Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

PROTOKOLLE

ZU DEN ÜBUNGEN DER

FUNKTIONALANALYSIS II

Claude Portenier

Marburg
Sommersemester 2004

Fassung vom 4. August 2004

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2004**

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 7

Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$\mathrm{id}_{\mathcal{H}} = \sum_{\xi \in \mathcal{B}} |\xi)\,(\xi| \quad \text{in} \quad \mathcal{L}_s(\mathcal{H}) \ .$$

In der Tat: Für alle $\eta \in \mathcal{H}$ hat man nach der Parsevalgleichung

$$\eta = \sum_{\xi \in \mathcal{B}} (\xi\,|\eta) \cdot \xi \quad \text{in} \quad \mathcal{H} \ .$$

Weiter gilt: Die Abbildung

$$T \longmapsto h^{\dagger} T h : \mathcal{L}_s(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(F, F^{\dagger}\right)$$

ist stetig. Für $\varphi, \psi \in F$ gilt nämlich

$$\left|\left\langle \psi \left| h^{\dagger} T h \varphi \right.\right\rangle_F\right| = \left|(h\psi\,|Th\varphi)_{\mathcal{H}}\right| \leqslant \|h\psi\|_{\mathcal{H}} \cdot \|Th\varphi\|_{\mathcal{H}} \ .$$

Also folgt (Bildsatz angewandt auf $h^{\dagger}$ oder richtige Interpretation)

$$h = h^{\dagger}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,h = \sum_{\xi \in \mathcal{B}} h^{\dagger}\,|\xi)\,(\xi|\,h = \sum_{\xi \in \mathcal{B}} |\xi\rangle\,\langle\xi| \quad \text{in} \quad \mathcal{L}_s\left(F, F^{\dagger}\right) \ ,$$

denn für $\varphi, \psi \in F$ und $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ gilt

$$\left\langle \psi \left| h^{\dagger}\,|\xi)\,(\eta|\,h\varphi \right.\right\rangle_F = (h\psi\,|\xi)_{\mathcal{H}}\,(\eta\,|h\varphi)_{\mathcal{H}} = \langle\psi\,|\xi\rangle_F \cdot \langle\eta\,|\varphi\rangle_{F^{\dagger}} = \langle\psi\,||\xi\rangle\,\langle\eta|\,\varphi\rangle_F \ .$$

(b) Die Abbildung $j : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{B}}$, die durch

$$j\eta\,(\xi) := (\xi\,|\eta)_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathcal{B}\ , \eta \in \mathcal{H}$$

definiert ist, ist schwach stetig: Denn für $\xi \in \mathcal{B}$ ist

$$\left[\eta \longmapsto j\eta\,(\xi) = (\xi\,|\eta)_{\mathcal{H}}\right] = (\xi|$$

offenbar stetig. Da $\mathcal{B}$ als hilbertsche Basis die Punkte von $\mathcal{H}$ trennt, ist j auch injektiv; also ist $\mathcal{H}$ hilbertscher Unterraum von $\mathbb{C}^{\mathcal{B}}$.

Für den Kern $h_{\mathcal{B}}$ gilt für $\psi \in \mathbb{C}^{(\mathcal{B})}$, $\xi \in \mathcal{B}$

$$h_{\mathcal{B}}\psi\,(\xi) = jj^{\dagger}\psi\,(\xi) = \left(\xi\left|j^{\dagger}\psi\right.\right)_{\mathcal{H}} = \overline{\langle\psi\,|j\xi\rangle_F} = \sum_{\chi \in \mathcal{B}} \psi\,(\chi) \cdot \overline{j\xi\,(\chi)} = \sum_{\chi \in \mathcal{B}} (\xi\,|\chi)_{\mathcal{H}} \cdot \psi\,(\chi) \ ,$$

d.h. $h_{\mathcal{B}}$ ist bezüglich des Zählintegrals auf $\mathcal{B}$ der Integralkernoperator zum Kern $(\cdot\,|\cdot)_{\mathcal{H}}$.

Aufgabe 2

(a) Zunächst zeigen wir, dass die Abb ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J)$ ist. Das sie sesquilinear, hermitesch und positiv ist, ist trivial. Um die Eigenschaft "nicht-ausgeartet" nachzuweisen betrachte: aus $\|\xi\|_{((1))}^2 = \int_J |\partial\xi|^2 = 0$ folgt $\partial\xi = 0\,\mu$-f.ü., also $\xi = \xi(\tau) + \int_\tau^{\cdot} \partial\xi = \xi(\tau) = 0$.

Nun zeigen wir die Äquivalenz: $\inf J$, $\sup J \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{H}_\tau^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{M}(J)$ HUR.

"$\Rightarrow$" Es gelte $J =]a,b[$, mit $a,b \in \mathbb{R}$. Für $\xi \in \mathbf{L}^2(J)$ ist $\int_\tau^{\cdot} \xi \in \mathcal{H}_\tau^{(1)}(J)$, also ist $\partial : \mathcal{H}_\tau^{(1)}(J) \longrightarrow \mathbf{L}^2(J)$ bijektiv und eine Isometrie (klar, es gilt $\|\partial\xi\|_2^2 = \|\xi\|_{((1))}^2$). Damit ist $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J)$ ein Hilbertraum. Da nach Cauchy-Schwarz

$$|\xi(t)| = \left|\int_\tau^t \partial\xi\right| \leqslant \sqrt{\lambda(J)} \cdot \|\partial\xi\|_2$$

ist ξ beschränkt. Trivialerweise gilt: $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{M}(J) : \xi \longrightarrow \xi \cdot \lambda_J$ ist stetig.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{M}(J)$ HUR. Die kanonische Injektion $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(J)$ ist stetig nach dem Satz über den abgeschlossenen Graph. Dazu sei $(\xi_k, \xi_k) \to (\xi, g)$ in $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J) \times \mathbf{L}^2(J)$. Zu zeigen ist dann $\xi = g$. Nach Voraussetzung gilt aber $\xi_k \to \xi$ in $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J)$ und $\xi_k \to g$ in $\mathbf{L}^2(J)$, also in dem Hausdorffraum $\mathcal{M}(J)$. Wegen der Eindeutigkeit des Limes folgt die Behauptung. Damit existiert ein $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\|\xi\|_2 \leqslant C \cdot \|\xi\|_{((1))}$. Nun machen wir folgende Widerspruchsannahme: $\sup J = \infty$. Sei dann $\varphi \in \mathcal{D}_+(J)$ so dass $\varphi \neq 0 \neq \partial\varphi$ und $\operatorname{supp}\varphi \subset]\max(0, 2\tau), \infty[\subset J$. Zusätzlich sei $h \in]0,1]$ ein Streckfaktor und

$$D_h\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \varphi(hx) \ .$$

Damit gilt: $D_h\varphi(\tau) = 0$ und somit $D_h\varphi \in \mathcal{H}_\tau^{(1)}(J)$. Andererseits:

$$C^2 \geqslant \frac{\int_0^\infty |D_h\varphi(x)|^2\, dx}{\int_0^\infty |\partial D_h\varphi(x)|^2\, dx} = \frac{\int_0^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \varphi(hx)\right|^2 dx}{\int_0^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \partial\varphi(hx) \cdot h\right|^2 dx} = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\int_0^\infty |\varphi(hx)|^2 \cdot h\, dx}{\int_0^\infty |\partial\varphi(hx)|^2 \cdot h\, dx} =$$

$$\underset{y=h\cdot x}{=} \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\int_0^\infty |\varphi(y)|^2\, dy}{\int_0^\infty |\partial\varphi(y)|^2\, dy} \to \infty \quad \text{für } h \to 0 \ .$$

Und damit folgt der Widerspruch. Für $\inf J = -\infty$ lässt sich ähnlich schließen.

(b) Berechne den Kern (Wir raten ihn und zeigen dann, dass wir richtig liegen): $\forall\varphi \in \mathcal{K}(]a,b[)$ definiere:

$$h^0\varphi(s) := \int_a^b \frac{(\min(s,t) - a)(b - \max(s,t))}{b-a} \cdot \varphi(t)\, dt \ .$$

$h^0\varphi$ ist stetig (Lebesgue), $h^0\varphi(a) = h^0\varphi(b) = 0$ und $|h^0\varphi| \leqslant (b-a) \cdot \int_a^b |\varphi|$.

Sei nun $\psi \in \mathcal{K}(]a,b[)$:

$$\left|\langle \psi | \, h^0\varphi\rangle\right| \leqslant \int \left|\overline{\psi} h^0\varphi\right| \leqslant \|\psi\|_\infty (b-a)^3 \|\varphi\|_\infty \ .$$

Damit ist $h^0 : \mathcal{K}\left(]a,b[\right) \longrightarrow \mathcal{M}\left(]a,b[\right)$ stetig, da $\varphi \longrightarrow \|\varphi\|_\infty : \mathcal{K}\left(]a,b[\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetige HN ist. Als nächstes zeigen wir, dass $h^0\varphi \in \mathcal{H}^{(1),0}$ gilt: $h^0\varphi \in \mathbf{L}^2\left(\left(]a,b[\right)\right)$, da die Funktion beschränkt ist. Nach dem Differenzierbarkeitssatz (vgl. Aufgabe 16.4) gilt $h^0\varphi \in \mathcal{AC}$ mit Ableitung

$$\partial h^0\varphi(s) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \partial_s \Big[\left(\min(s,t) - a\right)\left(b - \max(s,t)\right)\Big] \cdot \varphi(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \int \left[1_{[a,t]}(s)(b-t) - (t-a)\,1_{[t,b]}(s)\right] \cdot \varphi(t)\, dt\ .$$

Das $\partial h^0\varphi \in \mathbf{L}^2\left(\left(]a,b[\right)\right)$ ist klar. Also gilt insgesamt tatsächlich: $h^0 : \mathcal{K}\left(]a,b[\right) \longrightarrow \mathcal{H}^{(1),0}\left(]a,b[\right)$. Für alle $f \in \mathcal{H}^{(1),0}\left(]a,b[\right)$ gilt weiter:

$$\langle \varphi | f \rangle = \int \overline{\varphi} f = \frac{1}{b-a} \cdot \int \overline{\varphi(t)} \cdot \left[\left(f(t) - f(a)\right)(b-t) - (t-a)\left(f(b) - f(t)\right)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \int_J \overline{\varphi(t)} \cdot \left[\int_J 1_{[a,t]}(b-t) - 1_{[t,b]}(t-a)\right] \partial f\, dt =$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{b-a} \cdot \int_J \int_J \overline{\varphi(t)} \cdot \left[1_{[a,t]}(s)(b-t) - 1_{[t,b]}(s)(t-a)\right] dt\, \partial f(s)\, ds =$$

$$= \int_J \overline{\partial h^0\varphi(s)} \cdot \partial f(s)\, ds = \left(\partial h^0\varphi \,|\, \partial f\right)_{\mathbf{L}^2(([a,b[))} = \left(h^0\varphi \,|\, f\right)_{((1))}$$

D.h. h^0 ist der gesuchte Kern von $\mathcal{H}^{(1),0}\left(\left(]a,b[\right)\right) \hookrightarrow \mathcal{M}\left(\left(]a,b[\right)\right)$.

(c) Betrachte $\frac{\mathrm{id}-a}{\sqrt{b-a}} \in \mathcal{H}_a^{(1)}\left(]a,b[\right)$.

$$\left\|\frac{\mathrm{id}-a}{\sqrt{b-a}}\right\|_{((1))} = \left\|\frac{1}{\sqrt{b-a}}\right\|_2 = 1$$

und berechne

$$\left(\eta \,|\, \mathrm{id}-a\right)_{((1))} = \left(\partial\eta \,|\, 1\right)_{\mathbf{L}^2(([a,b[))} = \int \partial\eta = \eta(b)\ \forall \eta \in \mathcal{H}_a^{(1)}\left(]a,b[\right)$$

Damit ist $(\mathrm{id}-a) \perp \mathcal{H}^{(1),0}\left(]a,b[\right)$, also

$$\mathcal{H}_a^{(1)}\left(]a,b[\right) = \mathbb{K} \cdot \frac{\mathrm{id}-a}{\sqrt{b-a}} \boxplus \mathcal{H}^{(1),0}\left(]a,b[\right)\ .$$

Der Kern h_a von $\mathcal{H}_a^{(1)}\left(]a,b[\right)$ ist also die Summe beider Kerne :

$$h_a = \frac{\mathrm{id}-a}{\sqrt{b-a}} \otimes \frac{\mathrm{id}-a}{\sqrt{b-a}} + h^0$$

$$h_a(s,t) = \frac{1}{b-a} \cdot \Big[(s-a)(t-a) + \left(\min(s,t) - a\right)\left(b - \max(s,t)\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} (s-a)(t-a) + (s-a)(b-t) & s \leqslant t \\ (s-a)(t-a) + (t-a)(b-s) & s \geqslant t \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} (s-a)(t-a+b-t) & s \leqslant t \\ (t-a)(s-a+b-s) & s \geqslant t \end{array} \right\} = \min(s,t) - a \ .$$

Alternativ könnte man rechnen

$$\langle \varphi | f \rangle = \int_a^b \overline{\varphi(t)} f(t) \; dt = \int_a^b \overline{\varphi(t)} \cdot \int_a^b 1_{[a,t]}(s) \cdot \partial f(s) \; ds \, dt =$$

$$= \int_a^b \overline{\int_a^b \partial_s \Big[\min(s,t) - a \Big] \cdot \varphi(t) \; dt} \cdot \partial f(s) \; ds = \left(\int_a^b \Big[\min(\cdot,t) - a \Big] \cdot \varphi(t) \; dt \middle| f \right)_{\mathcal{H}_a^{(1)}(]a,b[)} \ .$$

Für beliebiges τ führt die folgende Rechnung zum Ziel:

$$\langle \varphi | f \rangle = \int_a^b \overline{\varphi(t)} f(t) \; dt = \int_a^b \overline{\varphi(t)} \cdot \int_a^b 1_{\tau,t}(s) \cdot \partial f(s) \; ds \, dt =$$

$$= \int_a^b \overline{\int_a^b \partial_s \Big[\min\big((s-\tau)^+, (t-\tau)^+\big) + \min\big((\tau-s)^+, (\tau-t)^+\big) \Big] \cdot \varphi(t) \; dt} \cdot \partial f(s) \; ds =$$

$$= \left(\int_a^b \Big[\min\big((s-\tau)^+, (t-\tau)^+\big) + \min\big((\tau-s)^+, (\tau-t)^+\big) \Big] \cdot \varphi(t) \; dt \middle| f \right)_{\mathcal{H}_\tau^{(1)}(]a,b[)} \ .$$

Somit ist der Kern von $\mathcal{H}_\tau^{(1)}(]a,b[)$ gegeben durch

$$h_\tau(s,t) = \min\big((s-\tau)^+, (t-\tau)^+\big) + \min\big((\tau-s)^+, (\tau-t)^+\big) \ .$$

(d) Die Ableitung $\partial : \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[) \longrightarrow \mathbf{L}^2(]0,1[)$ ist unitär. Da $(1) \cup \left(\sqrt{2} \cdot \cos(\pi k \, \mathrm{id})\right)_{k \geqslant 1}$ eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2(]0,1[)$ bildet, ist $(\mathrm{id}) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin(\pi k \, \mathrm{id})\right)_{k \geqslant 1}$ eine hilbertsche Basis von $\mathcal{H}_0^{(1)}(]a,b[)$. Daher gilt für den Kern h_0 von $\mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$:

$$h_0(s,t) = st + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k s) \sin(\pi k t)}{k^2} \ .$$

Da

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = \mathrm{Re}\left(e^{i(x-y)} - e^{i(x+y)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(-2ie^{ix} \sin y\right) = 2 \sin y \cdot \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = 2 \sin x \sin y$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(jx)}{j^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

(vgl. Analysis, Anwendung 10.9), folgt mit der Symmetrie des cos

$$h_0(s,t) = st + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{\pi |s-t| - \pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi (s+t) - \pi}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= st + \frac{1}{4} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} (s-t)^2 - 2(s-t) - (s+t)^2 + 2(s+t) & s \geqslant t \\ (t-s)^2 - 2(t-s) - (s+t)^2 + 2(s+t) & s \leqslant t \end{array} \right\} =$$

$$= st + \frac{1}{4}\left\{ \begin{array}{ll} -2st + 4t - 2st & s \geqslant t \\ -2st + 4s - 2st & s \leqslant t \end{array} \right\} = \min(s,t) \ .$$

Aufgabe 3

$a \Rightarrow b$: Sei $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{K}^X$ ein HUR von Funkionen, d.h. die kanonische Injektion

$$j : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{K}^X$$

ist stetig. Für die dazugehörige Adjungierte $j^\dagger : \mathbb{K}^{(X)} \to \mathcal{H}^\dagger$ gilt:

$$\langle \xi | j^\dagger 1_{\{x\}} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle j\xi | 1_{\{x\}} \rangle_{\mathbb{K}^X} = \overline{\xi(x)} = \langle \xi | \delta_x \rangle_{\mathcal{H}} \ ,$$

also $j^\dagger 1_{\{x\}} = \delta_x$ für alle $x \in X$. Nach 5.1 ist der zu dazugehörige Kern h gegeben durch:

$$h : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{K}^X : \varphi \longmapsto h\varphi = jR^{-1}j^\dagger\varphi = jR^{-1}j^\dagger \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot 1_{\{x\}} = \sum_{x\in X} \varphi(x) R^{-1}\delta_x \ .$$

Nach Satz 5.1 ist h hermitesch positiv. Nach Beispiel 3.13.1 existiert zu h eine eindeutige Kernfunktion

$$\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{K} : (x,y) \longmapsto \left\langle 1_{\{x\}} \middle| h 1_{\{y\}} \right\rangle = \left\langle 1_{\{x\}} \middle| R^{-1}\delta_y \right\rangle$$

mit

$$h\varphi(x) = \sum_{x \in X} \varkappa(x,y)\varphi(y)$$

für alle $\varphi \in K^{(X)}$ und $x \in X$. Für alle $x, y \in X$ hat man dann, da h hermitesch ist:

$$\varkappa(x,y) = \left\langle 1_{\{x\}} \middle| h1_{\{y\}} \right\rangle_{\mathbb{K}^{(X)}} = \left\langle h1_{\{x\}} \middle| 1_{\{y\}} \right\rangle_{\mathbb{K}^X} = \overline{\left\langle 1_{\{y\}} \middle| h1_{\{x\}} \right\rangle_{\mathbb{K}^{(X)}}} = \overline{\varkappa(x,y)} \ . \qquad (*)$$

Analog erhält man

$$\sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \varkappa(x,y) \cdot \varphi(y) = \sum_{x,y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \left\langle 1_{\{x\}} \middle| h1_{\{y\}} \right\rangle_{\mathbb{K}^{(X)}} \cdot \varphi(y) = \sum_{y \in X} \left\langle \varphi \middle| h1_{\{y\}} \right\rangle_{\mathbb{K}^{(X)}} \cdot \varphi(y) =$$

$$= \sum_{y\in X} \left\langle h\varphi \middle| 1_{\{y\}} \right\rangle_{\mathbb{K}^X} \cdot \varphi(y) = \langle h\varphi | \varphi \rangle_{\mathbb{K}^X} = \langle \varphi | h\varphi \rangle_{\mathbb{K}^{(X)}} \underset{5.1}{\geqslant} 0 \ .$$

Daraus folgt die Behauptung.

$b \Rightarrow a$: Definiere

$$h : \mathbb{K}^{(X)} \to \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{K}^X : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varkappa(\cdot, x) \cdot \varphi(x)$$

Da $\varkappa(x,y) = \overline{\varkappa(x,y)}$ folgt ähnlich wie in $(*)$, dass h hermitesch ist.

Analog erhält man aus der zweiten Bedingung an $\varkappa$, dass h positiv ist. Da h selbstadjungiert ist, ist es schwach stetig, da $\mathbb{K}^{(X)}$ tonneliert also stetig. Nach dem Satz von Schwartz existiert genau ein HUR zu h.

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 8

Aufgabe 1

(a) Die Abbildung j ist injektiv. In der Tat ist $T_\varkappa = 0$, so folgt mit Fubini :

$$\int \overline{\xi(x)} \cdot \left(\int \gamma(y) \cdot \varkappa(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = 0$$

für alle $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ und $\gamma \in \mathbf{L}^2(\nu)$. Da $\mathbf{L}^2(\mu)$ und $\mathbf{L}^2(\nu)$ Test-Räume sind (vgl. Korollar 1.16), bekommt man zuerst $\int \gamma(y) \cdot f(\cdot, y) \, d\nu(y) = 0$ lokal μ-f.ü., und dann für lokal μ-f.a $x \in X$, daß $\varkappa(x,\cdot) = 0$ lokal ν-f.ü. Da aber $\varkappa$ $\mu \otimes \nu$-meßbar und $\mu \otimes \nu$-moderat ist, folgt $\varkappa = 0$ $\mu \otimes \nu$-f.ü.

Weiter gilt $\left(|\mathbf{L}^2(\mu))_i (\mathbf{L}^2(\nu)| \right)^\dagger = \mathcal{L}_s\left(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu)_\sigma\right)$ und

$$\left| \left\langle \, |\xi)\,(\gamma| \, \middle| \, T_\varkappa \right\rangle \right| = \left| (\xi|\, T_\kappa \gamma)_{\mathbf{L}^2(\mu)} \right| \leqslant \|T_\kappa\| \cdot \|\xi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} \cdot \|\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\nu)} =$$

$$= \|T_\kappa\| \cdot \left\| \, |\xi)\,(\gamma| \right\|_{|\mathbf{L}^2(\mu))_i(\mathbf{L}^2(\nu)|} \ ,$$

also ist die Einbettung j stetig. Somit ist $j\left(\mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)\right) \hookrightarrow \mathcal{L}_s\left(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu)_\sigma\right)$ ein HUR und

$$\left\langle |\xi)\,(\eta| \, \middle| T_\varkappa \right\rangle_{|\mathbf{L}^2(\mu))_i(\mathbf{L}^2(\nu)|} = (\xi|\, T_\kappa \gamma)_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \overline{\xi(x)} \cdot \left(\int \gamma(y) \cdot \varkappa(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$

$$= \int \overline{|\xi)\,(\gamma|} \cdot \varkappa \, d\mu \otimes \nu = \left(|\xi)\,(\gamma| \, | \, \varkappa \right)_{\mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu)} \ .$$

Also ist der Kern $h : |\mathbf{L}^2(\mu))\,(\mathbf{L}^2(\nu)| \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ die kanonische Injektion

$$\left|\mathbf{L}^2(\mu)\right)\left(\mathbf{L}^2(\nu)\right| \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu) \ .$$

(b) Für $t = \sum_{j=0}^m |\xi_j)\,(\gamma_j| \in |\mathbf{L}^2(\mu))\,(\mathbf{L}^2(\nu)|$ gilt

$$\langle t\,|ht\rangle_{|\mathbf{L}^2(\mu))_i(\mathbf{L}^2(\nu)|} = \sum_{k,l=0}^m \left\langle \, |\xi_k)\,(\gamma_k| \, \middle| \, h\left(|\xi_l)\,(\gamma_l| \right) \right\rangle = \sum_{k,l=0}^m (\xi_k\,|\xi_l) \cdot (\gamma_l\,|\gamma_k) \ .$$

Damit ist $T \in \mathcal{L}\left(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu)\right)$ genau dann in $\mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$, wenn es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß

$$\left| \sum_{j=0}^m (\xi_j\,|T\gamma_j) \right| = \left| \langle t\,|T\rangle_{|\mathbf{L}^2(\mu))_i(\mathbf{L}^2(\nu)|} \right| \leqslant M \cdot \langle t\,|ht\rangle^{\frac{1}{2}}_{|\mathbf{L}^2(\mu))_i(\mathbf{L}^2(\nu)|} = M \cdot \left(\sum_{k,l=0}^m (\xi_k\,|\xi_l) \cdot (\gamma_l\,|\gamma_k) \right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $(\xi_j)_{0\leqslant j\leqslant m} \subset \mathbf{L}^2(\mu)$, $(\gamma_j)_{0\leqslant j\leqslant m} \subset \mathbf{L}^2(\nu)$ gilt. Œ kann man annehmen, daß $(\gamma_j)_{0\leqslant j\leqslant m}$

orthonormiert ist. Die Bedingung nimmt dann die Form

$$\left|\sum_{j=0}^{m}\left(\xi_j\,|T\gamma_j\right)\right| \leqslant C\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\left\|\xi_j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

an.

Für zusätzliche Informationen siehe Beispiel 2.15 und 3.18, Aufgabe 1 und 2, sowie Aufgabe 5.2.

Aufgabe 2

(a) Offenbar ist $\|\cdot\|_2$ eine Halbnorm. Ist $\|\vartheta\|_2 = 0$, so folgt $\|\vartheta(\lambda)\|_{\mathcal{H}} = 0$ für σ-fast alle $\lambda \in \Lambda$, also $\vartheta = 0$ σ-fast überall, da $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ eine Norm ist.

Sei nun $([\vartheta_k])$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{\Lambda}^2$. Es gibt eine Teilfolge α , so dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $l \geqslant \alpha(k)$,

$$\left(\int_\Lambda^* \left\|\vartheta_{\alpha(k)} - \vartheta_l\right\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \;.$$

Damit ist

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\vartheta_{\alpha(k)} - \vartheta_{\alpha(k+1)}\right\|_{\mathcal{H}}\right\|_2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\vartheta_{\alpha(k)} - \vartheta_{\alpha(k+1)}\right\|_2 \leqslant 1 < \infty \;,$$

also ist die Funktion

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\vartheta_{\alpha(k)} - \vartheta_{\alpha(k+1)}\right\|_{\mathcal{H}} : \Lambda \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

endlich σ-f.ü. Insbesondere konvergiert $\left(\vartheta_{\alpha(k)}(\lambda)\right)$ σ-f.ü. in $\mathcal{H}$. Definiere $\vartheta := \lim_k \vartheta_{\alpha(k)}$ wo dies ein Sinn macht und durch 0 sonst. Dann konvergiert $\left(\vartheta_{\alpha(k)}\right)$ punktweise skalar σ-fast überall gegen ϑ , insbesondere ist ϑ skalar σ-messbar, und es gilt für $l \geqslant \alpha(k)$

$$\|\vartheta - \vartheta_l\|_2 \leqslant \left\|\vartheta - \vartheta_{\alpha(k)}\right\|_2 + \left\|\vartheta_l - \vartheta_{\alpha(k)}\right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=k}^{\infty}\left\|\vartheta_{\alpha(j+1)} - \vartheta_{\alpha(j)}\right\|_2 + \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \;,$$

also ist $[\vartheta] \in \mathbf{\Lambda}^2$ und $[\vartheta] = \lim_k [\vartheta_k]$ in $\mathbf{\Lambda}^2$.

(b) Sei $\sum_{j=0}^m |f_j)\left(\xi_j\right| \in |\mathcal{H})\left(\mathbf{L}^2(\sigma)\right|$ mit $\left(\xi_j\right)_{j=0,\ldots,m} \subset \mathcal{H}$ und $\left(f_j\right)_{j=0,\ldots,m} \subset \mathbf{L}^2(\sigma)$. Œ können wir annehmen, dass $\left(\xi_j\right)_{j=0,\ldots,m}$ orthonormal ist. Ist

$$\sum_{j=0}^{m}\overline{f_j}\cdot\xi_j = 0 \quad \sigma\text{-fast überall,}$$

so folgt

$$0 = \left(\sum_{j=0}^{m} \overline{f_j} \cdot \xi_j \middle| \xi_k \right) = \sum_{j=0}^{m} \delta_{j,k} \cdot f_j = f_k \quad \sigma\text{-fast überall} ,$$

für alle $k = 0, \ldots, m$, also

$$\sum_{j=0}^{m} |f_j)\left(\xi_j\right| = 0 .$$

(c) Seien $f \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ und $\xi \in \mathcal{H}$. Es gilt

$$\left(\left(\overline{f} \cdot \xi\right)(\lambda) \middle| \zeta(\lambda) \right) = f(\lambda) \cdot (\xi | \zeta(\lambda)) ,$$

also ist $\left(\overline{f} \cdot \xi \middle| \zeta\right)_\diamond$ σ-messbar. Da Limiten messbarer Funktionen messbar sind, folgt die Behauptung.

(d) Da

$$\int^* |(\vartheta| \vartheta')| \, d\sigma \leqslant \int^* \|\vartheta\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\vartheta'\|_{\mathcal{H}} \, d\sigma \leqslant \|\vartheta\|_2 \cdot \|\vartheta'\|_2 ,$$

definiert dies eine hermitesch positive Sesquilinearform. Offenbar ist die durch diese definierte Halbnorm gerade $\|\cdot\|_2$, so dass es sich um ein Skalarprodukt handelt. Da $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H})$ als abgeschlossener Unterraum eines Banachraums vollständig ist, ist dies ein Hilbertraum.

(e) Wenn $\mathcal{H}$ separabel ist, ist $\mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{L}^2$. Denn sei $[\theta] \in \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$. Sei $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine hilbertsche Basis von $\mathcal{H}$. Da θ skalar σ-messbar ist, ist

$$f_k := (\theta \,|\xi_k)_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

σ-messbar. Für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt $\theta(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k | \theta(\lambda))_{\mathcal{H}} \cdot \xi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{f_k(\lambda)} \cdot \xi_k$, sowie

$$\|\theta(\lambda)\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(\lambda)|^2$$

und

$$\int^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(\lambda)|^2 \right) d\sigma(\lambda) = \int^* \|\theta(\lambda)\|_{\mathcal{H}}^2 \, d\sigma(\lambda) = \|\theta\|_2^2 < \infty .$$

Daraus ergibt sich

$$\lim_l \left\| \theta - \sum_{k=0}^{l} \overline{f_k} \cdot \xi_k \right\|_2^2 = \lim_l \int^* \left(\sum_{k=l+1}^{\infty} |f_k(\lambda)|^2 \right) d\sigma(\lambda) = 0$$

aus dem Satz von Beppo Levi, d.h. $\theta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H})$.

Sei $M \subset [0,1] =: \Lambda$ eine nicht $\lambda_{[0,1]}$-messbare Menge (insbesondere ist diese Menge überabzählbar). Die Abbildung

$$\theta : \lambda \longmapsto 1_{M\cap\{\lambda\}} : [0,1] \longrightarrow \ell^2([0,1]) =: \mathcal{H}$$

ist skalar σ-messbar, denn für $\varphi \in \ell^2([0,1])$ ist $\{\varphi \neq 0\}$ abzählbar, so dass

$$(\varphi \,|\theta)_{\ell^2} = \varphi \cdot 1_M : \lambda \longmapsto \varphi(\lambda) \cdot 1_M(\lambda)$$

$\lambda_{[0,1]}$-messbar ist. Weiterhin gilt $\left\| 1_{M\cap\{\lambda\}} \right\|_{\ell^2}^2 = \sum_{\mu\in[0,1]} \left| 1_{M\cap\{\lambda\}}(\mu) \right|^2 = 1_M(\lambda)$ und

$$\|\theta\|_2^2 = \int^* \left\| 1_{M\cap\{\lambda\}} \right\|_{\ell^2}^2 \, d\lambda = \lambda^*(M) \leqslant 1 < \infty \ ,$$

also $\theta \in \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$. Aber

$$(\theta\,|\theta)_{\ell^2} = \sum_{\mu\in[0,1]} 1_{M\cap\{\cdot\}}(\mu) = 1_M$$

ist nach Konstruktion nicht messbar, insbesondere folgt mit (c): $\theta \notin \mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H})$. Man beachte, dass $\theta = 0$ skalar σ-f.ü. (vgl. Hauptsatz 5.12).

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 9

Aufgabe 1 Sei $\varphi \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt

$$\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2^2 = \int \left\|\widehat{h}(x)\,\varphi\right\|_x^2 d\sigma(x) = \int \Big(\left|\varepsilon_x\right\rangle \left\langle\varepsilon_x\right|\varphi \Big| \left|\varepsilon_x\right\rangle \left\langle\varepsilon_x\right|\varphi \Big)_{\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x} d\sigma(x) =$$

$$= \int |\varphi(x)|^2 \, d\sigma(x) = \|h\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(\sigma)} \ .$$

Also ist $\left(\sigma, (\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x)_{x\in X}\right)$ eine Zerlegung von $\mathbf{L}^2(\sigma)$. Es ist noch zu zeigen, dass diese direkt ist.

Beh.: $\int \diamond \, d\sigma \, : \, \mathbf{L}^2\left(\sigma, (\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x)_{x\in X}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$ ist injektiv. Sei $\zeta \in \operatorname{Ker}\int \diamond \, d\sigma$. Dann ist $\int \zeta \, d\sigma = 0$ in $\mathbf{L}^2(\sigma)$. Also gilt für alle $\varphi \in \mathcal{K}(X)$:

$$0 = \left\langle \varphi \middle| \int \zeta \, d\sigma \right\rangle_{\mathcal{K}(X)} = \int \left\langle \varphi \middle| \zeta(x) \right\rangle_{\mathcal{K}(X)} d\sigma(x) = \int \Big(\left|\varepsilon_x\right\rangle \left\langle\varepsilon_x\right|\varphi \Big| \zeta(x) \Big)_{\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x} d\sigma(x) =$$

$$= \int \overline{\varphi}(x) \cdot \left(\varepsilon_x \middle| \zeta(x)\right)_{\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x} d\sigma(x) \ .$$

Definiere

$$\xi : X \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \xi(x) := \left(\varepsilon_x \middle| \zeta(x)\right)_{\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x} \ .$$

Da ζ skalar σ-messbar und $\left\langle \varphi \middle| \zeta(x) \right\rangle_{\mathcal{K}(X)} = \overline{\varphi}(x)\cdot\xi(x)$, ist $\overline{\varphi}\cdot\xi$ σ-messbar für alle $\varphi \in \mathcal{K}(X)$. Damit ist ξ σ-messbar. Weiter ist

$$\int \|\zeta(x)\|^2_{\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x} d\sigma(x) = \int \|\xi(x)\,\epsilon_x\|^2_{\mathbb{C}\cdot\varepsilon_x} d\sigma(x) = \int |\xi|^2 \, d\sigma \ ,$$

d.h. $\xi \in \mathbf{L}^2(\sigma)$. Aus obigem folgt dann für alle $\varphi \in \mathcal{K}(X)$

$$\int \overline{\varphi}\cdot\xi \, d\sigma = 0 \ ,$$

also $\xi = 0$ σ-fast überall. D.h. $\zeta = 0$ und damit $\operatorname{Ker}\int \diamond \, d\sigma = \{0\}$.

Es muss gezeigt werden, dass die Zerlegung nicht entartet ist. Sei dazu $A \subset X$ σ-messbar mit $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ skalar σ-fast überall. Dann folgt für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{K}(X)$ mit $\psi = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi$

$$0 = \int 1_A \cdot \left\langle |\varphi\rangle \langle\psi| \middle| \widehat{h}(x) \right\rangle d\sigma(x) = \int 1_A \cdot \left\langle |\varphi\rangle \langle\psi| \middle| |\varepsilon_x\rangle \langle\varepsilon_x| \right\rangle d\sigma(x) =$$

$$= \int 1_A \cdot \varphi(x) \cdot \overline{\psi}(x) \, d\sigma(x) = \int 1_A \cdot \varphi \, d\sigma$$

Also folgt $1_A = 0$ lokal σ-fast überall.

Aufgabe 2 Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt mit Parseval

$$\left\| \widehat{h}\varphi \right\|_2^2 = \int \left\| \widehat{h}(\lambda)\varphi \right\|_{\mathbb{C}\cdot e_\lambda}^2 d\lambda = \int \Big(|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|\varphi \Big| |e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|\varphi \Big)_{\mathbb{C}\cdot e_\lambda} d\lambda =$$

$$= \int |\mathcal{F}\varphi(\lambda)|^2 \, d\lambda = \int |\varphi(x)|^2 \, dx = \|h\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)}^2 \ .$$

Also ist $\left(\lambda_{\mathbb{R}^n}, (\mathbb{C}\cdot e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^n}\right)$ eine Zerlegung von $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Es ist noch zu zeigen, dass diese direkt ist.

Beh.: $\int \diamond \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} : \mathbf{L}^2\left(\lambda_{\mathbb{R}^n}, (\mathbb{C}\cdot e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^n}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ist injektiv. Sei $\zeta \in \operatorname{Ker} \int \diamond \, d\lambda_{\mathbb{R}^n}$. Dann ist $\int \zeta \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} = 0$ in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Also gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$0 = \left\langle \varphi \middle| \int \zeta \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} \right\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \int \langle\varphi|\,\zeta(\lambda)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \, d\lambda = \int \Big(|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|\varphi \Big| \zeta(\lambda)\Big)_{\mathbb{C}\cdot e_\lambda} d\lambda =$$

$$= \int \overline{\mathcal{F}\varphi}(\lambda)\cdot(e_\lambda|\,\zeta(\lambda))_{\mathbb{C}\cdot e_\lambda} \, d\lambda \ .$$

Definiere

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto \xi(\lambda) := (e_\lambda|\,\zeta(\lambda))_{\mathbb{C}\cdot e_\lambda} \ .$$

Da ζ skalar $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-messbar und $\langle\varphi|\,\zeta(\lambda)\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \overline{\mathcal{F}\varphi}(\lambda)\cdot\xi(\lambda)$, ist $\overline{\mathcal{F}\varphi}\cdot\xi$ $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-messbar für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist ξ $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-messbar, da $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Weiter ist

$$\int \|\zeta(\lambda)\|_{\mathbb{C}\cdot e_\lambda}^2 \, d\lambda = \int \|\xi(\lambda)\, e_\lambda\|_{\mathbb{C}\cdot e_\lambda}^2 \, d\lambda = \int |\xi|^2 \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} \ ,$$

d.h. $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Aus obigem folgt dann für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int \overline{\mathcal{F}\varphi}\cdot\xi \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} = 0 \ ,$$

also $\xi = 0$ $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-fast überall. D.h. $\zeta = 0$ und damit $\operatorname{Ker}\int\diamond\, d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \{0\}$.

Es muss gezeigt werden, dass die Zerlegung nicht entartet ist. Sei dazu $A \subset \mathbb{R}^n$ $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-messbar mit $1_A\cdot\widehat{h} = 0$ skalar $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-fast überall. Dann folgt für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{F}\psi = 1$ auf $\operatorname{supp}\mathcal{F}\varphi$

$$0 = \int 1_A\cdot\left\langle |\varphi\rangle\langle\psi| \middle| \widehat{h}(x)\right\rangle d\sigma(x) = \int 1_A\cdot\left\langle |\varphi\rangle\langle\psi| \middle| |e_\lambda\rangle\langle e_\lambda| \right\rangle d\lambda =$$

$$= \int 1_A\cdot\mathcal{F}\varphi(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{F}\psi}(\lambda) \, d\lambda = \int 1_A\cdot\mathcal{F}\varphi \, d\lambda_{\mathbb{R}^n}$$

Also folgt $1_A = 0$ $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-fast überall.

In $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ gilt auch diese Zerlegung, da $\mathcal{F}(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, aber das rechnen ist ein bißchen komplizierter : Der erste bleibt so; aus $\int\overline{\mathcal{F}\varphi}\cdot\xi\, d\lambda_{\mathbb{R}^n} = 0$ folgt $\int\overline{\varphi}\cdot\overset{-1}{\mathcal{F}}\xi\, d\lambda_{\mathbb{R}^n} = 0$, also $\overset{-1}{\mathcal{F}}\xi = 0$, und somit $\xi = 0$ $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-fast überall. Man verfährt analog für den letzten Teil.

Aufgabe 3 Sei $k \in \mathbb{R}_+^*$. Der HUR $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ hat den Kern $h : \varphi \longrightarrow [\varphi]$ und

$$\mathbb{C} \cdot e_k \boxplus \mathbb{C} \cdot e_{-k} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$$

den Kern

$$|e_k\rangle \langle e_k| + |e_{-k}\rangle \langle e_{-k}| : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \cdot e_k \boxplus \mathbb{C} \cdot e_{-k} : \varphi \longmapsto \underbrace{\langle e_k | \varphi \rangle}_{\mathcal{F}\varphi(k)} e_k + \underbrace{\langle e_{-k} | \varphi \rangle}_{\mathcal{F}\varphi(-k)} e_{-k} \ .$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \| |e_k\rangle \langle e_k| + |e_{-k}\rangle \langle e_{-k}| \varphi \|^2_{\mathbb{C} \cdot e_k \boxplus \mathbb{C} \cdot e_{-k}} \, dk \overset{\text{Hilb.Basis}}{=} \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(|\mathcal{F}\varphi(k)|^2 + |\mathcal{F}\varphi(-k)|^2 \right) dk =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\varphi(k)|^2 \, dk = \|\mathcal{F}\varphi\|_2^2 \overset{\mathcal{F} \text{ Isometrie}}{=} \|\varphi\|_2^2 = \|h\varphi\|_2^2 \ .$$

Daraus folgt

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int \mathbb{C} \cdot e_k \boxplus \mathbb{C} \cdot e_{-k} \, dk \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Wir wissen bereits, dass

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \mathbf{L}^2_u(\mathbb{R}) + \mathbf{L}^2_g(\mathbb{R})$$

gilt, mit

$$\xi = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\xi - \xi^\vee\right)}_{=:\xi_u} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\xi + \xi^\vee\right)}_{=:\xi_g}$$

für alle $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Als nächstes zeigen wir:

$$\mathbf{L}^2_u(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{C} \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi\lambda\diamond) \, dk \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R})'$$

Dazu berechnen wir den Kern h_u von $\mathbf{L}^2_u \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$. Sei also $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbf{L}^2_u(\mathbb{R})$. Es folgt

$$\langle \varphi | \xi \rangle = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\lambda = \int \overline{\varphi_u + \varphi_g} \cdot \xi \, d\lambda \overset{\xi \text{ ungerade}}{=} = \int \overline{\varphi_u} \cdot \xi = (\varphi_u | \xi)_{L^2_u(\mathbb{R})}$$

D.h. $h_u : \varphi \longmapsto \varphi_u$. Zuletzt betrachten wir

$$\mathbb{C} \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi k\diamond) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$$

dessen Kern man in der Form

$$\left| \sqrt{2} \sin(2\pi k\diamond) \right\rangle \left\langle \sqrt{2} \sin(2\pi k\diamond) \right| = \left| \sqrt{2} \sin(2\pi k\diamond) \right\rangle \left\langle \frac{1}{i\sqrt{2}} (e_k - e_{-k}) \right|$$

schreiben kann. Es gilt

$$\left| \sqrt{2} \sin(2\pi k\diamond) \right\rangle \left\langle \sqrt{2} \sin(2\pi k\diamond) \right| \varphi = \sqrt{2} \sin(2\pi k\diamond) \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot (\mathcal{F}\varphi(k) - \mathcal{F}\varphi(-k)) \ ,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}_+^\star} \left\| \left| \sqrt{2}\sin(2\pi k\diamond) \right\rangle \left\langle \sqrt{2}\sin(2\pi k\diamond) \right| \varphi \right\|^2_{\mathbb{C}\cdot\sqrt{2}\sin(2\pi k\diamond)} dk = \frac{1}{2}\cdot\int_{\mathbb{R}_+^\star} \left|\mathcal{F}\left(\varphi - \varphi^\vee\right)\right|^2 d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left\|\mathcal{F}\left(\varphi-\varphi^\vee\right)\right\|^2_{2,\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{4}\left\|\varphi-\varphi^\vee\right\|_2^2 = \left\|\frac{1}{2}\left(\varphi-\varphi^\vee\right)\right\|_2^2 = \left\|\varphi_u\right\|^2 = \left\|h_u\varphi\right\|^2_{\mathbf{L}^2_u(\mathbb{R})} .$$

Somit gilt die Zerlegung für sin. Für cos lässt sich analog schließen.

Dass diese Zerlegungen direkt sind, pruft man wie in die Aufgabe 2.

Schließlich ist $\frac{e_k+e_{-k}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cos(2\pi k\diamond)$ und $\frac{e_k-e_{-k}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin(2\pi k\diamond)$ eine ONB in $\mathbb{C}\cdot e_k \boxplus \mathbb{C}\cdot e_{-k}$, also gilt

$$\mathbb{C}\cdot e_k \boxplus \mathbb{C}\cdot e_{-k} = \mathbb{C}\cdot\sqrt{2}\sin(2\pi k\diamond) \boxplus \mathbb{C}\cdot\sqrt{2}\cos(2\pi k\diamond) \ ,$$

und somit

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int^{\oplus}_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{C}\cdot e_k \boxplus \mathbb{C}\cdot e_{-k}\, dk = \int^{\oplus}_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{C}\cdot\sqrt{2}\sin(2\pi k\diamond) \boxplus \mathbb{C}\cdot\sqrt{2}\cos(2\pi k\diamond)\ dk =$$

$$= \int^{\oplus}_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{C}\cdot\sqrt{2}\sin(2\pi k\diamond)\ dk \boxplus \int^{\oplus}_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{C}\cdot\sqrt{2}\cos(2\pi k\diamond)\ dk .$$