Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Vorlesung

FUNKTIONALANALYSIS I

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

Alexander Alldridge

Wintersemester 2003/2004

Fassung vom 23. Juli 2004

Funktionalanalysis I

Blatt 1

Abgabe : Freitag, 31.10.2003

Aufgabe 1 (Die zentrale Projektion auf die Sphäre)

(a) Sei F ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass für alle $\varphi, \psi \in F \smallsetminus \{0\}$ gilt

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leqslant \frac{2}{\max\left(\|\varphi\|, \|\psi\|\right)} \cdot \|\varphi - \psi\| \ .$$

(b) Sei $F = \left(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty\right)$. Zeigen Sie: Zu $\eta \in]0,2[$ gibt es $x, y \in F$ mit $|x|_\infty = 1 < |y|_\infty$ und

$$\left| x - \frac{y}{|y|_\infty} \right|_\infty \geqslant \eta \cdot |x - y|_\infty \ .$$

(c) Seien $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum und $\xi, \eta \in \mathcal{H} \smallsetminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\left\| \frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \right\| \leqslant \frac{1}{\min\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right)} \cdot \|\xi - \eta\| \ .$$

Aufgabe 2 (Wann kommen Normen von Formen?) Es sei F ein normierter Raum. Zeigen Sie: Falls die Parallelogrammgleichung gilt, d.h.

$$\|\varphi - \psi\|^2 + \|\varphi + \psi\|^2 = 2\left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\right) \quad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in F \ ,$$

so ist F ein Prähilbertraum, d.h., es gibt genau eine positiv Hermitesche Sesquilinearform $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$, so dass

$$\|\varphi\|^2 = \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in F \ .$$

Hinweis: Überlegen Sie, mit welcher Formel sich $\mathfrak{s}$ durch $\|\cdot\|$ ausdrücken ließe, wenn F bereits ein Prähilbertraum wäre. Zeigen Sie zunächst Additivität in beiden Variablen.

Aufgabe 3 (Wie Formen nicht-ausgeartet werden.) Es sei F ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ eine positiv Hermitesche Sesquilinearform.

(a) Es sei $p(\varphi) = \mathfrak{s}(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ und $N = \{p = 0\}$. Zeigen Sie, dass N ein Untervektorraum von F ist.

(b) Sei $\mathcal{H} = F/N$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{s}$ auf $\mathcal{H}$ eine nicht-ausgeartete Sesquilinearform induziert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass p auf $\mathcal{H}$ eine Norm induziert.

Funktionalanalysis I

Blatt 2

Abgabe : Freitag, 7.11.2003

Aufgabe 1 (Die fastperiodischen Funktionen) Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $e_\lambda \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ mit

$$e_\lambda(x) := \exp(2\pi i\lambda x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

und $\mathcal{TP}$ sei der von den e_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, erzeugte Vektorraum der *trigonometrischen Polynome* .

(a) Zeigen Sie: Es gilt

$$\lim\nolimits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{e_\lambda} \cdot e_\mu = \delta_{\lambda\mu} \qquad \text{für alle} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; .$$

(b) Zeigen Sie: Durch

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi|\,\psi) := \lim\nolimits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{\varphi} \cdot \psi$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathcal{TP}$ definiert. Was kann man also von $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sagen ?

(c) Sei $\mathcal{FP}$ der Vektorraum der *fastperiodischen Funktionen*, d.h. der Abschluss von $\mathcal{TP}$ in $\mathcal{C}^b(\mathbb{R})$. Lässt sich das obige Skalarprodukt eindeutig stetig auf $\mathcal{FP}$ fortsetzen ? Führen Sie den Beweis so weit Sie können. Versuchen Sie, mit geeigneten Vermutungen zu schließen.

Hinweis : Parallelogrammgleichung.

Aufgabe 2 Im Prähilbertraum $\mathcal{C}([-1,1])$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi\,|\,\psi) = \int_{-1}^{1} \overline{\varphi} \cdot \psi \, d\lambda \qquad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}([-1,1])$$

seien

$$M := \{\varphi \in \mathcal{C}([-1,1]) \mid \varphi(x) = 0 \text{ für } x \geqslant 0\}$$

und

$$N := \{\varphi \in \mathcal{C}([-1,1]) \mid \varphi(x) = 0 \text{ für } x \leqslant 0\} \; .$$

Zeigen Sie, daß M und N , aber nicht $M + N$ in $\mathcal{C}([-1,1])$ abgeschlossen sind. Berechnen Sie $M^\perp$ und $M^{\perp\perp}$. Was fällt Ihnen auf in Bezug auf den Projektionssatz ?

Was passiert, wenn man $\mathcal{C}([-1,1])$ durch $\mathbf{L}^2([-1,1])$ ersetzt ?

Aufgabe 3 (Charakterisierung der orthogonalen Projektionen)

Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $P \in L(\mathcal{H})$ mit $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) P ist eine orthogonale Projektion, d.h. $P = P_{\mathcal{G}}$, wobei $\mathcal{G}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist.

(b) $(P\xi| \eta) = (\xi| P\eta)$ für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Man sagt P sei *selbst-adjungiert* .

(c) P ist stetig mit Norm $\|P\| \leqslant 1$.

(d) $P(\mathcal{H}) = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$.

In diesem Fall gilt $P = 0$ oder $\|P\| = 1$.

Funktionalanalysis I

Blatt 3

Abgabe : Freitag, 14.11.2003

Aufgabe 1 (Der Satz von Hahn-Banach im Hilbertraum) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $F \subset \mathcal{H}$ ein beliebiger Untervektorraum. Zeigen Sie: Für jede stetige Linearform $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$ existiert genau eine stetige Fortsetzung zur einer Linearform $\nu : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\nu|_{F^\perp} = 0$.

DEFINITION Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$. Die Funktion f heißt *lokal integrierbar* , falls

$$1_{[a,b]} \cdot f \in \mathbf{L}^1(J) \qquad \text{für alle} \quad a, b \in J \ , \ a < b \ .$$

Aufgabe 2 (Positivität lokal integrierbarer Funktionen) Sei J ein Intervall, $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und

$$F = \mathcal{T}_+(J) = \{\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}_+ \mid \varphi \text{ Treppenfunktion}\}$$

oder

$$F = \mathcal{K}_+(J) = \{\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}_+ \mid \varphi \text{ stetig, } \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt}\} \ .$$

Zeigen Sie: Falls

$$\int_J \varphi \cdot f \, d\lambda \geqslant 0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in F \ ,$$

so gilt $f \geqslant 0$ λ-fast überall.

Hinweis: Vergleichen Sie Analysis, 15.19.

Aufgabe 3 (Konstanz lokal integrierbarer Funktionen) Sei J ein offenes Intervall, $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ lokal integrierbar und

$$\mathcal{K}^{(1)}(J) = \mathcal{C}^{(1)}(J) \cap \mathcal{K}(J) = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}(J) \mid \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt}\right\} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\chi \in \mathcal{K}(J)$ mit

$$\mathcal{K}(J) = \partial \mathcal{K}^{(1)}(J) \oplus \mathbb{K} \cdot \chi \ .$$

(b) Falls

$$\int_J \partial\varphi \cdot f \, d\lambda = 0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J) \ ,$$

so ist f λ-fast überall konstant.

(c) Falls

$$\int_J \varphi \cdot f \, d\lambda = 0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J) \ ,$$

so ist $f = 0$ λ-fast überall.

Funktionalanalysis I

Blatt 4

Abgabe : Freitag, 21.11.2003

Aufgabe 1 (Unterräume von Hilberträumen)

(a) Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $M, N \subset \mathcal{H}$ Unterräume mit $M \perp N$. Zeigen Sie :

$$M + N \text{ ist abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad M, N \text{ sind abgeschlossen.}$$

(b) Seien

$$M := \left\{ \xi \in \ell^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \xi(2(k+1)) = \frac{1}{k+1} \xi(2k+1) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$N := \left\{ \eta \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \eta(2k) = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \right\} \ .$$

Zeigen Sie: M und N sind abgeschlossene Unterräume von $\ell^2(\mathbb{N})$, $M \cap N = \{0\}$ und

$$M + N \neq \overline{M + N} = \ell^2(\mathbb{N}) \ .$$

Aufgabe 2 (Zerlegung von $\mathcal{AC}^{(n)}$ durch Nebenbedingungen) Seien F, G, H Vektorräume und $D : F \longrightarrow G$, $B : F \longrightarrow H$ surjektive lineare Abbildungen.

(a) Eine *Retraktion* $R : G \longrightarrow F$ von D ist eine lineare Abbildung mit $D \circ R = \mathrm{Id}_G$. Beweisen Sie, dass

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus R(G) \ .$$

Geben Sie einen Vektorraum an, der wie G aussieht. (Was könnte eine kanonische Wahl von G sein?) Was kann man über $R(G)$ sagen?

(b) Wann ist die Summe $\operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$ direkt bzw. wann gilt $F = \operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$? Wann gilt

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Ker} B \ ?$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $B : F \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung. Beschreiben Sie B mittels Linearformen.

(d) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Definiere $\mathcal{AC}^{(n)}(J)$ und $\partial^n : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ induktiv durch

$$\mathcal{AC}^{(0)}(J) := \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \quad , \quad \mathcal{AC}^{(n+1)}(J) := \left\{ f \in \mathcal{AC}^{(n)}(J) \;\middle|\; \partial^n f \in \mathcal{AC}(J) \right\}$$

und

$$\partial^{n+1} f := \partial(\partial^n f) \ .$$

und $\mathcal{P}_{n-1}(J)$ der Vektorraum aller Polynome auf J mit Grad $\leqslant n-1$. Schreiben Sie $\mathcal{P}_{n-1}(J)$ als Kern und interpretieren Sie den Begriff 'Retraktion' unter in diesem Fall. (Was ist die Rolle von B ?)

(e) Geben Sie verschiedene lineare Abbildungen B an, um eine Zerlegung wie in (b) für $F = \mathcal{AC}^{(n)}(J)$ und $D = \partial^n$ zu erhalten. Warum sind Anfangsbedingungen für eine Zerlegung geeigneter als etwa Randwertbedingungen?

Hinweis: Fangen Sie mit den Fällen $n = 1$ und 2 an.

Aufgabe 3 (Gerade und ungerade Funktionen) Zu $\xi : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ sei

$$\check{\xi} : x \longmapsto \xi(-x) : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{K} ,$$

sowie

$$\mathbf{L}^2_g([-1,1]) := \left\{\xi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \mid \xi = \check{\xi}\right\}$$

der Raum der geraden und

$$\mathbf{L}^2_u([-1,1]) := \left\{\xi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \mid \xi = -\check{\xi}\right\}$$

der Raum der ungeraden $\mathbf{L}^2$-Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{L}^2([-1,1]) = \mathbf{L}^2_g([-1,1]) \overset{2}{\oplus} \mathbf{L}^2_u([-1,1])$.

(b) $\mathbf{L}^2([0,1])$ ist isometrisch isomorph zu $\mathbf{L}^2_g([-1,1])$, $\mathbf{L}^2_u([-1,1])$ und $\mathbf{L}^2([-1,1])$. Geben Sie möglichst "einfache" Isometrien an.

Funktionalanalysis I

Blatt 5

Abgabe : Freitag, 28.11.2003

Aufgabe 1 (Zerlegung von ∂^2)

(a) Die Systeme

$$\left(\sqrt{2}\cdot\sin\left(k\pi\cdot\right)\right)_{k\geqslant 1} \quad \text{und} \quad (1)\cup\left(\sqrt{2}\cdot\cos\left(k\pi\cdot\right)\right)_{k\geqslant 1}$$

bilden hilbertsche Basen von $\mathbf{L}^2\left([0,1]\right)$.

(b) Finden Sie alle Lösungen $f \in \mathcal{AC}^{(2)}\left([0,1]\right)$ des Randwertproblems

$$\partial^2 f + \lambda f = 0 \quad \text{und} \quad f\left(0\right) = f\left(1\right) = 0$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Wieso ist dies kein Widerspruch zu dem in Beispiel 1.8.1 aus der Vorlesung formulierten Eindeutigkeitssatz?

Was kann man für den Operator ∂^2 auf $\mathcal{AC}^{(2)}\left([0,1]\right)$ also sagen ?

Aufgabe 2 (Bernstein-Polynome) Für jede stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ definiert man das *n-te Bernstein-Polynom $B_n f \in \mathcal{P}_n\left([0,1]\right)$ von f* durch

$$B_n f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right)\cdot\binom{n}{k}\cdot x^k\left(1-x\right)^{n-k} \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1] \ .$$

(a) Zeigen Sie: Falls $f = 1$ oder $f = \mathrm{id}$, gilt $B_n f = f$.

(b) Berechnen Sie für $f = \mathrm{id}\left(1-\mathrm{id}\right)$ die Folge $B_n f$ und zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{gleichmäßig auf } [0,1] \ .$$

(c) Zeigen Sie die Ungleichung

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\cdot\binom{k}{n}\cdot x^k\left(1-x\right)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n} \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1] \ ,$$

indem Sie die Summe durch Bestimmung von $B_n f$ für ein geeignetes f ausrechnen.

Aufgabe 3 (Satz von Bernstein) Es sei $f \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$. Betrachten Sie zu $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta > 0$ die Mengen

$$A_n\left(\delta\right) = \left\{0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; \left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \delta\right\}$$

und

$$B_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; \left| x - \frac{k}{n} \right| > \delta \right\} \ .$$

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine von x unabhängige Zahl $C < \infty$, so dass für alle $\delta > 0$

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leqslant \frac{2C}{\delta^2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \quad \text{für alle} \quad k \in B_n(\delta) \ .$$

(b) Folgern Sie: Es gilt

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{gleichmäßig auf } [0,1] \ .$$

Hinweis: Aufgabe 2.

(c) Zeigen Sie: Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist $\mathcal{P}([a,b]) \subset \mathcal{C}([0,1])$ dicht.

Funktionalanalysis I

Blatt 6

Abgabe : Freitag, 5.12.2003

Aufgabe 1 (Injektivität von $\mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$) Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$, d.h., ein positives Radonintegral auf X, so dass

$$\int^* |\mathrm{id}|^k \, d\mu < \infty \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Zeigen Sie: Genau dann ist die lineare Abbildung

$$\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : p \longmapsto [p|_X]$$

nicht injektiv, wenn μ eine (endliche) Linearkombination von Punktmassen ist, d.h.

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \varepsilon_{x_k} \quad \text{mit} \quad c_k \in \mathbb{R}_+ \ , \ x_k \in X \ .$$

Hinweis: Betrachten Sie den Träger $\operatorname{supp}\mu$ des Maßes μ .

Aufgabe 2 (Der Grad von p in der Rodrigues-Formel) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\varrho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $p \in \mathcal{P}(J)$ ein Polynom. Seien Konstanten $(d_k) \subset \mathbb{R}_+^*$ gegeben und die Polynome $p_k \in \mathcal{P}_k(J)$ definiert durch die Rodrigues-Formel

$$p_k = \frac{1}{d_k \varrho} \partial^k \left(\varrho \cdot p^k\right) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

(a) Zeigen Sie die Gleichung $\deg\left(q \cdot \partial^2 q\right) = 2 \deg q - 2$ für $q \in \mathcal{P}$ mit $\deg q \geqslant 2$.

(b) Beweisen Sie, dass $\deg p \leqslant 2$ gilt.
Hinweis: Wenden Sie die Rodrigues-Formel für p_1 und p_2 an, um eine Gleichung für $p \cdot \partial^2 p$ zu finden, und unterscheiden Sie zwei Fälle.

Aufgabe 3 (Rodrigues-Formel und hypergeometrische Differentialgleichung) Es seien die gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe 2 gegeben. Man definiert

$$Lf = -\frac{1}{\varrho} \cdot \partial\left(\varrho \cdot p \cdot \partial f\right)$$

für alle zweimal differenzierbaren Funktionen $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$.

(a) Drücken Sie $-d_k \cdot \varrho \cdot Lp_k$ durch eine Kombination der Funktionen $\partial^j\left(\varrho \cdot p^k\right)$ für $j = k, k+1, k+2$ aus, indem Sie die Rodrigues-Formel für p_1 und die Produktregel in geeigneter Weise auf $\partial^{k+1}\left(\varrho \cdot p^k\right)$ anwenden.

(b) Zeigen Sie, dass p_k die k-te *hypergeometrische Differentialgleichung*

$$Lp_k = -k \cdot \left[d_1 \cdot \partial p_1 + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right] \cdot p_k$$

erfüllt.

Hinweis: Wenden Sie die Leibnizformel auf den Ausdruck $\partial^{k+1}\left(\varrho \cdot \partial\left(\varrho p^k\right)\right)$ auf zwei verschiedene Weisen an. Wie kann Ihnen Aufgabe 2 dabei helfen?

Funktionalanalysis I

Blatt 7

Abgabe : Freitag, 12.12.2003

Aufgabe 1 (Die Laguerre-Polynome bilden eine hilbertsche Basis) Sei $\alpha > 0$. Man betrachte $\varrho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ auf dem Intervall $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$.

(a) Zeigen Sie: Die Laguerre-Polynome $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ erfüllen

$$\left\|L_k^{(\alpha)}\right\|_{2,\varrho}^2 = \frac{(\alpha+k)!}{k!} \ ,$$

wobei

$$\beta! = \Gamma(\beta+1) = \int_0^\infty y^\beta \cdot e^{-y}\, dy \quad \text{für } \beta > -1 \ .$$

(b) Sei $\widetilde{L}_k^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{k!}{(\alpha+k)!}} \cdot L_k^{(\alpha)}$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit

$$e^{-n\cdot\mathrm{id}} = \sum_{k=0}^\infty c_k \cdot \widetilde{L}_k^{(\alpha)} \qquad \text{in } \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \varrho\right) \ .$$

Hinweis: Wenden Sie Hauptsatz 1.9 an. Es gilt

$$(1+x)^\beta = \sum_{k=0}^\infty \binom{\beta}{k} \cdot x^k \quad \text{für } x \in]-1,1[\text{ und } \beta \in \mathbb{R}$$

und

$$\binom{\beta+k}{k} = \frac{(\beta+k)!}{\beta! \cdot k!} \quad \text{für } \beta > -1 \ , \ k \in \mathbb{N} \ , \quad \text{wobei} \quad \binom{\beta}{k} = \prod_{l=1}^k \frac{\beta - l + 1}{l} \ .$$

Man zeige auch die Formel

$$\binom{\beta+k}{k} = (-1)^k \cdot \binom{-\beta-1}{k} \quad \text{für } \beta \in \mathbb{R} \ , \ k \in \mathbb{N} \ .$$

(c) Zeigen Sie: Die $\widetilde{L}_k^{(\alpha)}$ bilden eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \varrho\right)$.
Hinweis: Finden Sie eine geeignete Isometrie

$$\mathbf{L}^2\left(]0,1[\,, (-\ln)^\alpha\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \varrho\right)$$

und eine totale Folge in $\mathbf{L}^2\left(]0,1[\,, (-\ln)^\alpha\right)$.

Aufgabe 2 (Die Hermite-Polynome bilden eine hilbertsche Basis) Man betrachte den Hilbertraum $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$. Man definiert wie üblich die Unterräume $\mathbf{L}^2_g\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ der geraden und $\mathbf{L}^2_u\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ der ungeraden Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) = \mathbf{L}^2_g\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) \overset{2}{\oplus} \mathbf{L}^2_u\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) .$$

(b) Die Abbildung

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \mathrm{id}^2 : \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^*_+, \mathrm{id}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2_g\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

(c) Die Abbildung

$$\psi \longmapsto \mathrm{id} \cdot \psi \circ \mathrm{id}^2 : \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^*_+, \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2_u\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

(d) $\left(\widetilde{L}_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2\right)_{k\in\mathbb{N}} \cup \left(\mathrm{id} \cdot \widetilde{L}_k^{\left(\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$.

(e) Die Hermite-Polynome $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilden ein totales System von orthogonalen Polynomen in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$.

(f) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$H_{2k} = (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot k! \cdot L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2$$

und

$$H_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot k! \cdot \mathrm{id} \cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2 .$$

Aufgabe 3 ($\mathbf{L}^2(\mu)$-Zugehörigkeit) Sei μ ein moderates Radonintegral auf X , $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ eine μ-messbare Funktion und $G \subset \mathbf{L}^2(\mu)$ ein dichter Unterraum. Zeigen Sie:

(a) Falls $f \geqslant 0$ ist, gibt es eine Folge (f_k) von beschränkten, μ-quadratintegrierbaren Funktionen f_k mit $f = \sup_k f_k$.

(b) Die Einheitskugel von G ist in der Einheitskugel von $\mathbf{L}^2(\mu)$ dicht.

(c) Falls

$$\sup_{\varphi\in G,\, \|\varphi\|_2 \leqslant 1} \int^* |\varphi \cdot f| \, d\mu < \infty ,$$

so gilt $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$.

Hinweis: Wenden Sie den Satz aus der Vorlesung auf den dichten Unterraum $F = \mathbf{L}^2(\mu)$ an.

Funktionalanalysis I

Blatt 8

Abgabe : Freitag, 16.1.2004

Aufgabe 1 (Abschluss von Produkten und Inneres abgeschlossener Kugeln)

(a) Es seien E und F lokal-konvexe Räume und $A \subset E$, $B \subset F$. Zeigen Sie

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B} \ .$$

(b) Es sei F lokal-konvex, $\varphi \in F$, P eine endliche Menge stetiger Halbnormen und $r_P = (r_p)$, $r_p > 0$, $p \in P$. Zeigen Sie:

$$B_P(\varphi, r_P)^\circ = D_P(\varphi, r_P) \qquad \text{und} \qquad \overline{D_P(\varphi, r_P)} = B_P(\varphi, r_P) \ ,$$

so dass $B_P(\varphi, r_P)$ der Abschluss seines Inneren ist.

Aufgabe 2 (Infimum einer Familie sublinearer Funktionale) Sei F ein Vektorraum und (q_j) eine Familie sublinearer Funktionale auf F . Man definiert wie in der Vorlesung

$$\bigwedge_{j \in J} q_j(\varphi) = \inf_{\substack{(\varphi_j) \in F^{(J)} \\ \Sigma_j \varphi_j = \varphi}} \sum_{j \in J} q_j(\varphi_j) \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

Zeigen Sie: Falls $\bigwedge_j q_j > -\infty$ auf F , so ist dies ein sublineares Funktional.

Aufgabe 3 (Identität der Schwartz-Räume $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man betrachte die Schwartzräume

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \mid p_k(\varphi) < \infty\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \mid q_k(\varphi) < \infty\right\} \ ,$$

wobei

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \quad , \quad q_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \partial^\alpha \varphi \right\|_2$$

und $\langle \mathrm{id} \rangle = 1 + |\mathrm{id}|^2$. Zeigen Sie:

(a) Falls $s > \frac{n}{4}$, ist $\langle \mathrm{id} \rangle^{-s} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Hinweis: Trafo-Formel.

(b) Für $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ und $s > \frac{n}{4}$ gilt

$$q_k(\varphi) \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-s} \right\|_2 \cdot p_{k+\lceil s \rceil}(\varphi) \ ,$$

wobei $\lceil s \rceil = \min\{k \mid k \geqslant s\}$ die obere Gaußklammer bezeichnet.

(c) Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $0 < C < \infty$, so dass für alle $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$p_k(\varphi) \leqslant C \cdot q_{k+n}(\varphi) \ .$$

Hinweis: Wenden Sie die Abschätzung

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|\partial^{(1)} f\right\|_1 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad \partial^\beta f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } \beta \leqslant (1) \ ,$$

wobei $(1) = (1, \ldots, 1)$, sowie die Leibnizformel an.

(d) Folgern Sie: Es gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ und die Systeme von Halbnormen (p_k) und (q_k) erzeugen die gleiche lokal-konvexe Topologie.

Aufgabe 4 (Lösen unter Nebenbedingungen, Teil I) Man erinnere sich der allgemeinen Überlegungen von Blatt 4, Aufgabe 2.

(a) Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$D_\lambda f := \partial f - \lambda f = g$$

für $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ mit Nebenbedingungen $Bf = 0$ im Raum $\mathcal{AC}(J)$. Bestimmen Sie, wann

$$\mathcal{AC}(J) = \operatorname{Ker} D_\lambda \oplus \operatorname{Ker} B \ .$$

(b) Bestimmen Sie die Retraktion R von D mit $R(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)) = \operatorname{Ker} B$ in Form eines Integraloperators

$$g \longmapsto \int_J \kappa(\diamond, y)\, g(y)\, dy$$

für die folgenden Nebenbedingungen $Bf = 0$, wobei $\tau_0, \tau_1 \in J$:

(i) $f(\tau_0) = 0$, d.h. $B = \varepsilon_{\tau_0} : \mathcal{AC}(J) \longrightarrow \mathbb{K} : f \longmapsto f(\tau_0)$, bzw.
(ii) $f(\tau_0) = f(\tau_1)$, d.h. $B = \varepsilon_{\tau_1} - \varepsilon_{\tau_0} : \mathcal{AC}(J) \longrightarrow \mathbb{K}$, wobei $\lambda(\tau_1 - \tau_0) \notin 2\pi i \mathbb{Z}$.

(c) Seien F, G, H Vektorräume und $D : F \longrightarrow G$, $B, C : F \longrightarrow H$ surjektiv und linear, so dass

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Ker} B \quad \text{und} \quad F = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Ker} C \ .$$

Sei ferner R die Retraktion von D mit $R(G) = \operatorname{Ker} B$ und S diejenige mit $S(G) = \operatorname{Ker} C$. Man setze R als bekannt voraus. Konstruieren Sie S aus der gegebenen Retraktion R .

(d) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung aus (a) für alle $g \in \mathbf{L}^1_{loc}(J)$ unter der Nebenbedingung $\int_{\tau_0}^{\tau_1} f = 0$.

Funktionalanalysis I

Blatt 9

Abgabe : Freitag, 23.1.2004

Aufgabe 1 (Metrisierbarkeit lokal konvexer Räume) Sei F ein lokal konvexer Hausdorffraum, dessen Topologie von einem abzählbaren System $\mathcal{P} = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen erzeugt wird. Es sei $d : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$d(\varphi, \psi) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \cdot \min(p_k(\varphi - \psi), 1) \ .$$

Zeigen Sie:

(a) d ist eine Metrik auf F , die translationsinvariant ist, d.h.

$$d\left(\varphi + \chi, \psi + \chi\right) = d\left(\varphi, \psi\right) \qquad \text{für alle} \quad \varphi, \psi, \chi \in F \ .$$

(b) d erzeugt die Topologie von F .

(c) Ist der lokal konvexe Hausdorffraum G metrisierbar (d.h., die Topologie wird von einer translationsinvarianten Metrik δ erzeugt), so gibt es ein abzählbares System von Halbnormen, das die Topologie erzeugt.

(d) Genau dann ist F folgenvollständig, wenn (F, d) ein vollständiger metrischer Raum ist

Aufgabe 2 (Folgenvollständigkeit und absolute Konvergenz von Reihen) Sei F ein lokal konvexer Hausdorffraum, dessen Topologie von einem abzählbaren System von Halbnormen erzeugt wird. Zeigen Sie, dass F genau dann folgenvollständig ist, wenn das Weierstrass-Kriterium gilt, d.h., falls jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Hinweis: Für eine Implikation zeige man, dass zu jeder Cauchy-Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $\left(\varphi_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\varphi_{\alpha(l+1)} - \varphi_{\alpha(l)}\right)$$

absolut konvergiert. (Trick aus dem Beweis des Satzes von Riesz-Fischer.)

Aufgabe 3 (Die nirgends differenzierbaren Funktionen sind dicht) Zeigen Sie, dass die Menge der stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen auf $[0, 1]$ dicht in $\mathcal{C}([0, 1])$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$A_k := \left\{ f \in \mathcal{C}\left([0,1]\right) \;\middle|\; \exists t \in [0,1] \text{ mit } \sup_{s\in[0,1]\smallsetminus\{t\}} \left|\frac{f(s) - f(t)}{s-t}\right| \leqslant k \right\}$$

und überprüfen Sie die Voraussetzungen des Satzes von Baire. Betrachten Sie dazu die Funktion

$$h = g + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin(\pi m \cdot \mathrm{id})$$

für $m > 0$ und $g \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ geeignet. Können Sie die Menge $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \complement A_k$ beschreiben ?

Funktionalanalysis I

Blatt 10

Abgabe : Freitag, 30.1.2004

Aufgabe 1 (Hyperebenen und die Stetigkeit von Linearformen) Sei F ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Untervektorraum $H \subsetneq F$ sei eine Hyperebene, d.h. $F = H + \mathbb{K} \cdot \varphi$ für ein $\varphi \in F$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\varphi \in F \setminus H$ gilt $F = H \oplus \mathbb{K} \cdot \varphi$.

(b) Ist F lokal konvex und Hausdorffsch, so ist $\overline{H} \in \{H, F\}$, d.h., H ist abgeschlossen oder dicht .

(c) Für jede Linearform $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$, und jedes $\varphi \in F$ mit $\mu(\varphi) = 1$ gilt

$$F = \operatorname{Ker} \mu \oplus \mathbb{K} \cdot \varphi \ .$$

Weiterhin ist μ genau dann stetig, wenn $\operatorname{Ker} \mu$ abgeschlossen ist.

(d) Für jedes $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\psi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} \psi \, d\lambda = 0 \qquad \text{und} \qquad \|\varphi - \psi\|_\infty \leqslant \varepsilon \ .$$

Was bedeutet dies ?

Aufgabe 2 (Ein folgenvollständiger, nicht tonnelierter Raum) Sei X ein diskreter metrischer Raum. Für eine Funktion $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ und $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ sei

$$\|\varphi\|_{\infty,\rho} := \|\rho \cdot \varphi\|_\infty \ .$$

Zeigen Sie: Der lokal-konvexe Raum $\left(\mathcal{K}(X), \left(\|\cdot\|_{\infty,\varrho}\right)_{\varrho \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^X}\right)$ ist

(a) folgenvollständig, aber

(b) nicht tonneliert, wenn X überabzählbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Halbnorm

$$\|\cdot\|_1 : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} |\varphi(x)| : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

Argumentieren Sie durch Widerspruch und betrachten Sie die Funktion 1_K für eine geeignete endliche Menge $K \subset X$.

Aufgabe 3 (Tensorprodukt von Hilberträumen) Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume.

(a) Zeigen Sie: Durch

$$(\xi \otimes \zeta | \chi \otimes \eta)_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{G}} = (\xi | \chi)_{\mathcal{H}} \cdot (\chi | \eta)_{\mathcal{G}} \qquad \text{für alle} \quad \xi, \chi \in \mathcal{H} \ , \ \eta, \zeta \in \mathcal{G}$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}\otimes\mathcal{G}$ wohldefiniert. Den zugehörigen Prähilbertraum bezeichnet man mit $\mathcal{H} \otimes_2 \mathcal{G}$.

Hinweis: Um zu sehen, dass das Produkt definit ist, benutzen Sie Orthogonalität.

(b) Seien μ und ν positive Radonintegrale auf lokal-kompakten Räumen X und Y . Zeigen Sie: Es gibt eine kanonische lineare Injektion

$$\mathbf{L}^2(\mu) \otimes \mathbf{L}^2(\nu) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu) \ ,$$

die eine surjektive Isometrie

$$\mathbf{L}^2(\mu) \ \widehat{\otimes_2} \ \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$$

induziert. Dabei bezeichne $\mathcal{H} \ \widehat{\otimes_2} \ \mathcal{G}$ die Vervollständigung des Prähilbertraums $\mathcal{H} \otimes_2 \mathcal{G}$.

Funktionalanalysis I

Blatt 11

Abgabe : Freitag, 6.2.2004

Aufgabe 1 (Der Dualraum von ℓ^p) Seien $p, q \in \left]1, \infty\right[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und X eine Menge. Zeigen Sie:

(a) Sei $\psi \in \ell^q(X)$. Für alle $\varphi \in \ell^p(X)$ ist $\varphi \cdot \psi \in \ell^1(X)$ und die Abbildung

$$\mu_\psi : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot \psi(x) : \ell^p(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist eine stetige Linearform.

(b) Die Abbildung

$$T : \psi \longmapsto \mu_\psi : \ell^q(X) \longrightarrow \ell^p(X)'_\beta := \mathcal{L}(\ell^p(X), \mathbb{K})$$

ist eine Isometrie.

(c) T ist surjektiv.

Aufgabe 2 (Zugehörigkeit zu ℓ^q durch Dualität) Seien $p, q \in \left]1, \infty\right[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und X eine Menge. Zeigen Sie : Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion mit

$$\varphi \cdot f \in \ell^1(X) \quad \text{für alle } \varphi \in \ell^p(X) \ ,$$

so ist $f \in \ell^q(X)$.

Hinweis : Benutzen Sie den Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit und beachten Sie, dass man $f \geqslant 0$ annehmen kann.

Aufgabe 3 (Die Norm eines Integraloperators)

(a) Seien X und Y metrische Räume, $\varkappa : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ ein Kern, und ν ein Radon-Integral auf Y . Zeigen Sie, dass unter den Annahmen (a)-(d) aus der Vorlesung gilt

$$\|K\| = M.$$

Hinweise: Konstruieren Sie zu $x \in X$ eine Folge $(A_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von ν-integrierbaren Mengen mit

$$\int |\varkappa(x, y)| \, d\nu(y) = \lim_l \int_{A_l} |\varkappa(x, y)| \, d\nu(y) \ .$$

Unter Verwendung der Dichtheit von $\mathcal{K}(Y)$ in $\mathbf{L}^1(\nu)$ und des Satzes von Riesz- Fischer konstruiere man zu $x \in X$ und jeder ν-integrierbaren Menge $A \subset Y$ eine Folge $(\psi_k) \subset \mathcal{K}(Y)$ mit $|\psi_k| \leqslant 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\int_A |\varkappa(x,y)| \, d\nu(y) = \lim\nolimits_k \left| \int \varkappa(x,y) \cdot \psi_k(y) \, d\nu(y) \right| .$$

(b) Sei $|f\rangle\langle g|$ ein Kern mit $f \in \mathcal{C}^b(X)$ und $g \in \mathbf{L}^1(\nu)$ und $K : \mathcal{C}^b(Y) \longrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ der zugehörige Integraloperator. Berechnen Sie $\|K\|$.

(c) Seien $n, m \in \mathbb{N} \setminus 0$, $X = Y = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\nu = \#$ das Zähl-Integral auf X , $(f_j)_{j=1,\ldots,m}, (g_j)_{j=1,\ldots,m} \subset \mathbb{K}^X$ und

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle\langle g_j| : X \times X \longrightarrow \mathbb{K} .$$

Berechnen Sie die Norm des zugehörigen Integraloperators $K : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Funktionalanalysis I

Blatt 12

Abgabe : Freitag, 13.2.2004

Aufgabe 1 (Die Dualräume von c^0 und ℓ^1) Sei X eine Menge. Zeigen Sie:

(a) Der starke Dualraum von $c^0(X)$ ist $c^0(X)'_\beta = \ell^1(X)$.

(b) Der starke Dualraum von $\ell^1(X)$ ist $\ell^1(X)'_\beta = \ell^\infty(X)$. Insbesondere ist $c^0(X)$ nicht reflexiv.

(c) Charakterisieren Sie die $\mu \in c^0(X)'_\beta$, deren Norm kein Maximum ist, d.h. für die für alle $\varphi \in c^0(X)$ mit $\|\varphi\| \leqslant 1$ gilt

$$\|\mu\| > |\langle \varphi | \mu \rangle| \; .$$

Aufgabe 2 (Die schwache Topologie und das induktive Tensorprodukt) Seien F, G lokal konvexe Räume. Zeigen Sie, dass

$$|F_\sigma\rangle_i \langle G_\sigma|_\sigma = |F\rangle_i \langle G|_\sigma \; .$$

Wie verhalten sich die lokal konvexen Räume $|F\rangle_i \langle G|$, $|F_\sigma\rangle_i \langle G_\sigma|$ und $|F\rangle_i \langle G|_\sigma$ zueinander ?

Aufgabe 3 (Existenz von Linearformen mit Nebenbedingungen)
Sei F ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, p eine Sublinearform auf F und es seien Familien $(\varphi_j)_{j \in J} \subset F$, $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie :

(a) Genau dann existiert eine Linearform μ auf F mit $\mu \leqslant p$ und $\mu(\varphi_j) \leqslant \alpha_j$ für alle $j \in J$, wenn

$$p\left(-\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) \geqslant -\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \alpha_j$$

für alle endlichen Teilmengen $K \subset J$ und alle $(\beta_j)_{j \in K} \subset \mathbb{R}_+$.

Hinweis : Man betrachte ein Funktional, das in geeigneter Weise mit $\wedge$ konstruiert ist.

(b) Unter genau welcher Bedingung gibt es eine $\mathbb{R}$-Linearform μ auf F mit

$$\mu \leqslant p \quad \text{und} \quad \mu(\varphi_j) = \alpha_j \qquad \text{für alle} \quad j \in J \; ?$$

(c) Wie lässt sich (b) auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ausdehnen ?

Funktionalanalysis I

Blatt 13

Abgabe : Freitag, 20.2.2004

Aufgabe 1 (Der Dualraum eines Durchschnitts) Seien F und G lokal konvexe Hausdorffräume. Auf $F \cap G$ wird durch die Halbnormen

$$p + q := p_{|F \cap G} + q_{|F \cap G} \quad , \quad p, q \text{ stetige Halbnormen auf } F, G \ ,$$

eine lokal konvexe Topologie erzeugt. Zeigen Sie: Ist $F \cap G$ in F und in G dicht, so gilt

$$(F \cap G)^{\dagger} = F^{\dagger} + G^{\dagger} \ .$$

Überlegen Sie zunächst, wie diese Identität zu interpretieren ist. Beweisen Sie die Aussage von Beispiel 3.6.3.

Aufgabe 2 (Lösen unter Nebenbedingungen, Teil II) Sei F ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mu_j \in F^{\circledast}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, linear unabhängig. Man definiere

$$B_k = (\mu_1, ..., \mu_k)^{\intercal} : F \longrightarrow \mathbb{K}^k \qquad \text{für alle} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \ .$$

(a) Geben Sie eine Formel für $\operatorname{Ker} B_k$ an. Ist B_k surjektiv ?

(b) Seien Untervektorräume $H_{k-1} \subset \operatorname{Ker} \mu_k$ gegeben mit

$$H_0 = 0 \subset H_k \subset H_{k+1} \quad \text{und} \quad F = H_k \oplus \operatorname{Ker} B_k \ .$$

Verschärfen Sie Lemma 3.4, indem Sie zeigen, dass $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ eindeutig bestimmt ist durch

$$\varphi_j \in H_j \quad \text{und} \quad \left\langle \varphi_j \middle| \mu_k \right\rangle_F = \delta_{jk} \qquad \text{für alle} \quad 1 \leqslant j, k \leqslant n \ .$$

(c) Sei nun $F = \mathcal{AC}^{(n)}(J)$, $\tau \in J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bestimmen Sie $\left(\varphi_j\right)_{j=0,\ldots,n-1}$ zu

$$\mu_j = \varepsilon_\tau \circ \partial^j : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit } j = 0, \ldots, n-1 \ .$$

Zerlegen Sie $\mathcal{AC}^{(n)}(J)$ bzgl. der B_k . Bestimmen Sie dabei H_k . Geben Sie die Retraktion $R : \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(J) \longrightarrow \operatorname{Ker} B_{n-1}$ zu ∂^n an.

Aufgabe 3 (Die Sphäre ist schwach dicht in der Kugel) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit hilbertscher Basis $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_k \epsilon_k = 0$ in $\mathcal{H}_\sigma$ (also schwach).

(b) Sei $\mathbb{S} = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \|\xi\| = 1\}$. Zeigen Sie, dass zu $\eta \in \mathcal{H}$, $\|\eta\| \leqslant 1$, eine Folge $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}$ existiert mit $\lim_k \eta_k = \eta$ (schwach).

Funktionalanalysis I

Blatt 14

Abgabe : Nach den Ferien

Aufgabe 1 (Der Satz von Lax-Milgram)

(a) Seien F, G normiert, $T \in L(F,G)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|T\varphi\| \geqslant \varepsilon \cdot \|\varphi\| \quad \text{für alle } \varphi \in F \ .$$

(ii) T ist injektiv und $\overset{-1}{T} : T(F) \longrightarrow F$ ist stetig.

(b) Ist F vollständig, T stetig und sind die äquivalenten Bedingungen aus (a) erfüllt, so ist $T(F)$ vollständig.

(c) Ist T ein Isomorphismus, so ist F genau dann vollständig, wenn G vollständig ist.

(d) Sei $\mathcal{H}$ nun ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie: Das Bild von T ist genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn T^* injektiv ist.

(e) Zeigen Sie: Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

(i) T ist invertierbar.
(ii) T^* ist invertierbar.
(iii) T^* ist injektiv, und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|T\xi\| \geqslant \varepsilon \cdot \|\xi\| \quad \text{für alle } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

Aufgabe 2 ($\mathbf{L}^2$-Abschätzungen mit der Ableitung)

(a) Für $f \in \mathcal{AC}([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$ ist

$$\|f\|_2 \leqslant \frac{1}{\pi} \|\partial f\|_2 \ .$$

Für welche f hat man Gleichheit?

Hinweis: Benutzen Sie die hilbertschen Basen von Blatt 5, Aufgabe 1 (a).

(b) Zeigen Sie für $g \in \mathcal{AC}([0,1])$ mit $g(0) = 0$ und $\partial g \in \mathbf{L}^2([0,1])$, dass

$$\|g\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \|\partial g\|_2 \ .$$

Welche ist die Verbindung dieser Ungleichung zum Hilbert-Schmidt-Integraloperator zur Kernfunktion

$$\varkappa : (x,y) \longmapsto 1_{[0,x]}(y) : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ ?$$

Hinweis: Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

(c) Ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ die kleinstmögliche Konstante in (b)? Bestimmen Sie das Supremum des Funktionals

$$g \longmapsto \frac{\|g\|_2^2}{\|\partial g\|_2^2}$$

auf der Kurve von Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \left\{ g \in \mathcal{AC}([0,1]) \;\middle|\; g(0) = 0 \;,\; \partial g \in \mathbf{L}^2\left([0,1]\right) \right\} : \alpha \longmapsto \sin\left(\alpha \diamond\right) \;.$$

Was kann man daraus folgern? Wie sollte man vorgehen, um in diesem Sinne zu schließen ?

(d) Benutzen Sie (a), um die kleinste Konstante in (b) zu finden.

Aufgabe 3 (Satz von Hellinger-Toeplitz) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in L(\mathcal{H})$, so dass

$$(T\xi|\, \eta) = (\xi|\, T\eta) \qquad \text{für alle} \quad \xi, \eta \in \mathcal{H} \;.$$

Der Satz von Hellinger-Toeplitz besagt, dass $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(a) Beweisen Sie den Satz mit Hilfe des Theorems vom abgeschlossenen Graphen.

(b) Beweisen Sie den Satz mit Hilfe des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit.