Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

PROTOKOLLE

ZU DEN ÜBUNGEN DER

FUNKTIONALANALYSIS II

Claude Portenier

Marburg
Sommersemester 2004

Fassung vom 4. August 2004

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 4

Aufgabe 1 Zu berechnen ist die Fouriertransformierte von $e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2}$ für $a > 0$, dazu leiten wir eine zugehörige Diffgleichung her:

$$\not\partial \mathcal{F}\left(e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2}\right) = \mathcal{F}\left(-\,\mathrm{id}\cdot e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2}\right) = \frac{i}{a}\cdot \mathcal{F}\left(\not\partial e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2}\right) =$$

$$= \frac{i}{a}\cdot \mathrm{id}\cdot \mathcal{F}\left(e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2}\right) \ ,$$

somit erfüllt $f = \mathcal{F}e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2}$ die Diffgleichung

$$\not\partial f = \frac{i}{a}\,\mathrm{id}\cdot f \ .$$

Die Lösung ist

$$f = const\cdot e^{-\frac{\pi}{a}\,\mathrm{id}^2} \ .$$

Die Konstante kann aus der Anfangsbedingung berechnet werden, denn es gilt:

$$f(0) = const = \left(\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2}\right)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a\cdot x^2}\,dx \underset{y=\sqrt{\pi a}x}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\frac{dy}{\sqrt{\pi a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ ,$$

d.h.

$$\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot \mathrm{id}^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\pi}{a}\,\mathrm{id}^2} \ .$$

Aufgabe 2 Es ist $\mathrm{sinc} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$, da $\mathrm{sinc} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ ist oder da $\mathrm{sinc} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{langsam}}(\mathbb{R})$ ist wegen

$$\left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{-k}\cdot \mathrm{sinc}\right\|_\infty < \infty$$

für $k = 0$. Nun gilt

$$\mathcal{F}\delta_{\frac{1}{2}} = \int e^{-2\pi i\bullet x}\,d\delta_{\frac{1}{2}}(x) = e^{-\pi i\bullet}$$

und somit

$$\not\partial \mathcal{F}\,\mathrm{sinc} = \mathcal{F}(-\,\mathrm{id}\cdot \mathrm{sinc}) = \mathcal{F}\left(\frac{-\sin(\pi\bullet)}{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left(\frac{e^{\pi i\bullet} - e^{-\pi i\bullet}}{2i}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}\right) \ ,$$

d.h.

$$\partial\mathcal{F}\,\mathrm{sinc} = \delta_{\frac{1}{2}} - \delta_{-\frac{1}{2}}\ .$$

Nach Aufgabe 3 von Blatt 3 sind die Lösungen dieser Differentialgleichung durch

$$h_{\frac{1}{2}} - h_{-\frac{1}{2}} + c = 1_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} + c$$

mit $c \in \mathbb{C}$ gegeben. Zur Bestimmung der Konstanten c kann man $\mathcal{F}\,\mathrm{sinc} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ benutzen, woraus $c = 0$ folgt.

Alternativ (dies ist die gute Idee !) kann man rechnen

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} 1_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i\lambda x}\, dx = \frac{1}{2\pi i\lambda}\left(e^{\pi i\lambda} - e^{-\pi i\lambda}\right) = \mathrm{sinc}\,\lambda$$

für $\lambda \neq 0$ und

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} 1_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ ,$$

d.h.

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} 1_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} = \mathrm{sinc}\ .$$

Aufgabe 3 Wir zeigen zunächst den Hinweis: Sei dazu $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, mit $\psi(0) = 0$.

Für $x = 0$ ist die Aussage des Hinweises trivial. Wir können also o.E. $x \neq 0$ annehmen. Es gilt:

$$x \cdot \int_{[0,1]} \psi'(xs)\, ds \overset{xs=t}{=} x \cdot \int_{[0,x]} \psi'(t) \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \int_{[0,x]} \psi'(t)\, dt \overset{HDI}{=} \psi(x)$$

Also die Beh. im Hinweis.

Sei nun $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$, $c \in \mathbb{C}$. Zu zeigen:

$$\mu \text{ löst die Gleichung } \mathrm{id}\cdot\mu = c \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\alpha \in \mathbb{C} : \mu = \alpha\delta + c \cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)\ .$$

Beweis:

"$\Leftarrow$" : Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass RHS erfüllt ist und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle\varphi|\,\mathrm{id}\cdot\mu\rangle = \langle\mathrm{id}\cdot\varphi|\mu\rangle = \left\langle \mathrm{id}\cdot\varphi \,\middle|\, \alpha\delta + c \cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)\right\rangle =$$

$$= \langle\mathrm{id}\cdot\varphi|\alpha\delta\rangle + c \cdot \left\langle \mathrm{id}\cdot\varphi \,\middle|\, HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)\right\rangle = 0 + c \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \mathrm{id}\cdot\overline{\varphi} \cdot \frac{1}{\mathrm{id}}\, d\lambda =$$

$$= \int c \cdot \overline{\varphi}\, d\lambda = \langle \varphi | c \rangle \ .$$

Und daraus folgt die Behauptung.

"$\Rightarrow$" : Es gelte: $\mathrm{id} \cdot \mu = c$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$. Es genügt zu zeigen: $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ so dass $\mu = \alpha\delta + c \cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$.

In der Tat: Aus dem Hinweis folgt:

$$\operatorname{Ker} \delta = \left\{ \psi \in \mathcal{D} \middle| \psi = \mathrm{id} \cdot \int_{[0,1]} \psi' (\mathrm{id} \cdot s)\ ds \right\}$$

und somit die Zerlegung: $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \delta \oplus \mathbb{K} \cdot \chi$ für ein $\chi \in \mathcal{D}$ so dass $\chi(0) = 1$, also für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\varphi = [\varphi - \varphi(0) \cdot \chi] + \varphi(0) \cdot \chi \ .$$

Wir definieren nun $\widetilde{\varphi}(x) := \int_{[0,1]} [\varphi - \varphi(0) \cdot \chi]' (sx)\ ds$. Da $\int_{[0,1]} [\varphi - \varphi(0) \cdot \chi]' (sx)\ ds$ nach Lebesgue unter dem Integral beliebig oft diffbar ist, gilt $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ und aus $\varphi - \varphi(0) \cdot \chi = \mathrm{id} \cdot \widetilde{\varphi}$ folgt offenbar $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Daraus folgt $\varphi = \mathrm{id} \cdot \widetilde{\varphi} + \varphi(0) \cdot \chi$ und damit:

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \langle \mathrm{id} \cdot \widetilde{\varphi} |\, \mu \rangle + \langle \varphi(0) \cdot \chi | \mu \rangle = \langle \widetilde{\varphi} |\, \mathrm{id} \cdot \mu \rangle + \langle \varphi | \delta \rangle \cdot \langle \chi | \mu \rangle =$$

$$= c \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[} \overline{\widetilde{\varphi}(x)}\, dx + \langle \varphi | \delta \rangle \cdot \langle \chi | \mu \rangle$$

$$= c \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[} \overline{\frac{\varphi - \varphi(0) \cdot \chi}{\mathrm{id}}} (x)\ dx + \langle \varphi | \delta \rangle \cdot \langle \chi | \mu \rangle =$$

$$= c \cdot \left\langle \varphi \middle| HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \right\rangle + \langle \varphi | \delta \rangle \cdot \underbrace{\left[\langle \chi | \mu \rangle - c \cdot \left\langle \chi \middle| HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \right\rangle \right]}_{=:\alpha} ,$$

also die Beh.

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 5

Aufgabe 1

(a) Wir schreiben im Folgenden k statt λ . Zunächst müssen wir zeigen, dass $e_\diamond$ λ^n-integrierbar in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ ist (im Sinne von Pettis). Betrachte dazu:

$$\langle e_\diamond | \varphi\rangle_{\mathcal{S}'} = \int e^{-2\pi\,\mathrm{id}\cdot x} \cdot \varphi(x)\; dx = \mathcal{F}\varphi$$

und

$$\int |\mathcal{F}\varphi|\; d\lambda = \int |\mathcal{F}\varphi| \cdot \langle \mathrm{id}\rangle \frac{d\lambda}{\langle \mathrm{id}\rangle} \leqslant \|\langle \mathrm{id}\rangle \cdot \mathcal{F}\varphi\|_\infty \cdot \int \frac{d\lambda}{\langle \mathrm{id}\rangle} \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int \frac{d\lambda}{\langle \mathrm{id}\rangle}\right)^2 \cdot p_1(\varphi)\ ,$$

da

$$\|\langle \mathrm{id}\rangle \cdot \mathcal{F}\varphi\|_\infty = \|\mathcal{F}(\not{\partial}\varphi)\|_\infty \leqslant \|\not{\partial}\varphi\|_1 \leqslant \|\langle \mathrm{id}\rangle \cdot \not{\partial}\varphi\|_\infty \cdot \int \frac{d\lambda}{\langle \mathrm{id}\rangle} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot p_1(\varphi) \cdot \int \frac{d\lambda}{\langle \mathrm{id}\rangle}\ .$$

Dies zeigt, dass $\varphi \longmapsto \int |\langle e_\diamond | \varphi\rangle|\; d\lambda$ stetig ist, also $e_\diamond$ λ^n-integrierbar in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Als nächstes betrachten wir $(e_\diamond)_y$:

$$\left\langle (e_\diamond)_y \middle| \varphi \right\rangle = \langle T_y e_\diamond | \varphi\rangle = \langle e_\diamond | T_{-y}\varphi\rangle = \mathcal{F}T_{-y}\varphi$$

$$= M_{e_y}\mathcal{F}\varphi = e_y\mathcal{F}\varphi$$

Mit $|e_y\mathcal{F}\varphi| = |\mathcal{F}\varphi|$ folgt $(e_\diamond)_y$ ist λ^n-integrierbar in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Alternativ lässt sich auch über HS 3.12.ii argumentieren: $(e_\diamond)_y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist tonneliert, $(e_\diamond)_y$ ist skalar λ^n-integrierbar (da $\left\langle (e_\diamond)_y \middle| \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}'} = e_y\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$) und $e_{\diamond|B(0,k)}$ ist beschränkt (da $e_{B(0,k)}$ kompakt ist).

Es gilt:

$$\mathcal{F}\delta_y = \mathcal{F}T_y\delta = M_{e_{-y}}\mathcal{F}\delta = e_{-y}$$

Daraus folgt $\overset{-1}{\mathcal{F}} e_{-y} = \delta_y$. Es bleibt noch $\int (e_k)_y\; dk = \delta_y$ zu zeigen. Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\left\langle \varphi \middle| (e_k)_y\; dk \right\rangle = \int \left\langle \varphi \middle| (e_k)_y \right\rangle dk = \int\int \overline{\varphi(x)} \cdot e^{2\pi i k(x-y)}\, dx\, dk =$$

$$\int e^{-2\pi i k y} \int \overline{\varphi(x)} \cdot e^{2\pi i k x}\, dx\, dk = \left[\mathcal{F}\overset{-1}{\mathcal{F}}\overline{\varphi}\right](y) = \langle \varphi | \delta_y\rangle\ .$$

Alternativ lässt sich die Gleichung $\overset{-1}{\mathcal{F}}\nu = \int e_k \, d\nu(k)$ verwenden (Satz 4.10):

$$\delta_y = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(e_{-y} \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}\right) = \int e_k e_{-y} \, d\lambda \ .$$

Nun betrachten wir:

$$\sin\left(2\pi y \diamond\right) \cdot e_k = \frac{1}{2i}\left(e_y - e_{-y}\right) \cdot e_k = \frac{1}{2i}\left[\left(e_k\right)_{-y} - \left(e_k\right)_y\right]$$

Daraus folgt:

$$\int \sin\left(2\pi y \diamond\right) \cdot e_k \, d\lambda = \int \frac{1}{2i}\left(e_y - e_{-y}\right) \cdot e_k \, d\lambda = \int \frac{1}{2i}\left[\left(e_k\right)_{-y} - \left(e_k\right)_y\right] d\lambda = \frac{1}{2i}\left[\delta_{-y} - \delta_y\right]$$

(b) Entweder argumentieren wir über:

$$\int \left|\langle x^\alpha e_x | \varphi \rangle\right| \, dx = \int \left|x^\alpha\right| \cdot \left|\langle e_x | \varphi \rangle\right| \, dx \leqslant \int \left|x^{|\alpha|}\right| \cdot \left|\langle e_x | \varphi \rangle\right| \, dx \leqslant \int \langle \mathrm{id} \rangle^\alpha \cdot \left|\langle e_x | \varphi \rangle\right| \, dx$$

und schließen wie in (a). Oder wir betrachten die stetige Abbildung $\not\partial^\alpha : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$:

$$\not\partial^\alpha \delta = \not\partial^\alpha \left(\int e_\lambda \, d\lambda\right) = \int \not\partial^\alpha e_\lambda \, d\lambda = \int \lambda^\alpha e_\lambda \, d\lambda \overset{\text{Satz 4.10}}{=} \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathrm{id}^\alpha\right) \ .$$

(c) Es gilt $\mathrm{id} \cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) = 1$. Daraus folgt:

$$\delta = \mathcal{F}1 = \mathcal{F}\left(\mathrm{id} \cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)\right) = -\partial \mathcal{F} HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \ .$$

Mit der Übungsaufgabe 4.3 folgt $\mathcal{F}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) = -2\pi i \cdot h + cst$ und da

$$\left\langle \varphi \middle| D_{-1} HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \right\rangle = \left\langle D_{-1}\varphi \middle| HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[} \overline{\varphi\left(-x\right)} \cdot \frac{1}{x} \, dx = -\left\langle \varphi \middle| HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \right\rangle$$

woraus $D_{-1}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) = -HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$ folgt, bekommen wir

$$D_{-1}\left(-2\pi i \cdot h + cst\right) = D_{-1}\mathcal{F}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) = \mathcal{F}D_{-1}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) =$$

$$= -\mathcal{F}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) = 2\pi i \cdot h - cst \ .$$

Damit gilt

$$2 \cdot cst = 2\pi i \cdot \left(h + D_{-1}h\right) = 2\pi i \ ,$$

und die Konstante ist gleich πi . Daraus folgt

$$\mathcal{F}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) = -2\pi i \cdot h + \pi i = -\pi i \cdot \mathrm{signum} \ ,$$

also

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\,\mathrm{signum} = -\frac{1}{\pi i}\cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$$

sowie

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}h = -\frac{1}{2\pi i}\cdot\overset{-1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\overset{-1}{\mathcal{F}}1 = -\frac{1}{2\pi i}\cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\delta\ .$$

Da $1_{\mathbb{R}_-} = -\,\mathrm{signum} + 1_{\mathbb{R}_+} = -\,\mathrm{signum} + h$ gilt:

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}1_{\mathbb{R}_-} = -\overset{-1}{\mathcal{F}}\,\mathrm{signum} + \overset{-1}{\mathcal{F}}h = \frac{1}{2\pi i}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\delta$$

Zuletzt betrachten wir:

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\left(1_{\mathbb{R}_+}\cdot\lambda\right) = \int e_\diamond\, d\left(1_{\mathbb{R}_+}\cdot\lambda\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e_k\, dk\ .$$

Analog gilt $\int_{\mathbb{R}_-} e_k\, dk = \overset{-1}{\mathcal{F}}1_{\mathbb{R}_-}$, sowie

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\,\mathrm{sgn} = -\overset{-1}{\mathcal{F}}1_{\mathbb{R}_-} + \overset{-1}{\mathcal{F}}1_{\mathbb{R}_+} = \int \mathrm{sgn}\, k\cdot e_k\, dk\ ,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+}\cos\left(2\pi k\cdot\mathrm{id}\right)\, dk = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{e_k + e_{-k}}{2}\, dk = \frac{1}{2}\cdot\left[\int_{\mathbb{R}_+} e_k\, dk + \int_{\mathbb{R}_-} e_k\, dk\right] = \frac{1}{2}\delta$$

und

$$\int_{\mathbb{R}_+}\sin\left(2\pi k\cdot\mathrm{id}\right)\, dk = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{e_k - e_{-k}}{2i} = \frac{1}{2i}\cdot\left[\int_{\mathbb{R}_+} e_k\, dk - \int_{\mathbb{R}_-} e_k\, dk\right] = \frac{1}{2\pi}HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)\ .$$

Damit ist alles gezeigt !

Aufgabe 2

(a) In jedem Fall ist $(\cdot|\cdot)$ hermitesch positiv. Die Frage ist also, wann diese Form definit ist, d.h. wann die induzierte Halbnorm $\|\cdot\|$ eine Norm ist. Nun ist genau dann

$$0 = \|\xi\|^2 = \sum_{j\in n}\left|\left\langle f\,\middle|\,\mu_j\right\rangle\right|^2 + \int_J \left|\partial^n f\right|^2\ ,$$

wenn

$$\left\langle f\,\middle|\,\mu_j\right\rangle = 0\,,\quad j\in n\quad\text{und}\quad \partial^n\xi = 0\quad \lambda_J\text{-fast überall.}$$

Mit anderen Worten ist

$$\{\|\cdot\| = 0\} = \bigcap_{j\in n}\mathrm{Ker}\,\mu_j\cap\mathrm{Ker}\left(\partial^n|_{\mathcal{BL}^{(n)}(J)}\right) = \mathrm{Ker}\, B\cap\mathcal{P}_{n-1}\left(J\right)\ ,$$

da $\xi\in\mathcal{AC}^{(n)}\left(J\right)$ genau dann eine Polynomfunktion vom Grade höchstens $n-1$ ist, wenn $\partial^n\xi = 0$ (vgl. FA I, Blatt 4, Aufgabe 2.d : $\mathrm{Ker}\left(\partial^n|_{\mathcal{BL}^{(n)}(J)}\right) = \mathcal{P}_{n-1}\left(J\right)$).

Damit ist $\|\cdot\|$ genau dann eine Norm, wenn der oben angegebene Schnitt nur aus 0 besteht, und dies ist genau dann der Fall, wenn $B_{|\mathcal{P}_{n-1}(J)}$ injektiv ist (vgl. FA I, Blatt 4, Aufgabe 2.b), d.h. wenn die Semilinearformen $\left(\mu_{j|\mathcal{P}_{n-1}(J)}\right)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$ linear unabhängig sind.

(b) Da $B_{|\mathcal{P}_{n-1}(J)} : \mathcal{P}_{n-1}(J) \longrightarrow \mathbb{K}^n$ injektiv ist, ist sie auch surjektiv, also bijektiv. Nach FA I, Blatt 4, Aufgabe 2.b folgt

$$\mathcal{BL}^{(n)}(J) = \mathcal{P}_{n-1}(J) \oplus \operatorname{Ker} B \ .$$

Somit ist die Abbildung

$$(B, \partial^n) : \mathcal{BL}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{K}^n \times \mathbf{L}^2(J) : f \longmapsto \left(\left(\langle f \,|\mu_j \rangle\right)_{j\in n}, \partial^n f \right)$$

eine surjektive Isometrie, d.h $\mathcal{BL}^{(n)}(J)$ ist ein Hilbert-Raum.

Trivialerweise gilt

$$\mathcal{P}_{n-1}(J) \perp \operatorname{Ker} B \ ,$$

d.h.

$$\mathcal{BL}^{(n)}(J) = \mathcal{P}_{n-1}(J) \boxplus \operatorname{Ker} B \ .$$

(c) Die Identität

$$\mathrm{Id} : \mathcal{BL}^{(n)}(J)_B \to \mathcal{BL}^{(n)}(J)_C$$

ist stetig. In der Tat:

$$\|f\|_C^2 = \|\partial^n f\|_{2,J}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} |\langle \nu_j \,| f \rangle|^2 \leqslant \|\partial^n f\|_{2,J}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \|\nu_j\|^2 \cdot \|f\|_B^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \sum_{j=0}^{n-1} \|\nu_j\|^2\right) \cdot \|f\|_B^2 \ .$$

Da Id bijektiv ist, ist sie ein Isomorphismus nach dem Isomorphiesatz. Somit sind die Normen äquivalent.

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 6

Aufgabe 1 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ ein hilbertscher Unterraum von $\mathcal{H}$ mit Kern g . Wir zeigen, dass ein positiver Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert, so dass $\mathcal{G}$ das Bild von $\mathcal{H}$ unter T ist, d.h. $\mathcal{G} = T(\mathcal{H})$. In der Tat: Nach Satz (5.1) gilt $g \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$. Wir verwenden nun [ohne Beweis] die Tatsache, dass es zu jedem positiven Operator S einen positiven Operator T gibt, so dass $T^2 = S$, schreiben also:

$$T^2 = g$$

Da T positiv ist, ist der Operator selbstadjungiert. Wir betrachten:

$$\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{T} \mathcal{H}$$

Es gilt nach Satz 5.4:

$$T(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{H} \text{ ist HUR mit Kern : } \quad T\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\, T^\dagger = T^2 = g$$

Da die Zuordnung zwischen Kernen und Hilbertschen Unterräumen eineindeutig ist, folgt $T(\mathcal{H}) = \mathcal{G}$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Zunächst ist zu zeigen, dass Φ stetig ist. Sei dazu $\varphi \in F$, $\xi \in \mathcal{H}$ und $\eta \in \mathcal{G}$. Dann gilt

$$\langle \varphi | \, \Phi(\xi, \eta) \rangle = \langle \varphi | \, \xi \rangle + \langle \varphi | \, \eta \rangle = (h\varphi|\xi)_{\mathcal{H}} + (g\varphi|\eta)_{\mathcal{G}} = ((h\varphi, g\varphi) \, | \, (\xi, \eta))_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \ , \qquad (*)$$

d.h. es gilt

$$|\langle \varphi | \cdot \rangle| \circ \Phi \leqslant \underbrace{\left| ((h\varphi, g\varphi) \, | \cdot)_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \right|}_{\text{stetige HN auf } \mathcal{H}_\sigma \times \mathcal{G}_\sigma} \ .$$

Also ist Φ stetig. Nach dem Bildsatz ist

$$\Phi(\mathcal{H} \times \mathcal{G}) \hookrightarrow F^\dagger$$

ein HUR mit Kern

$$\Phi \circ (\text{Kern von } \mathcal{H} \times \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{G}) \circ \Phi^\dagger = \Phi\Phi^\dagger \ .$$

Aus $(*)$ folgt, dass

$$\Phi^\dagger = (h, g) : F^\dagger \to (\mathcal{H} \times \mathcal{G})^\dagger = \mathcal{H}_\sigma \times \mathcal{G}_\sigma \ .$$

Also ist $h + g$ der Kern von $\mathcal{H} + \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$.

Aus dem Bildsatz folgt weiterhin, dass $(h\varphi, g\varphi) = \Phi^\dagger\varphi$ der Parsevalrepräsentant für $\Phi\Phi^\dagger\varphi = h\varphi + g\varphi$ ist. Das ist die zweite Behauptung.

(b) Es ist zu zeigen, dass $p_{\mathcal{H}}$ der Kern von $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$ ist. Für $\gamma \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ ist $(p_{\mathcal{H}}\gamma, p_{\mathcal{G}}\gamma)$ Parsevalrepräsentant von γ , also folgt

$$\gamma = \Phi\left(p_{\mathcal{H}}\gamma, p_{\mathcal{G}}\gamma\right) = p_{\mathcal{H}}\gamma + p_{\mathcal{G}}\gamma \ ,$$

d.h. $p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$. Damit ist klar, dass $p_{\mathcal{H}}$ und $p_{\mathcal{G}}$ kommutieren. Für $\xi \in \mathcal{H}$ gilt dann

$$(\gamma|\xi)_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} = (\gamma|\xi)_{\Phi(\mathcal{H}\times\mathcal{G})} = \left(\Phi\left(p_{\mathcal{H}}\gamma, p_{\mathcal{G}}\gamma\right)|\xi\right)_{\Phi(\mathcal{H}\times\mathcal{G})} = \left((p_{\mathcal{H}}\gamma, p_{\mathcal{G}}\gamma)\,|\,(\xi,0)\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} =$$

$$= (p_{\mathcal{H}}\gamma|\xi)_{\mathcal{H}} \ .$$

Also ist nach Korollar 5.1 $p_{\mathcal{H}}$ der Kern von $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$.

Zur Beschränktheit: Es gilt

$$\|p_{\mathcal{H}}\gamma\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|p_{\mathcal{H}}\gamma\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\gamma\|_{\mathcal{G}}^2 = (p_{\mathcal{H}}\gamma|p_{\mathcal{H}}\gamma)_{\mathcal{H}} + (p_{\mathcal{G}}\gamma|p_{\mathcal{G}}\gamma)_{\mathcal{G}} =$$

$$= \left((p_{\mathcal{H}}\gamma, p_{\mathcal{G}}\gamma)\,|\,(p_{\mathcal{H}}\gamma, p_{\mathcal{G}}\gamma)\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} = \|\gamma\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}^2 \ .$$

Also ist $p_{\mathcal{H}}$ beschränkt. Weiter gilt

$$0 \leqslant (\gamma\,|p_{\mathcal{H}}\gamma)_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} = \|p_{\mathcal{H}}\gamma\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|\gamma\|_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}^2 = (\gamma|\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}\,\gamma)_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} \ ,$$

d.h.

$$0 \leqslant p_{\mathcal{H}} \leqslant \mathrm{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} \ .$$

(c) Für $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$ gilt $p_{\mathcal{H}}^* = p_{\mathcal{H}}$ (Satz 5.1). Nach Korollar 3.10 folgt dann

$$\mathrm{Ker}\, p_{\mathcal{H}} = \left(\mathrm{Im}\, p_{\mathcal{H}}^*\right)^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})} = \left(p_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{H}+\mathcal{G}\right)\right)^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})} = \mathcal{H}^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})} \ ,$$

da $p_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{H}+\mathcal{G}\right)$ dichtes Bild in $\mathcal{H}$ hat (Satz 5.3.i).

Aufgabe 3 Dass

$$(p|q)_{\mathcal{P}_n} = \sum_{j=0}^{n} \overline{\partial^j p(\tau)} \cdot \partial^j q(\tau)$$

sesquilinear, hermitesch und positiv ist, sieht man sofort. Es ist also noch die Definitheit zu zeigen. Dazu rechnet man

$$(p|p)_{\mathcal{P}_n} = \sum_{j=0}^{n} \left|\partial^j p(\tau)\right|^2$$

und stellt fest, dass diese Summe nur verschwinden kann, wenn alle Koeffizienten bis zu n-ter Ordnung in der Taylor-Entwicklung von p um den Punkt τ verschwinden. Da aber p ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ ist, muss dann $p = 0$ sein. Damit ist $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{P}_n}$ ein Skalarprodukt. Mit diesem Skalarprodukt wird $\mathcal{P}_n(J)$ zu einem Hilbert-Raum, da die Abbildung

$$\mathcal{P}_n(J) \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} : p \longmapsto \left(\partial^j p(\tau)\right)_{j\in n+1}$$

eine bijektive Isometrie ist.

Zum Beweis der zweiten Behauptung muss man $\langle\psi|p\rangle_{\mathcal{D}} = (p_n\psi|p)$ für alle $p \in \mathcal{P}_n(J)$ und $\psi \in \mathcal{D}(J)$ zeigen. Zunächst ist $\kappa_n(\cdot,t) \in \mathcal{P}_n(J)$, und aufgrund von

$$\partial^{n+1} p_n\psi = \int \partial^{n+1}\kappa_n(\cdot,t)\psi(t)\,dt = 0$$

gilt auch $p_n\psi \in \mathcal{P}_n(J)$. Wegen

$$\partial^j p_n\psi = \int \sum_{l=j}^{n} \frac{(\cdot-\tau)^{l-j}}{(l-j)!}\frac{(t-\tau)^l}{l!}\psi(t)\,dt$$

ist

$$(\partial^j p_n\psi)(\tau) = \int \frac{(t-\tau)^j}{j!}\psi(t)\,dt$$

und somit

$$(p_n\psi|p) = \sum_{j=0}^{n} \overline{(\partial^j p_n\psi)\,(\tau)}\cdot\partial^j p(\tau) = \int \sum_{j=0}^{n} \frac{(t-\tau)^j}{j!}\overline{\psi(t)}\,dt\cdot\partial^j p(\tau) = \int \overline{\psi(t)}p(t)\,dt = \langle\psi|p\rangle$$

wie behauptet.