu(K) = 0 \ ,$$

puisque $\{f < 0\}$ est une partie μ-modérée. Il en est de même pour les autres ensembles. □

COROLLAIRE *Si F est un espace vectoriel de fonctions sur X contenant une partie $\mathcal{F}$ telle que*

(i) $0 \in \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}$ *est réticulée.*

(ii) $\mathcal{F}$ *est totale dans* $\mathbf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ *pour un certain* $p \in [1, \infty[$.

(iii) Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ *, il existe* $\varphi \in \mathcal{F}$ *tel que* $\varphi \geqslant 1$ *sur* K .

Alors F est un espace test.

En effet, on a $1_K = \lim_k \psi_k$ dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour une suite $(\psi_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{F}$ par l'hypothèse de densité (ii). En extrayant au besoin une sous-suite, grâce au théorème de Riesz-Fischer (cf. cours d'Analyse [17], 15.14), nous pouvons supposer que l'on a

$$1_K = \lim_k \psi_k \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p. .}$$

Utilisant (i) et (iii), il suffit de définir

$$\varphi_k := \max[\min(\psi_k, \varphi), 0] \quad \text{et} \quad \varphi_0 := \varphi \ . \quad \square$$

EXEMPLE 1 Si $1_K \in F$ pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, alors F est un espace test.

C'est évident par la proposition. □

EXEMPLE 2 L'espace $\mathcal{K}(X)$, lorsque X est un espace localement compact, ainsi que $\mathcal{E}(J)$, lorsque J est un intervalle de $\mathbb{R}$, ou encore $\mathcal{K}_{\mathcal{U}(\mu)}(X)$, lorsque X est complétement régulier, sont des espaces test.

Cela découle du corollaire et du cours d'Analyse [17], corollaire 15.15 et exercice 15.15.3. □

EXEMPLE 3 Le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(X)$ de $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ formé des fonctions à support compact (cf. exemple 2.10.3), où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est un espace test.

En effet, soit $(\psi_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de $\mathcal{K}(X)$ telle que $0 \leqslant \psi_k \leqslant \psi_0$ et $1_K = \lim_k \psi_k$ ponctuellement μ-p.p. , construite comme la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans le corollaire ci-dessus. Or $\mathcal{D}([\mathrm{supp}\, \psi_0]^\circ)$ est dense dans $\mathcal{C}^0([\mathrm{supp}\, \psi_0]^\circ)$ par le théorème de Stone-Weierstraß et $\psi_k \in \mathcal{C}^0([\mathrm{supp}\, \psi_0]^\circ)$; il existe donc, pour tout $k \geqslant 1$, un $\varphi_k \in \mathcal{D}([\mathrm{supp}\, \psi_0]^\circ)$ tel que $\|\varphi_k - \psi_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$. Choisissons encore $\varphi_0 \in \mathcal{D}_+(X)$ tel que $\varphi_0 \geqslant \psi_0 + 1$ sur $\mathrm{supp}\, \psi_0$. On a alors

$$-\varphi_0 \leqslant \psi_k - \frac{1}{k} \leqslant \varphi_k \leqslant \psi_k + \frac{1}{k} \leqslant \psi_0 + 1 \leqslant \varphi_0 \quad \text{sur } \mathrm{supp}\, \psi_0 \ ,$$

donc

$$|\varphi_k| \leqslant \varphi_0 \ ,$$

et

$$\lim_k \varphi_k = \lim_k (\varphi_k - \psi_k) + \lim_k \psi_k = 1_K \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p. .} \quad \square$$

EXEMPLE 4 On ne peut pas supprimer l'hypothèse que $\mathcal{F}$ soit réticulée dans le corollaire.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{K}(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel dense de $\ell^2(\mathbb{N}) = \mathbf{L}^2(\mathbb{N}, \#)$ et que la forme linéaire

$$\nu : \varphi \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi(k) : \mathcal{K}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

n'est pas continue pour $\|\cdot\|_2$. Son noyau F est donc dense par rapport à $\|\cdot\|_2$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{N})$ (cf. exercice 2.8), donc aussi dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Il est clair que F est involutif et, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{N})$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F telle que $\lim_k \varphi_k = 1_K$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, et par suite ponctuellement. En outre, il existe $\varphi \in F$ tel que $\varphi \geqslant 1$ sur K . Mais on a

$$1 \cdot \varphi \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad \text{et} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} 1 \cdot \varphi(k) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F\,!$$

THEOREME *Soit F un espace test par rapport à μ .*

(i) *Si $F \subset \mathbf{L}^2(\mu)$, alors F est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.*
Dans ce cas

(ii) *Si f est une fonction telle que, pour tout $\varphi \in F$, on ait $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et*

$$\sup\nolimits_{\varphi\in F,\|\varphi\|_2\leqslant 1} \left| \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu \right| < \infty \ ,$$

alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$.

Démonstration de (i) Pour montrer que F est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, soit $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que $\xi \perp F$. Pour tout $\varphi \in F$, on a $\overline{\varphi} \cdot \xi \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et

$$\int^* \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\mu = (\varphi | \, \xi) = 0 \ ,$$

donc $\xi = 0$ par ce qui précède, puisque ξ est μ-modérée. La densité de F découle donc du corollaire 1.4.

Démonstration de (ii) La condition signifie que la forme semi-linéaire

$$\nu : \varphi \longmapsto \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue pour $\|\cdot\|_2$. On peut donc la prolonger à $\mathbf{L}^2(\mu)$ en une forme semi-linéaire continue $\widetilde{\nu}$ (cf. exercice 1.5, ou bien le théorème 2.5.iii ou encore le théorème de Hahn-Banach 3.6). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que

$$\widetilde{\nu}(\psi) = (\psi | \, \xi) \quad \text{pour tout } \psi \in \mathbf{L}^2(\mu) \ .$$

Pour tout $\varphi \in F$, on a alors

$$\int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu = \nu(\varphi) = \widetilde{\nu}(\varphi) = (\varphi | \, \xi) = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\mu \ ,$$

donc $\int \varphi \cdot \overline{(f - \xi)} \, d\mu = 0$. Puisque F est un espace test on obtient $f = \xi$ localement μ-p.p. , donc

$$f = \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \ . \quad \square$$

REMARQUE 2 Utilisant le théorème de Banach-Steinhaus 3.1 nous montrerons que si $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ pour tout $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. application 3.1).

EXERCICE 1 Montrer que si F est un espace test de fonctions contenu dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour un certain $p \in [1, \infty[$, alors F est dense dans $\mathbf{L}^p(\mu)$.

EXERCICE 2 Montrer que si F est un espace test de fonctions par rapport à μ et que $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc},+}(\mu)$, alors F est un espace test de fonctions par rapport à $\rho \cdot \mu$.

EXERCICE 3 Soient μ une intégrale de Radon et F un sous-espace vectoriel dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Si f est une fonction μ-mesurable et μ-modérée telle que

$$\sup_{\varphi \in F, \|\varphi\|_2 \leqslant 1} \int^* |\varphi \cdot f| \, d\mu < \infty \ ,$$

alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$.