Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 14

Aufgabe 1

(a) (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$ mit $\|T\varphi\| \geqslant \varepsilon \|\varphi\|$ für alle $\varphi \in F$. Es ist zu zeigen, dass T injektiv und T^{-1} stetig ist.

Sei dazu $\varphi \in \mathrm{Ker} F$. Dann ist $\|T\varphi\|_G = 0$, also $\|\varphi\|_F = 0$ und somit T injektiv.

Für die Stetigkeit sei $\xi \in T(F)$. Dann gilt

$$\left\|T^{-1}\xi\right\| = \left\|T^{-1}T\varphi\right\| = \|\varphi\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|T\varphi\| = \frac{1}{\varepsilon}\|\xi\| \ .$$

Also ist T^{-1} stetig.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gilt

$$\|\varphi\| = \left\|T^{-1}T\varphi\right\| \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|T\varphi\| \ .$$

Für $\varepsilon := \left\|T^{-1}\right\|^{-1}$ folgt die Behauptung.

(b) Sei $(\gamma_k) \subset T(F)$ eine Cauchy-Folge und $\epsilon > 0$. Dann gilt für alle $k, l \geqslant N \in \mathbb{N}$

$$\epsilon \geqslant \|\gamma_k - \gamma_l\|_G = \|T(\varphi_k - \varphi_l)\|_G \geqslant \varepsilon \|\varphi_k - \varphi_l\|_F \ ,$$

also $(\varphi_k) \subset F$ Cauchy-Folge. Da F folgenvollständig, gilt $\varphi_k \to \varphi$ in F . Da T stetig, gilt $\gamma_k \to \gamma$ in G.

(c) Sei T ein Isomorphismus, dann sind die Voraussetzungen aus (a) und (b) erfüllt. Also impliziert die Folgenvollständigkeit von F die von G . Da T ein Isomorphismus, gelten die entsprechenden Voraussetzungen auch für T^{-1} . Daher gilt auch die Umkehrung.

(d) Nach Korollar 3.10 ist $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ genau dann dicht, falls $T^\dagger : \mathcal{H}^\dagger_\beta \longrightarrow \mathcal{H}^\dagger_\beta$ injektiv ist. Da die Riesz-Abbildung ein Isomorphismus ist, folgt, dass $T^* = R^{-1}T^\dagger R : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ genau dann injektiv ist, falls $T^\dagger$ injektiv ist.

(e) Da $\mathcal{H}$ tonneliert ist, besitzen nach 2.7 genau die stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ eine Adjungierte. Nach 2.8 gilt

$$(ST)^* = T^*S^* \quad , \quad \left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1} \quad \text{und} \quad T^{**} = T \ .$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei T invertierbar. Definiere $S := T^{-1}$. Dann ist S nach dem Isomorphiesatz stetig. Also existiert S^* . Nach obigem gilt

$$T^*S^* = (ST)^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id} \ ,$$

sowie

$$S^*T^* = (TS)^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id} \ .$$

Also ist T^* invertierbar.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei T^* invertierbar. Definiere $S := ((T^*)^{-1})^*$. Dann gilt $S^* = (T^*)^{-1}$ und somit

$$TS = (TS)^{**} = (S^*T^*)^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id} \ ,$$

sowie

$$ST = (ST)^{**} = (T^* S^*)^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id} \ .$$

Also ist T invertierbar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Aus (d) folgt, dass $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ dicht. Aus (b) folgt, dass $T(\mathcal{H})$ folgenvollständig ist. Damit gilt $T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Aus (a) folgt, dass T injektiv und $\overset{-1}{T}$ stetig ist.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei T invertierbar. Dann ist T^* invertierbar nach (i) $\Rightarrow$ (ii), also injektiv. Die Ungleichung folgt aus (a).

Aufgabe 2

(a) Seien $f, \partial f \in \mathbf{L}^2([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$. Da

$$\left(\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi\cdot)\right)_{k \geqslant 1} \quad \text{und} \quad (1) \cup \left(\sqrt{2} \cdot \cos(k\pi\cdot)\right)_{k \geqslant 1}$$

Hilbertsche Basen von $\mathbf{L}^2([0,1])$ sind, folgt mit Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi\cdot) \middle| \, f \right) \right|^2$$

und

$$\|\partial f\|_2^2 = |(1| \, \partial f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\sqrt{2} \cdot \cos(k\pi\cdot) \middle| \, \partial f \right) \right|^2 \ .$$

Es gilt

$$(1| \, \partial f) = \int_0^1 \partial f \, d\lambda = f(1) - f(0) = 0 \ ,$$

$$(\cos(k\pi\cdot)| \, \partial f) = \int_0^1 \cos(k\pi x) \cdot \partial f(x) \ dx = \pi k \cdot \int_0^1 \sin(k\pi x) \cdot f(x) \ dx =$$

$$= k\pi \cdot (\sin(k\pi\cdot)| \, f)$$

durch partielle Integration. Somit ist

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot |(\sin(k\pi\cdot)| \, f)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 \pi^2} \cdot |(\cos(k\pi\cdot)| \, \partial f)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2} \|\partial f\|_2^2 \ .$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $(\sin(k\pi\cdot)| \, f) = 0 \ \forall k \geqslant 2$, d.h.

$$f \in \mathbb{K} \cdot \sin(\pi\cdot) \quad \Longleftrightarrow \quad \|f\|_2 \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \|\partial f\|_2 \ .$$

(b) Sei $g \in \mathcal{AC}([0,1])$ mit $g(0) = 0$ und $\partial g \in \mathbf{L}^2([0,1])$. Da $g(0) = 0$ folgt:

$$|g(t)| = \left| \int_0^t \partial g \right| = \left| \int_0^1 1_{[0,t]} \cdot \partial g \right| \leqslant \|\partial g\|_2 \cdot \left(\int_0^1 1_{[0,t]}^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} \, \|\partial g\|_2 \ ,$$

also

$$\|g\|_2^2 = \int_0^1 |g(t)|^2 \, dt \leqslant \|\partial g\|_2^2 \cdot \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} \|\partial g\|_2^2 \ .$$

Verbindung zum angegebenen Hilbert-Schmidt-Integraloperator:

$$K : \mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0,1]) : f \longmapsto \int_0^1 1_{[0,\cdot]}(y) \cdot f(y) \, dy = \int_0^{\cdot} f \, d\lambda \ .$$

Es folgt

$$\|g\|_2^2 = \|K \partial g\|_2^2 \leqslant \|K\|^2 \cdot \|\partial g\|_2^2 \leqslant \|\kappa\|_2^2 \cdot \|\partial g\|_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \|\partial g\|_2^2$$

da

$$\|\kappa\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 1_{[0,x]}(y) \, dy dx = \frac{1}{2} \ .$$

(c) Durch Rechnung erhält man:

$$\|\sin(\alpha \cdot)\|_2^2 = \frac{1}{4\alpha} \cdot (2\alpha - \sin(2\alpha))$$

und

$$\|\partial \sin(\alpha \cdot)\|_2^2 = \frac{\alpha}{4} \cdot (2\alpha + \sin(2\alpha))$$

Um das Supremum des Funktionals auf der angegeb. Kurve zu erhalten, muss das Maximum der Fkt.

$$r(\alpha) := \frac{\|\sin(\alpha \cdot)\|_2^2}{\|\partial \sin(\alpha \cdot)\|_2^2} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1 - \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}}{1 + \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}}$$

bestimmt werden. Dieses wird für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ mit Wert $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$ angenommen.

(d) Bestimmung der kleinsten Konstanten in (b):
Durch Spiegelung von g um 1 geht man über zu $\widetilde{g} : [0,2] \longrightarrow \mathbb{K}$ mit

$$\widetilde{g}(0) = \widetilde{g}(2) = 0 \ .$$

Def. $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ durch $f(x) := \widetilde{g}(2x)$. Es gilt: $f \in \mathcal{AC}([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$. Duch Anwendung von (a) folgt

$$\|g\|_{2,[0,1]}^2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 |\widetilde{g}(y)|^2 \, dy = \int_0^1 |\widetilde{g}(2x)|^2 \, dx = \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx = \|f\|_{2,[0,1]}^2 \underset{(a)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2} \cdot \|\partial f\|_{2,[0,1]}^2 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \|2 \cdot \partial \widetilde{g}(2 \cdot)\|_{2,[0,1]}^2 = \frac{2}{\pi^2} \cdot \int_0^2 |\partial \widetilde{g}(y)|^2 \, dy =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \cdot \int_0^1 |\partial g|^2 \, d\lambda = \frac{4}{\pi^2} \cdot \|\partial g\|_{2,[0,1]}^2 \ .$$

Speziell für $g = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\right)$ erhält man wegen (a) Gleichheit, somit ist $\frac{2}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ die beste Konstante.

Aufgabe 3

(a) Über abg. Graph. Zu zeigen: $\operatorname{Gr} T \subset F \times G$ ist abgeschlossen, d.h. $(\xi_k, T\xi_k) \to (\xi, \gamma)$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ impliziert $\gamma = T(\xi)$.

Bew.: $\forall\ \eta \in \mathcal{H}$ gilt:

$$(T\xi|\,\eta) = (\xi|\,T\eta) = \lim\,(\xi_k|\,T\eta) = \lim\,(T\xi_k|\,\eta) = (\gamma|\,\eta)\ \ ,$$

also $T\xi = \gamma$.

(b) Glm. beschränkt. $\mathcal{H}$ Fréchet $\Longrightarrow \mathcal{H}$ tonneliert. Zu zeigen: $\|\cdot\| \circ T$ stetig.

Bew.: Nach Hahn-Banach gilt

$$\|\cdot\| = \sup_{\mu\in\mathcal{H}^\dagger, \||\mu\rangle| \leqslant \|\cdot\|} \Big|\ |\mu\rangle \Big| = \sup_{\mu\in\mathcal{H}^\dagger, \||\mu\rangle| \leqslant \|\cdot\|} \Big|\ |\mu\rangle \Big| =: (*)$$

Nach dem Satz von Riesz gilt weiterhin: $|\mu\rangle = |\xi)$ und somit:

$$\|\mu\| = \||\mu\rangle\| = \||\xi)\| \overset{\text{R Isometrie}}{=} \|\xi\|\ \ .$$

Daraus folgt

$$\|\cdot\| = \sup_{\xi\in\mathcal{H}, \|\xi\|\leqslant 1} |(\cdot\,|\,\xi)|\ \ ,$$

also

$$\|\cdot\| \circ T = \|T\cdot\| = \sup_{\xi\in\mathcal{H}, \|\xi\|\leqslant 1} |(T\cdot|\,\xi)| \overset{\text{n.Vor}}{=} \sup_{\xi\in\mathcal{H}, \|\xi\|\leqslant 1} |(\cdot\,|\,T\xi)|\ \ .$$

Diese Abb. ist als Supremum stetiger Abb. nach unten halbstetig. Da $\forall \varphi \in \mathcal{H} : \|T\varphi\| < \infty$ folgt $\|\cdot\| \circ T$ n.u.h. HN und, da $\mathcal{H}$ tonneliert ist, ist $\|\cdot\| \circ T$ eine stetige HN, was zu beweisen war.