Chapitre 6

ALGÈBRES DE BANACH

ET

SPECTRES

Version du 5 juillet 2004

6.1 Algèbres normées

DEFINITION 1 Si F est un espace vectoriel, respectivement un espace localement convexe, on pose

$$L(F) := L(F, F) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(F) := \mathcal{L}(F, F) \ .$$

Si F est un espace normé, soit $\mathcal{L}(F)$ l'espace (normé) des opérateurs bornés dans F .

Rappelons que, pour $T \in L(F)$, on a $\|T\| := \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \|T\varphi\|$ et que $T \in \mathcal{L}(F)$ si, et seulement si, $\|T\| < \infty$ (cf. définition 3.2.1)..

PROPOSITION *Soit F un espace normé. Pour tout $S, T \in \mathcal{L}(F)$, on a*

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \ .$$

C'est immédiat (cf. 3.2). ——— □

DEFINITION 2 On dit qu'une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ ,$$

est une *algèbre normée* . On dit que c'est une *algèbre de Banach* si elle est complète et *unifère* si elle possède une unité e telle que $\|e\| = 1$.

EXEMPLE 1 Si F est un espace normé, alors $\mathcal{L}(F)$ est une algèbre normée unifère. C'est une algèbre de Banach si F est un espace de Banach.

Cela découle de la proposition ci-dessus et de la proposition 3.2. ——— □

EXEMPLE 2 Soit X un ensemble. Muni de la multiplication ponctuelle l'espace $\ell^\infty(X)$ est une algèbre de Banach unifère. Si X est un espace topologique, alors $\mathcal{C}^b(X)$ et $\mathcal{C}^0(X)$ sont aussi des (sous-) algèbre de Banach. $\mathcal{C}^b(X)$ est unifère ; il en est de même de $\mathcal{C}^0(X)$ si, et seulement si, X est compact.

EXEMPLE 3 Nous avons vu en 4.12, exercice 2, que $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution. Elle n'est pas unifère.

EXERCICE On peut montrer que $\ell^1(\mathbb{Z})$, muni du produit de convolution défini pour tout $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par

$$f * g(k) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(k-l) \cdot g(l) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

est une algèbre de Banach unifère.

6.2 Inversibilité dans une algèbre de Banach

Etant donné un opérateur borné T dans un espace de Banach F , nous allons essayer de résoudre une équation du type

$$(\mathrm{Id} - T)\,\varphi = \psi \ ,$$

$\psi \in F$ étant donné. On peut la mettre sous la forme

$$T\varphi + \psi = \varphi \ ,$$

ce qui montre que $\varphi \in F$ est solution de cette équation si, et seulement si, φ est un point fixe de l'application

$$\Phi : \varphi \longmapsto T\varphi + \psi \ .$$

Si l'on essaye d'utiliser la méthode des approximations successives définie par $\varphi_0 := \psi$ et $\varphi_{k+1} := \Phi\varphi_k = T\varphi_k + \psi$, on voit immédiatement par récurrence que

$$\varphi_k = \sum_{l=0}^{k} T^l \psi \ .$$

Cela revient à considérer la série géométrique

$$\sum_{l=0}^{\infty} T^l$$

dans $\mathcal{L}(F)$, dite *série de Neumann* .

LEMME *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée et $a \in \mathcal{A}$. La suite $\left(\left\| a^k \right\|^{\frac{1}{k}} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf_{k \in \mathbb{N}^*} \left\| a^k \right\|^{\frac{1}{k}}$.*

Si a est *nilpotent* , i.e. $a^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, le lemme est évident. Nous pouvons donc supposer que $\left\| a^k \right\| > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'entier $m \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $p(k), q(k) \in \mathbb{N}$ univoquement déterminés tels que

$$k = p(k) \cdot m + q(k) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant q(k) < m \ .$$

Il vient alors

$$\left\| a^k \right\| \leqslant \left\| a^m \right\|^{p(k)} \cdot \left\| a \right\|^{q(k)} \ ,$$

donc

$$\left\| a^k \right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\| a^m \right\|^{\frac{p(k)}{k}} \cdot \left\| a \right\|^{\frac{q(k)}{k}} \ .$$

Ainsi

$$\limsup_k \left\| a^k \right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\| a^m \right\|^{\frac{1}{m}} \ ,$$

puisque

$$\lim_k \frac{q(k)}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_k \frac{p(k)}{k} = \lim_k \left(\frac{1}{m} - \frac{q(k)}{m \cdot k} \right) = \frac{1}{m} \ .$$

On en déduit

$$\limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \inf_m \|a^m\|^{\frac{1}{m}} \leqslant \liminf_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \ ,$$

d'où le résultat. □

DEFINITION Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on dit que $\rho(a) := \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ est le *rayon spectral de* a . On dit que a est *quasi-nilpotent* si $\rho(a) = 0$.

On a toujours

$$\rho(a) \leqslant \|a\| \ .$$

THEOREME *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $a \in \mathcal{A}$. Si $\rho(a) < 1$, alors la série de Neumann $\sum_{l=1}^{\infty} a^l$ est absolument convergente, donc convergente.*

Si $\mathcal{A}$ est unifère, alors $\sum_{l=0}^{\infty} a^l$ est l'inverse de $e - a$ dans $\mathcal{A}$ et on a

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left\|a^l\right\| \ .$$

Si $\|a\| < 1$, alors

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|a\|} \ .$$

La première partie découle immédiatement du critère de la racine et du critère de Weierstraß (théorème 2.5.ii).

Quant à la seconde, on a

$$(e-a) \cdot \sum_{l=0}^{k} a^l = \left(\sum_{l=0}^{k} a^l\right) \cdot (e-a) = e - a^{k+1}$$

et $\lim_k \left\|a^k\right\| = 0$, puisque la série $\sum_{l=0}^{\infty} a^l$ est absolument convergente, donc $\lim_k a^k = 0$. Finalement on a

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{l=0}^{\infty} a^l\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left\|a^l\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \|a\|^l = \frac{1}{1 - \|a\|} \ ,$$

si $\|a\| < 1$. □

REMARQUE Nous avons remarqué que la condition $\rho(a) < 1$ entraîne $\lim_k \left\|a^k\right\| = 0$. Dire que a est quasi-nilpotent est une condition évidemment plus forte, puisqu'on a

$$\rho(a) = \lim_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} = 0 \ .$$

Voici un exemple d'un tel opérateur.

EXEMPLE (Opérateur intégral de Volterra) Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varkappa$ une fonction continue définie sur le triangle fermé inférieur

$$D := \left\{ (x,y) \in [a,b]^2 \ \middle|\ y \leqslant x \right\} \ .$$

En prolongeant $\varkappa$ par 0 sur $[a,b]^2$, nous savons que ce noyau satisfait aux conditions (a)-(d) de 3.3, cas général (cf. exercice 3.3.2), donc défini un opérateur borné K dans $\mathcal{C}([a,b])$. Il est quasi-nilpotent.

Montrons par récurrence que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$, $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, on a

$$\left|K^k\varphi(x)\right| \leqslant \|\varkappa\|_\infty^k \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{(x-a)^k}{k!} \ .$$

Cette inégalité est évidente pour $k = 0$ et on a

$$\left|K^{k+1}\varphi(x)\right| = \left|\int_a^x \varkappa(x,y) \cdot K^k\varphi(y)\ dy\right| \leqslant \|\varkappa\|_\infty^{k+1} \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \int_a^x \frac{(y-a)^k}{k!}\ dy =$$

$$= \|\varkappa\|_\infty^{k+1} \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi

$$\left\|K^k\right\| \leqslant \frac{1}{k!} \cdot \|\varkappa\|_\infty^k \cdot (b-a)^k \ ,$$

et par suite

$$\rho(K) = \inf_k \left\|K^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf_k \frac{\|\varkappa\|_\infty \cdot (b-a)}{(k!)^{\frac{1}{k}}} = 0 \ .$$

Ceci montre que K est quasi-nilpotent. $\square$

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}([a,b])$, l'équation

$$\varphi(x) = \int_a^x \varkappa(x,y) \cdot \varphi(y)\ dy + \psi(x) \quad \text{pour } x \in [a,b]$$

s'appelle l'*équation intégrale de Volterra* .

Le théorème montre donc que cette équation possède une unique solution φ donnée par la formule

$$\varphi = (\mathrm{Id} - K)^{-1}\psi = \left(\sum_{l=0}^{\infty} K^l\right)\psi = \sum_{l=0}^{\infty} K^l\psi \ ;$$

la dernière série converge dans $\mathcal{C}([a,b])$, c'est-à-dire uniformément sur $[a,b]$.

Comme $(\mathrm{Id} - K)^{-1}$ est un opérateur borné, la solution φ dépend continûment de ψ .

6.3 Le spectre dans une algèbre de Banach unifère

PROPOSITION *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère. Le groupe $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est ouvert et l'application*

$$a \longmapsto a^{-1} : \mathbb{G}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

est continue.

Soit $b \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a alors

$$a = b - (b - a) = b\left[e - b^{-1}(b - a)\right] .$$

Si $\|a - b\| < \frac{1}{\|b^{-1}\|}$, alors $e - b^{-1}(b - a) \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ par le théorème 6.2, donc $a \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ et on a

$$a^{-1} = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\left[b^{-1}(b - a)\right]^l\right) b^{-1} = b^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty}\left[b^{-1}(b - a)\right]^l b^{-1} .$$

Ceci montre que la boule ouverte de centre b et de rayon $\frac{1}{\|b^{-1}\|}$ est contenue dans $\mathbb{G}(\mathcal{A})$. Cet ensemble est donc ouvert et on a

$$\left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| \leqslant \left\|\sum_{l=1}^{\infty}\left[b^{-1}(b - a)\right]^l b^{-1}\right\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\left\|b^{-1}\right\|^{l+1} \cdot \|b - a\|^l = \frac{\left\|b^{-1}\right\|^2 \cdot \|b - a\|}{1 - \|b^{-1}\| \cdot \|b - a\|} ,$$

ce qui prouve la continuité de $a \longmapsto a^{-1}$ en b . □

REMARQUE 1 Ce théorème est utilisé en pratique de la manière suivante :

Soit $a \in \mathcal{A}$. Si l'on sait que a est inversible, mais si le calcul de son inverse n'est pas possible directement, on essaye de trouver une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'éléments bien connus qui converge vers a . Alors, pour tout k assez grand, l'élément a_k est inversible et

$$a^{-1} = \lim_k a_k^{-1} .$$

DEFINITION 1 Soient F un espace de Banach et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$. On dit que

$$\sum_{l=0}^{\infty} w^l \cdot c_l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot w^l$$

est une *série (formelle) entière* dans F . Si Z est un ouvert de $\mathbb{K}$, on dit qu'une fonction $f : Z \longrightarrow F$ est *analytique* dans Z si f est développable en une série entière convergente au voisinage de chaque point $z \in Z$, i.e. s'il existe $r > 0$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ tels que

$$f(z + w) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot w^l \quad \text{si } |w| < r .$$

On trouvera dans le livre de J. Dieudonné [6], chapitre IX, toutes les informations nécessaires sur la théorie des fonctions analytiques à valeurs dans un espace de Banach.

DEFINITION 2 Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur spectrale* de a (par rapport à $\mathcal{A}$) si $a - \lambda \cdot e$ n'est pas inversible dans $\mathcal{A}$. On désigne par $\operatorname{Sp} a$ (ou $\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}} a$) l'ensemble des valeurs spectrales de a et on dit que c'est le *spectre* de a (dans $\mathcal{A}$).

REMARQUE 2 Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$\operatorname{Sp}(a + \alpha \cdot e) = \operatorname{Sp} a + \alpha \ .$$

En effet $\lambda \in \operatorname{Sp}(a + \alpha \cdot e)$ est équivalent à ce que $a + \alpha \cdot e - \lambda \cdot e = a - (\lambda - \alpha) \cdot e$ ne soit pas inversible, donc à $\lambda - \alpha \in \operatorname{Sp} a$, i.e. $\lambda \in \operatorname{Sp} a + \alpha$. □

THEOREME *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$. Alors $\operatorname{Sp} a$ est fermé, l'application*

$$R : \mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp} a \longrightarrow \mathcal{A} : z \longmapsto (a - z \cdot e)^{-1} \ ,$$

dite résolvente *de a , est analytique et $\operatorname{Sp} a$ est contenu dans le disque de centre 0 et de rayon $\rho(a)$. En particulier $\operatorname{Sp} a$ est compact.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\operatorname{Sp} a \neq \emptyset$ et

$$\rho(a) = \max\nolimits_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| \ .$$

Soit $z \notin \operatorname{Sp} a$. Pour tout $w \in \mathbb{K}$ tel que $|w| < \frac{1}{\|R(z)\|}$, l'élément

$$a - (z + w) \cdot e = (a - z \cdot e)\,[e - w \cdot R(z)]$$

est inversible par le théorème 6.2 et on a

$$R(z + w) = [e - w \cdot R(z)]^{-1} (a - z \cdot e)^{-1} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} [w \cdot R(z)]^l \right) R(z) = \sum_{l=0}^{\infty} R(z)^{l+1} \cdot w^l \ ,$$

ce qui montre que $\mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp} a$ est ouvert et prouve l'analyticité de R . Si $|z| > \rho(a)$, i.e. $\rho\left(\frac{1}{z} \cdot a\right) < 1$, le théorème 6.2 montre que $a - z \cdot e = -z \cdot \left(e - \frac{1}{z} \cdot a\right)$ est inversible.

Si maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $|z| > \|a\|$, on a

$$R(z) = -\frac{1}{z} \cdot \left(e - \frac{1}{z} \cdot a \right)^{-1} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} a^l \cdot \frac{1}{z^l} \ , \tag{$*$}$$

donc

$$\|R(z)\| \leqslant \frac{1}{|z|} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\|a\|}{|z|} \right)^l = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|z|}} \ .$$

Ceci montre que R tend vers 0 à l'infini. Si $\operatorname{Sp} a = \emptyset$, la fonction R est analytique et bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante par le théorème de Liouville (Dieudonné [6], théorème 9.11.1). La fonction R est donc identiquement nulle, ce qui est absurde, puisqu'on a

$$e = aR(0) = 0 \ .$$

D'autre part la fonction

$$Q : z \longmapsto R\left(\frac{1}{z}\right) : \mathbb{C} \setminus \frac{1}{\operatorname{Sp} a} \longrightarrow \mathcal{A} \ ,$$

en ayant posé $Q(0) = R(\infty) = 0$, est analytique et son développement en 0 est

$$Q(z) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^l \cdot z^{l+1}$$

par la formule $(*)$. D'après la formule d'Hadamard, le rayon de convergence de cette série est

$$\frac{1}{\limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\rho(a)} .$$

Mais en appliquant le théorème 9.9.4 de Dieudonné [6], on obtient

$$\frac{1}{\rho(a)} \geqslant d\left(0, \frac{1}{\operatorname{Sp} a}\right) = \inf_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \left|0 - \frac{1}{\lambda}\right| = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda|} \geqslant \frac{1}{\rho(a)} ,$$

donc

$$\rho(a) = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| ,$$

puisque $\operatorname{Sp} a$ est compact. □

COROLLAIRE (Gelfand-Mazur) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{A}$ est un corps, alors $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot e \simeq \mathbb{C}$.*

Soit $a \in \mathcal{A}$. Il existe donc $\lambda \in \operatorname{Sp} a$, i.e. $a - \lambda \cdot e$ n'est pas inversible. Comme $\mathcal{A}$ est un corps, on doit avoir $a - \lambda \cdot e = 0$, donc $a = \lambda \cdot e \in \mathbb{C} \cdot e$. L'application $\lambda \longmapsto \lambda \cdot e : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ est donc bijective et c'est évidemment une isométrie. □

EXEMPLE 1 Soit X un espace compact. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, on a $\operatorname{Sp} f = f(X)$.

Il suffit de remarquer que, pour $z \in \mathbb{K}$, la fonction $f - z \cdot 1$ est inversible, si, et seulement si, $f - z \cdot 1 \neq 0$ partout, i.e. $z \notin f(X)$. □

EXEMPLE 2 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unifère. Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a

$$\operatorname{Sp}(ab) \smallsetminus \{0\} = \operatorname{Sp}(ba) \smallsetminus \{0\} .$$

Par symétrie, il suffit de prouver l'inclusion $\operatorname{Sp}(ab) \smallsetminus \{0\} \subset \operatorname{Sp}(ba) \smallsetminus \{0\}$, c'est-à-dire que si pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'élément $ba - z \cdot e$ est inversible, il en est de même de $ab - z \cdot e$. Posons $c := (ba - z \cdot e)^{-1}$. On a alors

$$(ab - z \cdot e)(acb - e) = a(bac)b - ab - z \cdot acb + z \cdot e = a([ba - z \cdot e]c)b - ab + z \cdot e = z \cdot e$$

et de même

$$(acb - e)(ab - z \cdot e) = z \cdot e ,$$

ce qui prouve notre assertion. □

6.4 Transformation de Gelfand

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative. On dit qu'une forme linéaire

$$\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un *caractère* (de $\mathcal{A}$) si

$$\langle \chi | ab \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ .$$

L'ensemble $\operatorname{Sp} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ des caractères $\neq 0$ de $\mathcal{A}$ s'appelle le *spectre de* $\mathcal{A}$.

Un caractère est donc un vecteur bra $\langle \chi |$. Puisque nous considérons essentiellement la semi-dualité $\langle \mathcal{A} | \mathcal{A}^{\circledast} \rangle$, nous utiliserons aussi les vecteurs ket $|\chi\rangle$, qui sont des caractères semi-linéaires. Ainsi suivant les cas nous aurons $\operatorname{Sp} \mathcal{A} = \langle \operatorname{Sp} \mathcal{A} | \subset \mathcal{A}'$ ou bien $\operatorname{Sp} \mathcal{A} = | \operatorname{Sp} \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{A}^\dagger$ (cf. exemple 3.4.2).

REMARQUE 1 Si $\mathcal{A}$ est unifère et si $\langle \chi | e \rangle = 0$, on a

$$\langle \chi | a \rangle = \langle \chi | ae \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | e \rangle = 0 \ ,$$

donc $\chi = 0$. Par suite si $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, on a

$$\langle \chi | e \rangle = \langle \chi | ee \rangle = \langle \chi | e \rangle \cdot \langle \chi | e \rangle \ ,$$

donc

$$\langle \chi | e \rangle = 1 \ .$$

DEFINITION 2 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative unifère. On dit qu'un sous-espace vectoriel $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{A}$ est un *idéal* si $\mathcal{A}\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}$. Il est dit *maximal* si $e \notin \mathfrak{I}$, i.e. $\mathfrak{I} \neq \mathcal{A}$, et si pour tout idéal $\mathfrak{J}$ tel que $e \notin \mathfrak{J} \supset \mathfrak{I}$, on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$.

REMARQUE 2 Si χ est un caractère, alors $\operatorname{Ker} \chi$ est un idéal maximal.

En effet $\operatorname{Ker} \chi$ est un idéal, puisque

$$\langle \chi | ab \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle = 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \text{ et } b \in \operatorname{Ker} \chi \ .$$

On a évidemment $e \notin \operatorname{Ker} \chi$. Ce noyau étant de codimension 1 , c'est un idéal maximal. □

REMARQUE 3 Si $\mathfrak{I}$ est un idéal, alors $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est une algèbre. Si $\mathfrak{I}$ est maximal, alors $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est un corps.

Rappelons que la multiplication dans $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est définie par $[a]\,[b] := [ab]$, ceci ne dépendant évidemment pas du choix des représentants. Montrons la seconde assertion. Si $[c] \in \mathcal{A}/\mathfrak{I} \setminus \{0\}$, on a $c \notin \mathfrak{I}$, donc $\mathcal{A}c + \mathfrak{I}$ est un idéal contenant et différent de $\mathfrak{I}$; cet idéal est donc égal à $\mathcal{A}$, d'où l'on tire $e = ac + b$ pour certains $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathfrak{I}$. Ainsi $[e] = [a]\,[c]$, ce qui montre que $[c]$ est inversible. □

THEOREME (de Gelfand) *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative unifère et $a \in \mathcal{A}$. Pour que a soit inversible, il faut et il suffit que, pour tout caractère χ de $\mathcal{A}$ on ait $\langle \chi | a \rangle \neq 0$.*

Si a est inversible, on a

$$\langle \chi | a \rangle \cdot \left\langle \chi \left| a^{-1} \right. \right\rangle = \left\langle \chi \left| aa^{-1} \right. \right\rangle = \langle \chi | e \rangle = 1 ,$$

donc $\langle \chi | a \rangle \neq 0$.

Réciproquement si a n'est pas inversible, alors $\mathcal{A}a$ est un idéal et $e \notin \mathcal{A}a$. D'après le théorème de Krull il existe un idéal maximal $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{A}a$. Remarquons que ce théorème est une application simple du principe de maximalité de Hausdorff. Par la continuité du produit dans $\mathcal{A}$ (cf. proposition 2.4), l'adhérence $\overline{\mathfrak{I}}$ de $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$. Mais comme $\mathfrak{I}$ est disjoint de l'ouvert $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ (cf. proposition 6.3), il en est de même de $\overline{\mathfrak{I}}$, donc $\mathfrak{I} = \overline{\mathfrak{I}}$ par maximalité. Montrons maintenant que $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est une algèbre de Banach. Pour tout $u, v \in \mathcal{A}$, on a

$$\|[u]\,[v]\| = \inf_{c \in \mathfrak{I}} \|uv + c\| \leqslant \inf_{c,d \in \mathfrak{I}} \|(u + c)\,(v + d)\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{c \in \mathfrak{I}} \|u + c\| \cdot \inf_{d \in \mathfrak{I}} \|v + d\| = \|[u]\| \cdot \|[v]\| \ .$$

C'est aussi un corps par la remarque 2, donc $\mathcal{A}/\mathfrak{I} \approx \mathbb{C}$ par le théorème de Gelfand-Mazur. Il est alors clair que l'application canonique

$$\langle \chi | : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{I} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$$

est un homomorphisme d'algèbre, donc un caractère (linéaire) de $\mathcal{A}$, tel que $\langle \chi | a \rangle = 0$, puisque $a \in \mathfrak{I}$. □

EXERCICE Une des plus belles applications de ce résultat, en fait banal, est le **théorème de Wiener** :

Soit $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue dont la série de Fourier est absolument convergente. Si $f \neq 0$ partout sur $\mathbb{U}$, alors la série de Fourier de $\frac{1}{f}$ est aussi absolument convergente.

COROLLAIRE *On a*

$$\operatorname{Sp} a = \{ \langle \chi | a \rangle \mid \chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A} \} = \langle \operatorname{Sp} \mathcal{A} | a \rangle \ .$$

En particulier chaque caractère est de norme 1 *et* $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ *comme sous-espace topologique de* $\mathcal{A}^\dagger$ *est compact.*

En effet on a $\lambda \in \operatorname{Sp} a$ si, et seulement si, il existe un caractère χ tel que $\langle \chi | a - \lambda \cdot e \rangle = 0$, i.e $\lambda = \langle \chi | a \rangle$.

Comme $\operatorname{Sp} a \subset B(0, \rho(a))$, on a

$$|\langle \chi | a \rangle| \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\| \ , \tag{$*$}$$

donc $\|\chi\| = 1$, puisque $\langle \chi | e \rangle = 1$. Ainsi $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ est contenu dans la boule unité $\mathbb{B}_{\mathcal{A}^\dagger}$ de $\mathcal{A}^\dagger$, qui est faiblement compacte par le corollaire 3.11. Directement pour tout $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, on a

$$|\langle \chi | a \rangle| \leqslant \|\chi\| \cdot \|a\| \leqslant \|a\| \ ,$$

donc

$$\operatorname{Sp} \mathcal{A} \subset \prod_{a \in \mathcal{A}} B(0, \|a\|) \subset \mathbb{C}^{\mathcal{A}} : \chi \longmapsto \langle \chi |_{|\mathcal{A}} \ ,$$

et $\prod_{a \in \mathcal{A}} B(0, \|a\|)$ est compact par le théorème de Tychonoff.

Il nous reste à voir que $\langle \operatorname{Sp} \mathcal{A}|$ est fermé pour la topologie de la convergence ponctuelle dans $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$, ce qui est évident puisque

$$\operatorname{Sp} \mathcal{A} = \bigcap_{a,b\in\mathcal{A}} \{ \langle \chi| \in \mathcal{A}^* \mid \langle \chi| ab\rangle - \langle \chi| a\rangle \cdot \langle \chi| b\rangle = 0\} \cap \{ \langle \chi| \in \mathcal{A}' \mid \langle \chi| e\rangle - 1 = 0\}$$

et

$$\mathcal{A}^* = \bigcap_{a,b\in\mathcal{A},\alpha\in\mathbb{C}} \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}} \;\middle|\; f(\mu\alpha \cdot a + b) - \alpha \cdot f(a) - f(b) = 0 \right\}$$

est fermé dans $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$. □

DEFINITION 3 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative et $a \in \mathcal{A}$, on dit que la fonction

$$\mathcal{G}a := |a\rangle_{|\operatorname{Sp}\mathcal{A}} : \operatorname{Sp} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} : \chi \longmapsto \langle \chi| a\rangle$$

est la *transformée de Gelfand* de a .

Les résultats ci-dessus peuvent alors s'exprimer sous la forme suivante :

SCOLIE *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative unifère. La transformation de Gelfand*

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A}) : a \longmapsto \mathcal{G}a = |a\rangle_{|\operatorname{Sp}\mathcal{A}}$$

est un homomorphisme d'algèbre unifère et $\|\mathcal{G}\| = 1$. Plus précisément, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$\operatorname{Sp} a = \mathcal{G}a(\operatorname{Sp} \mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{G}a\|_\infty = \rho(a) \ ;$$

a est inversible dans $\mathcal{A}$ si, et seulement si, il en est de même de $\mathcal{G}a$ dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$.

Il est clair que $\mathcal{G}$ est un morphisme, car pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, on a

$$\mathcal{G}(ab)(\chi) = \langle \chi| ab\rangle = \langle \chi| a\rangle \cdot \langle \chi| b\rangle = \mathcal{G}a(\chi) \cdot \mathcal{G}b(\chi) = (\mathcal{G}a \cdot \mathcal{G}b)(\chi) \ .$$

Les formules découlent du corollaire ci-dessus et du théorème 6.3, car

$$\mathcal{G}a(\operatorname{Sp} \mathcal{A}) = \langle \operatorname{Sp} \mathcal{A}| a\rangle = \operatorname{Sp} a$$

et

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \max |\langle \operatorname{Sp} \mathcal{A}| a\rangle| = \max |\operatorname{Sp} a| = \rho(a) \ .$$

Finalement on a

$$\|\mathcal{G}\| = \sup\nolimits_{a\in\mathcal{A},\|a\|\leqslant 1} \|\mathcal{G}a\|_\infty \leqslant 1 \ ,$$

puisque $\rho(a) \leqslant \|a\|$ et $\mathcal{G}e = 1$. □

Pour les deux remarques qui suivent nous supposons que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach complexe commutative unifère.

REMARQUE 4 Pour que la transformation de Gelfand soit injective, il faut et il suffit que, que $\mathcal{A}$ ne possède pas d'éléments quasi-nilpotents non-nuls.

En effet l'injectivité est équivalente à ce que $\rho(a) = \|\mathcal{G}a\|_\infty = 0$ entraîne $a = 0$. □

REMARQUE 5 La transformation de Gelfand est une isométrie si, et seulement si, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $\|a^2\| = \|a\|^2$.

Si $a \in \mathcal{A}$ satisfait à $\left\|a^2\right\| = \|a\|^2$, alors

$$\rho(a) = \lim_k \left\|a^{2^k}\right\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\| \ .$$

Ceci montre en outre que la condition est suffisante, car

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \rho(a) = \|a\| \ .$$

La condition est nécessaire, puisque

$$\left\|a^2\right\| = \left\|\mathcal{G}\left(a^2\right)\right\|_\infty = \left\|(\mathcal{G}a)^2\right\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2 = \rho(a)^2 = \|a\|^2 \ .$$

6.5 Théorème de Gelfand-Neumark

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Une application

$$a \longmapsto a^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

telle que, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait

$$(a^*)^* = a \quad , \quad (a + \alpha \cdot b)^* = a^* + \bar{\alpha} \cdot b^* \quad \text{et} \quad (ab)^* = b^* a^* \ ,$$

s'appelle une *involution* et on dit que $\mathcal{A}$ est *involutive* . Si $\mathcal{A}$ est normée, on exige en plus que

$$\|a^*\| = \|a\| \ .$$

On dit que $a \in \mathcal{A}$ est *auto-adjoint* si $a^* = a$ et *normal* si $a^* a = a a^*$. Nous désignerons par $\mathcal{A}_{aa}$ l'ensemble des éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est unifère, on a $e^* = e$. $\mathcal{A}_{aa}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{A}$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on a la décomposition

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{aa} + i \cdot \mathcal{A}_{aa}$$

puisque, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\frac{a+a^*}{2}$ et $\frac{a-a^*}{2i}$ sont auto-adjoints et

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i \cdot \frac{a - a^*}{2i} \ .$$

EXEMPLE 1 Soit X un espace compact. Alors $\mathcal{C}(X)$, muni de l'involution $f \longmapsto \overline{f}$, est une algèbre de Banach involutive unifère telle que

$$\left\|\overline{f} f\right\|_\infty = \|f\|_\infty^2 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X) \ .$$

EXEMPLE 2 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Alors $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, muni de l'involution $T \longmapsto T^*$, est une algèbre de Banach involutive unifère telle que

$$\|T^* T\| = \|T\|^2 \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

Puisque T^*T est auto-adjoint, par la proposition 3.17.i on a en effet

$$\|T^*T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T^*T\xi)| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} \|T\xi\|^2 = \|T\|^2 \ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 2 Une algèbre de Banach complexe involutive (unifère) telle que l'on ait

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}$$

est dite *stellaire* . On dit aussi que c'est une *C^*-algèbre* .

PROPOSITION *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et a un élément auto-adjoint. Alors*

$$\rho(a) = \|a\| \quad \text{et} \quad \operatorname{Sp} a \subset \mathbb{R} \ .$$

On a

$$\left\|a^2\right\| = \|a^* a\| = \|a\|^2 \ ,$$

donc $\rho(a) = \|a\|$ par la remarque 6.4.5.

Soit maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + i \cdot \beta \in \operatorname{Sp} a$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a évidemment $\alpha + i \cdot (\beta + \lambda) \in \operatorname{Sp}(a + i \cdot \lambda \cdot e)$ par la remarque 6.3.2, donc

$$\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 = |\alpha + i \cdot (\beta + \lambda)|^2 \leqslant \|a + i \cdot \lambda \cdot e\|^2 = \|(a + i \cdot \lambda \cdot e)^* (a + i \cdot \lambda \cdot e)\| =$$

$$= \left\|a^* a + \lambda^2 \cdot e\right\| \leqslant \|a\|^2 + \lambda^2 \ ,$$

d'où l'on tire

$$2\beta\lambda \leqslant \|a\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 \ ,$$

ce qui n'est possible que si $\beta = 0$. □

DEFINITION 3 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre involutive commutative, on dit qu'un caractère $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ est *hermitien* si

$$\langle \chi | \, a^* \rangle = \overline{\langle \chi | \, a \rangle} \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \ .$$

THEOREME (de Gelfand-Neumark) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et commutative. Alors tout caractère de $\mathcal{A}$ est hermitien et la transformation de Gelfand $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ est un isomorphisme d'algèbre stellaire.*

Si $a \in \mathcal{A}$ est auto-adjoint et $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, alors

$$\langle \chi | \, a \rangle \in \operatorname{Sp} a \subset \mathbb{R}$$

par le scolie 6.4. Si maintenant a est quelconque, on a

$$\left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right. \right\rangle , \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right. \right\rangle \in \mathbb{R} \ ,$$

puisque $\frac{a+a^*}{2}$ et $\frac{a-a^*}{2i}$ sont auto-adjoints. Il vient alors

$$\langle \chi | \, a^* \rangle = \left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right. \right\rangle - i \cdot \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right. \right\rangle = \overline{\left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right. \right\rangle + i \cdot \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right. \right\rangle} = \overline{\langle \chi | \, a \rangle} \ ,$$

ce qui montre que χ est hermitien. On en déduit que $\mathcal{G}$ est involutive, puisque

$$\mathcal{G}a^*(\chi) = \langle \chi | \, a^* \rangle = \overline{\langle \chi | \, a \rangle} = \overline{\mathcal{G}a(\chi)} = \overline{\mathcal{G}a}(\chi) \ ,$$

donc

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| = \rho(a^* a) = \|\mathcal{G}(a^* a)\|_\infty = \left\|\overline{\mathcal{G}a} \cdot \mathcal{G}a\right\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2 \ ,$$

par la proposition ci-dessus et le scolie 6.4. Ceci prouve que $\mathcal{G}$ est une isométrie de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$. Ainsi $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre involutive complète, donc fermée de $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$. Elle contient les constantes, puisque $\mathcal{G}e = 1$; elle sépare les points de $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$, car si $\chi_1 \neq \chi_2$, par définition de l'égalité de deux formes linéaires, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\langle \chi_1 | \, a \rangle \neq \langle \chi_2 | \, a \rangle$, i.e. $\mathcal{G}a(\chi_1) \neq \mathcal{G}a(\chi_2)$. Le théorème de Stone-Weierstraß montre alors que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est dense, donc égale à $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$. □

6.6 Le spectre dans une sous-algèbre stellaire

DEFINITION Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach complexe involutive unifère, nous dirons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ est une *sous-algèbre stellaire unifère* de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire pour la structure induite et si elle contient l'élément unité de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est une algèbre stellaire unifère, alors $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{B}$ si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre involutive fermée contenant l'unité de $\mathcal{B}$.

PROPOSITION *Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire unifère de $\mathcal{B}$, alors tout $a \in \mathcal{A}$ qui est inversible dans $\mathcal{B}$ est inversible dans $\mathcal{A}$. En d'autres termes on a*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a = \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, a \ .$$

Soit $a \in \mathcal{A}$ un élément auto-adjoint inversible dans $\mathcal{B}$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a \subset \mathbb{R}$ par la proposition 6.6, donc

$$0 \notin \mathrm{Sp}\, a + i \cdot \lambda = \mathrm{Sp}\,(a + i \cdot \lambda \cdot e) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

par la remarque 6.3.2. Ainsi $a + i \cdot \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{A}$. Son inverse $(a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \in \mathcal{A}$ est aussi son inverse dans $\mathcal{B}$ et la proposition 6.3 appliquée à $\mathcal{B}$ montre, puisque $a = \lim_{\lambda \to 0} (a + i \cdot \lambda \cdot e)$, que

$$a^{-1} = \lim_{\lambda \to 0} (a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \quad \text{dans } \mathcal{B} \ .$$

Mais $\mathcal{A}$ est fermée dans $\mathcal{B}$, donc

$$a^{-1} = \lim_{\lambda \to 0} (a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \in \mathcal{A} \ .$$

Si maintenant $a \in \mathcal{A}$ est un élément quelconque inversible dans $\mathcal{B}$, alors a^* est aussi inversible dans $\mathcal{B}$ et son inverse est $(a^{-1})^*$. L'élément auto-adjoint a^*a , dont l'inverse est $a^{-1}(a^{-1})^*$ dans $\mathcal{B}$, est inversible dans $\mathcal{A}$ par ce qui précède, i.e. $(a^*a)^{-1} \in \mathcal{A}$. On en déduit que

$$a^{-1} = \left[aa^{-1}\left(a^{-1}\right)^*\right]^* = \left[a\,(a^*a)^{-1}\right]^* \in \mathcal{A} \ .$$

□

COROLLAIRE *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre stellaire unifère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $T \in \mathcal{A}$. Alors le spectre $\mathrm{Sp}\, T$ de T (dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) est égal au spectre $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a$ de T dans $\mathcal{A}$.*

THEOREME *Soient $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach complexe involutive unifère, $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et $\Theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un morphisme d'algèbre involutive unifère. Alors*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, \Theta b \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, b$$

et Θ est continu de norme 1 .

Pour tout $b \in \mathcal{B}$, si $b - \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{B}$, alors $\Theta b - \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{A}$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, \Theta b \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, b$. Le théorème 6.3 montre alors que

$$\rho\,(\Theta b) \leqslant \rho\,(b) \leqslant \|b\| \ ,$$

donc

$$\|\Theta b\|^2 = \|(\Theta b)^* \Theta b\| = \rho\left(\Theta\left(b^* b\right)\right) \leqslant \|b^* b\| \leqslant \|b\|^2$$

par la proposition 6.6. Ainsi $\|\Theta\| \leqslant 1$ et comme $\Theta e = e$, on obtient $\|\Theta\| = 1$. ——— □

6.7 Calcul fonctionnel continu

Dans les derniers paragraphes de ce chapitre,
$\mathcal{B}$ est une algèbre stellaire unifère,
$\mathcal{A}$ une sous-algèbre stellaire unifère commutative de $\mathcal{B}$
et $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ désigne l'isomorphisme de Gelfand-Neumark.

DEFINITION 1 Nous désignerons par $\mathcal{B}_+$ l'ensemble des éléments dits *positifs* , i.e. qui sont auto-adjoints et dont le spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

Nous étudierons cet ensemble plus en détail en 6.9. La proposition 6.7 montre que $\mathcal{A}_+ = \mathcal{B}_+ \cap \mathcal{A}$ et que $a \in \mathcal{A}$ est positif si, et seulement si, $\mathcal{G}a \subset \mathbb{R}_+$.

DEFINITION 2 L'homomorphisme injectif d'algèbre stellaire

$$\Phi : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \overset{-1}{\mathcal{G}} f$$

est dit l'*intégrale spectrale* ou le *calcul fonctionnel (continu)* associée à l'algèbre $\mathcal{A}$.

Toute opération liée à la structure d'algèbre stellaire unifère de $\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ peut donc être interprétée dans $\mathcal{A}$ comme dans $\mathcal{B}$ grâce à Φ .

LEMME *Pour tout $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$, on a*

$$\operatorname{Sp}_{\mathcal{B}} \Phi f = \operatorname{Sp}_{\mathcal{A}} \Phi f = f(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) \ .$$

En effet la première égalité découle de la proposition 6.7, tandis que grâce à l'exemple 6.3.1, on obtient

$$\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}} \Phi f = \operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})} f = f(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) \ .$$

□

DEFINITION 3 Nous désignerons par $\mathcal{A}(t)$ la sous-algèbre stellaire unifère engendrée par un élément $t \in \mathcal{B}$, i.e. la plus petite sous-algèbre involutive fermé unifère contenant t .

REMARQUE 1 Pour que $\mathcal{A}(t)$ soit commutative, il faut et il suffit que t soit normal ; dans ce cas, elle ne contient que des éléments normaux. Tout $t \in \mathcal{A}$ est normal et $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A}$.

En effet $\mathcal{A}(t)$ est la fermeture de la sous-algèbre $\mathcal{P}(t, t^*)$ des polynômes (non-commutatifs) en t et t^* . Le résultat est alors immédiat. Tout $t \in \mathcal{A}$ est normal , puisque $\mathcal{A}$ est commutative.

□

THEOREME *Soient $t \in \mathcal{B}$ un élément normal et $\mathcal{G} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}(\mathcal{A}(t)))$ l'isomorphisme de Gelfand-Neumark associé.*

L'application

$$\mathcal{G}t : \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathrm{Sp}\,t : \chi \longmapsto \langle \chi | t \rangle$$

est alors un homéomorphisme et

$$a \longmapsto \mathcal{G}a \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t)$$

est un isomorphisme d'algèbres stellaires unifères.

L'isomorphisme réciproque

$$\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t) \longrightarrow \mathcal{A}(t) \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto f(t) := \overset{-1}{\mathcal{G}}(f \circ \mathcal{G}t)$$

est l'unique morphisme d'algèbre involutive unifère $\Psi : \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t) \longrightarrow \mathcal{B}$ *tel que*

$$\Psi(\mathrm{id}) = t \ ,$$

où id *désigne la fonction* $\mathrm{Sp}\,t \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto \lambda$ *. C'est une isométrie et son image est* $\mathcal{A}(t)$ *.*

Montrons tout d'abord que $\mathcal{G}t$ est injective. Etant donné des caractères $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(t)$ tels que $\langle \chi_1 | t \rangle = \langle \chi_2 | t \rangle$, alors

$$\langle \chi_1 | t^* \rangle = \overline{\langle \chi_1 | t \rangle} = \overline{\langle \chi_2 | t \rangle} = \langle \chi_2 | t^* \rangle \ ,$$

donc χ_1 et χ_2 coïncident sur $\mathcal{P}(t, t^*)$ et par suite sur $\mathcal{A}(t)$ par continuité. Puisque $\mathcal{G}t$ est surjective par le scolie 6.4, et que $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(t)$ est compact, c'est un homéomorphisme. On en déduit que l'application

$$g \longmapsto g \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(t)) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t)$$

est un isomorphisme d'algèbres stellaires, donc aussi

$$a \longmapsto \mathcal{G}a \longmapsto \mathcal{G}a \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(t)) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t) \ .$$

L'isomorphisme réciproque satisfait à la condition puisque

$$\mathrm{id}(t) = \overset{-1}{\mathcal{G}}(\mathrm{id} \circ \mathcal{G}t) = \overset{-1}{\mathcal{G}}(\mathcal{G}t) = t \ .$$

Quant à l'unicité, Ψ est univoquement déterminé par hypothèse sur la sous-algèbre unifère involutive des fonctions continues sur $\mathrm{Sp}\,t$ engendrée par id . Mais id sépare les points de $\mathrm{Sp}\,t$; cette sous-algèbre est donc dense dans $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t)$ par le théorème de Stone-Weierstraß. Le théorème 6.7 montrant que Ψ est continu, on en déduit que Ψ est aussi univoquement déterminé sur $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t)$. □

DEFINITION 4 On dit que le morphisme d'algèbre involutive unifère

$$f \longmapsto f(t) : \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,t) \longrightarrow \mathcal{B}$$

est l'*intégrale spectrale* ou le *calcul fonctionnel (continu)* associée à l'élément normal t .

Il est donc univoquement déterminé par

$$1(t) = e \quad \text{et} \quad \mathrm{id}(t) = t \ .$$

EXEMPLE 1 Si $a, b \in \mathcal{B}$ sont des éléments positifs qui commutent, alors ab est positif.

En effet l'algèbre stellaire unifère $\mathcal{A} := \mathcal{A}(a, b)$ engendrée par a et b , qui est la fermeture de la sous-algèbre des polynômes (commutatifs) en a et b est commutative. Puisque $\mathcal{G}a$ et $\mathcal{G}b$ sont des fonctions positives continues sur $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(a, b)$, il en est de même de $\mathcal{G}(ab) = \mathcal{G}a \cdot \mathcal{G}b$.

□

Pour une application non-triviale voir l'exemple 6.9.

EXEMPLE 2 Soit $t \in \mathcal{B}$ un élément auto-adjoint. Les éléments positifs $|t|$, t^+ et $t^- \in \mathcal{A}(t)$ sont les seuls tels que

$$t = t^+ - t^- \quad , \quad t^+t^- = t^-t^+ = 0 \quad \text{et} \quad |t| = t^+ + t^- \ .$$

En outre

$$\left\|t^+\right\| , \left\|t^-\right\| \leqslant \left\| |t| \right\| = \|t\| \ .$$

En effet les fonctions continues positives $|\mathrm{id}|$, id^+ et id^- sur $\mathrm{Sp}\, t$ sont univoquement déterminées par les conditions

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}^+ - \mathrm{id}^- \quad , \quad \mathrm{id}^+ \cdot \mathrm{id}^- = 0 \quad \text{et} \quad |\mathrm{id}| = \mathrm{id}^+ + \mathrm{id}^-$$

et on a

$$\left\|\mathrm{id}^+\right\|_\infty , \left\|\mathrm{id}^-\right\|_\infty \leqslant \left\| |\mathrm{id}| \right\|_\infty = \|\mathrm{id}\|_\infty \ .$$

□

EXEMPLE 3 Si $t \in \mathcal{B}$ est positif, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir $t^\alpha \in \mathcal{A}_+(t)$ et on a

$$t^\alpha t^\beta = t^{\alpha+\beta} \quad , \quad (t^\alpha)^\beta = t^{\alpha\cdot\beta} \ .$$

En particulier $\sqrt{t} := t^{\frac{1}{2}}$ est l'unique $r \in \mathcal{B}_+$ tel que $t = r^2$.

En outre si $t \in \mathcal{B}$ est auto-adjoint, il existe des éléments uniques $u, v \in \mathcal{B}_+$ tels que

$$t = u^2 - v^2 \quad \text{et} \quad uv = vu = 0 \ .$$

En effet la fonctions id^α est continue positives sur $\mathrm{Sp}\, t \subset \mathbb{R}_+$. Les formules sont évidentes puisque $\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathrm{id}^\beta = \mathrm{id}^{\alpha+\beta}$ et $(\mathrm{id}^\alpha)^\beta = \mathrm{id}^{\cdot\beta}$. En particulier $\left(\sqrt{t}\right)^2 = t$. D'autre part si $r \in \mathcal{B}_+$ est tel que $t = r^2$, on a $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A} := \mathcal{A}(r)$ et

$$(\mathcal{G}r)^2 = \mathcal{G}t = \left(\mathcal{G}\sqrt{t}\right)^2 \ ,$$

donc $\mathcal{G}r = \mathcal{G}\sqrt{t}$, puisque ce sont des fonctions positives, et par suite $r = \sqrt{t}$.

Finalement on a évidemment

$$t = \left(\sqrt{t^+}\right)^2 - \left(\sqrt{t^-}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{t^+}\sqrt{t^-} = 0 \ .$$

Quant à l'unicité on considère l'algèbre stellaire unifère commutative $\mathcal{A}$ engendrée par u et v . On a alors

$$(\mathcal{G}u)^2 - (\mathcal{G}v)^2 = \mathcal{G}t = \left(\mathcal{G}\sqrt{t^+}\right)^2 - \left(\mathcal{G}\sqrt{t^-}\right)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}\sqrt{t^+} \cdot \mathcal{G}\sqrt{t^-} = 0 \ ,$$

donc $\mathcal{G}u = \mathcal{G}\sqrt{t^+}$ et $\mathcal{G}v = \mathcal{G}\sqrt{t^-}$ et par suite $u = \sqrt{t^+}$ et $v = \sqrt{t^-}$. □

EXEMPLE 4 Si $t \in \mathcal{B}$ est normal, on a

$$|t| = \sqrt{t^*t} \in \mathcal{A}(t) \ .$$

En effet

$$|\mathrm{id}| = \sqrt{\overline{\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id}} \ .$$

□

EXEMPLE 5 On a évidemment

$$e^t = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{id}^k}{k!}\right)(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} \ .$$

EXEMPLE 6 Si Ω est une partie simplement connexe de $\mathbb{C}^*$ et $\mathrm{Sp}\, t \subset \Omega$, on peut définir une branche du logarithme $\ln : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On a donc $\ln t \in \mathcal{A}(t)$ et

$$e^{\ln t} = t \ .$$

En posant

$$t^\alpha := e^{\alpha\cdot\ln t} \ ,$$

on a les formules

$$t^\alpha t^\beta = t^{\alpha+\beta} \quad , \quad (t^\alpha)^\beta = t^{\alpha\cdot\beta}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

C'est immédiat. ☐

PROPOSITION *Soient $t \in \mathcal{A}$, $\mathcal{G}_t : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$ et $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$ les isomorphismes de Gelfand-Neumark associés.*

(i) Soient $\mathcal{C}$ une algèbre stellaire unifère et $\Theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ un morphisme d'algèbre stellaire unifère. Alors Θt est normal dans $\mathcal{C}$, $\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\, \Theta t \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, t$ et si $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, t)$, on a

$$\Theta(f(t)) = f_{|\,\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\,\Theta t}(\Theta t) \ .$$

(ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$, on a

$$\mathcal{G}(f(t)) = f \circ \mathcal{G}t \ .$$

(iii) Si $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$, alors

$$f(\mathrm{Sp}\, t) = \mathrm{Sp}\, f(t)$$

et, pour tout $g \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, f(t))$, on a

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) \ .$$

(iv) L'application de restriction

$$r : \mathrm{Sp}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(t) : \chi \longmapsto \chi_{|\mathcal{A}(t)}$$

est surjective et, pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$, on a

$$\mathcal{G}(f(t)) = f \circ \mathcal{G}_t t \circ r \ ,$$

i.e.

$$\Phi(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r) = f(t) \ .$$

Démonstration de (i) Puisque $t \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est commutuative, t est normal. On a alors

$$(\Theta t)^* \Theta t = \Theta(t^* t) = \Theta(t t^*) = \theta t (\Theta t)^* \ ,$$

ce qui montre que Θt est normal. L'inclusion des spectre a été démontrée dans le théorème 6.7. Puisque

$$\Theta(1(t)) = \Theta e = e = 1_{|\,\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\,\Theta t}(\Theta t) \quad \text{et} \quad \Theta(\mathrm{id}(t)) = \Theta t = \mathrm{id}_{|\,\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\,\Theta t}(\Theta t) \ ,$$

les deux morphismes d'algèbre stellaire

$$f \longmapsto \Theta\left(f\left(t\right)\right) \quad \text{et} \quad f \longmapsto f_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}} \Theta t}\left(\Theta t\right)$$

sont donc égaux sur l'algèbre stellaire unifère engendrée par id , qui par Stone-Weierstraß est égale à $\mathcal{C}\left(\operatorname{Sp}_{\mathcal{B}} t\right)$.

Démonstration de (ii) Considérons le morphisme d'algèbre stellaire unifère

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp} \mathcal{A}\right) : t \longmapsto \mathcal{G}t \ .$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp} t\right)$, il vient $\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})} \mathcal{G}t = \mathcal{G}t\left(\operatorname{Sp} \mathcal{A}\right) = \operatorname{Sp} t$, donc

$$\mathcal{G}\left(f\left(t\right)\right) = f_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})} \mathcal{G}t}\left(\mathcal{G}t\right) = f\left(\mathcal{G}t\right) = f \circ \mathcal{G}t$$

par (i) et l'unicité du calcul fonctionnel associé à $\mathcal{G}t \in \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp} \mathcal{A}\right)$, puisque

$$1 \circ \mathcal{G}t = e \quad \text{et} \quad \operatorname{id} \circ \mathcal{G}t = \mathcal{G}t \ .$$

Démonstration de (iii) La première partie découle du lemme. Quant à la seconde on a

$$\left(1 \circ f\right)\left(t\right) = 1\left(t\right) = e \quad \text{et} \quad \left(\operatorname{id} \circ f\right)\left(t\right) = f\left(t\right) \ ,$$

d'où le résultat par l'unicité du calcul fonctionnel associé à $f\left(t\right)$.

Démonstration de (iv) Pour tout $a \in \mathcal{A}\left(t\right) \subset \mathcal{A}$, on a

$$\mathcal{G}_t a\left(r\left(\chi\right)\right) = \left\langle r\left(\chi\right) | a\right\rangle_{\mathcal{A}(t)^\dagger} = \left\langle \chi | a\right\rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}a\left(\chi\right) \ ,$$

donc $\mathcal{G}_t a \circ r = \mathcal{G}a$. Mais $\mathcal{G}_t t\left(\operatorname{Sp} \mathcal{A}\left(t\right)\right) = \operatorname{Sp} t = \mathcal{G}t\left(\operatorname{Sp} \mathcal{A}\right)$, donc r est surjective. Considérons le morphisme d'algèbre involutive unifère

$$\Psi : \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp} t\right) \longrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \Phi\left(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r\right) \ .$$

On a

$$\Psi 1 = \Phi 1 = e \quad \text{et} \quad \Psi \operatorname{id} = \Phi\left(\operatorname{id} \circ \mathcal{G}_t t \circ r\right) = \Phi\left(\mathcal{G}t\right) = t \ ,$$

donc

$$\Phi\left(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r\right) = f\left(t\right) \ ,$$

à nouveau par l'unicité du calcul fonctionnel associé à t . ∎

6.8 Eléments positifs dans une algèbre stellaire

LEMME *Soit t un élément auto-adjoint de $\mathcal{B}$.*

(i) Si $t \in \mathcal{B}_+$ et $\|t\| \leqslant 1$, alors $\|e - t\| \leqslant 1$.

(ii) Si $\|e - t\| \leqslant 1$, alors $t \in \mathcal{B}_+$.

(iii) Pour que $t \in \mathcal{B}_+$, il faut et il suffit que l'on ait $\big\| \, \|t\| \cdot e - t \big\| \leqslant \|t\|$.

Il suffit de se placer dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ où ces assertions sont immédiates (exercice). —— □

COROLLAIRE

(i) L'ensemble $\mathcal{B}_+$ des éléments positifs de $\mathcal{B}$ est un cône convexe fermé saillant.

(ii) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Pour que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ soit positif dans cette algèbre stellaire unifère, il faut et il suffit que T soit un opérateur auto-adjoint positif borné.

Démonstration de (i) C'est un cône puisque, pour tout $b \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{Sp}(\alpha \cdot b) = \alpha \cdot \operatorname{Sp} b$. Pour montrer que $\mathcal{B}_+$ est convexe, il nous suffit, pour tout $s, t \in \mathcal{B}_+ \setminus \{0\}$, de prouver que $\frac{1}{2} \cdot (s + t) \in \mathcal{B}_+$. Nous pouvons supposer, en divisant par $\max(\|s\|, \|t\|)$, que $\|s\|, \|t\| \leqslant 1$. On a alors $\|s - e\|, \|t - e\| \leqslant 1$ par (i) , donc

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot (s + t) - e \right\| = \frac{1}{2} \cdot \|s - e + t - e\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot (\|s - e\| + \|t - e\|) \leqslant 1 \ ,$$

et par suite le résultat par (ii). La partie (iii) du lemme montre que $\mathcal{B}_+$ est fermé. Finalement si $t \in \mathcal{B}_+ \cap (-\mathcal{B}_+)$, on a $\operatorname{Sp} t = \{0\}$, donc

$$\|t\| = \rho(t) = 0$$

par la proposition 6.6.

Démonstration de (ii) Rappelons que la notion d'opérateur auto-adjoint positif a été définie en 3.17. Puisque $\|T\| \cdot \operatorname{Id} - T$ est auto-adjoint, grâce à la proposition 3.17.i on obtient

$$\| \, \|T\| \cdot \operatorname{Id} - T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi \,|\, \|T\| \cdot \xi - T\xi)| =$$

$$= \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} [\, \|T\| \cdot (\xi | \, \xi) - (\xi | \, T\xi)] \leqslant \|T\| \ ,$$

puisque $0 \leqslant (\xi | \, T\xi) \leqslant \|T\| \cdot (\xi | \, \xi)$. —— □

EXEMPLE Si S, T sont des opérateurs auto-adjoints positifs bornés qui commutent, alors ST est auto-adjoint positif borné.

C'est immédiat par l'exemple 6.8.1. —— □

Même en dimension finie ce résultat n'est pas trivial. On le prouve en général après avoir démontré le théorème de diagonalisation des matrices hermitiennes (auto-adjointes). Le résultat est évidemment faux si les matrices ne commutent pas comme le montre l'exemple suivant :

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont hermitiennes positives, mais

$$ST = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

n'est même pas hermitienne.

THEOREME *Soit $t \in \mathcal{B}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $t \in \mathcal{B}_+$.

(ii) Il existe $r \in \mathcal{A}_+ (t)$ tel que $t = r^2$.

(iii) Il existe $b \in \mathcal{B}$ tel que $t = b^* b$.

(iv) Il existe $a \in \mathcal{B}_{aa}$ tel que $t = a^2$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Utilisant le lemme 6.7.1, on a $\operatorname{Sp} t = (\operatorname{Sp} a)^2 \subset \mathbb{R}_+$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Cela découle de l'exemple 6.7.3 en posant $r := \sqrt{t}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) C'est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Puisque $t = b^* b$ est auto-adjoint, grâce à l'exemple 6.7.3, on peut écrire $t = a^2 - c^2$ pour certains $a, c \in \mathcal{B}_+$ tels que $ac = ca = 0$. Il vient alors

$$(bc)^* (bc) = cb^* bc = ca^2 c - c^4 = -c^4 \in -\mathcal{B}_+$$

car (iv)$\Rightarrow$(i). En décomposant $bc = u + i \cdot v$ pour certains $u, v \in \mathcal{B}_{aa}$, on obtient

$$(bc)(bc)^* = (u + i \cdot v)(u - i \cdot v) + (u - i \cdot v)(u + i \cdot v) - (bc)^* (bc) =$$

$$= 2u^2 + 2v^2 - (bc)^* (bc) \in \mathcal{B}_+ ,$$

puisque $\mathcal{B}_+$ est un cône convexe par le corollaire. Mais comme

$$\operatorname{Sp} [(bc)(bc)^*] \smallsetminus \{0\} = \operatorname{Sp} [(bc)^* (bc)] \smallsetminus \{0\}$$

par l'exemple 6.3.2, on a aussi $(bc)^* (bc) \in \mathcal{B}_+$, donc

$$(bc)^* (bc) \in \mathcal{B}_+ \cap (-\mathcal{B}_+) = \{0\}$$

et par suite $c^4 = 0$. On en déduit que $c = 0$, en raisonnant dans $\mathcal{A} := \mathcal{A}(c)$ puisque $\mathcal{G}c \geqslant 0$, et par suite que $t = a^2$. $\square$

6.9 Cas d'un élément normal non-borné

Soit $t \in \mathcal{B}$ un élément normal. Puisque

$$e + t^*t = \left(1 + |\mathrm{id}|^2\right)(t) = \langle \mathrm{id} \rangle (t) \ ,$$

on voit que c'est un élément inversible dans $\mathcal{A}(t)$, donc dans $\mathcal{B}$. On pose

$$a := (e + t^*t)^{-1} = \langle t \rangle^{-1} \quad \text{et} \quad b := ta = t \langle t \rangle^{-1} \ .$$

On a

$$t = ba^{-1} \ ,$$

ainsi que

$$a^* = a \quad \text{et} \quad a = a^2 + b^*b \ , \tag{$*$}$$

et l'algèbre stellaire unifère $\mathcal{A}(t)$ est engendrée par a et b .

Les deux premières formules sont évidentes et

$$a^2 + b^*b = aa + at^*ta = a(e + t^*t)a = a \ .$$

□

DEFINITION Soient $a, b \in \mathcal{B}$. On désigne par $\mathcal{A}(a, b)$ la sous-algèbre stellaire unifère engendrée par a et b .

LEMME *Pour que $\mathcal{A}(a, b)$ soit commutative, il faut et il suffit que a , a^* , b et b^* commutent entre eux.*

C'est immédiat, puisque $\mathcal{A}(a, b)$ est la fermeture de la sous-algèbre des polynômes non-commutatifs en a , a^* , b et b^* . □

REMARQUE On peut montrer qu'il suffit que a et b soient normaux et que a commute avec b (théorème de Fuglede).

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une algèbre stellaire unifère commutative engendrée par deux éléments a, b satisfaisant à $(*)$. Nous allons montrer comme en 6.8 que $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ est homéomorphe à une partie compact de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Si $\langle \chi | a \rangle \neq 0$ pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$, l'élément a est inversible par le théorème de Gelfand 6.4, et en posant $t := ba^{-1} \in \mathcal{A}$, on a évidemment $b = ta$ et il vient

$$e + t^*t = e + a^{-1}b^*ba^{-1} = a^{-2}\left(a^2 + b^*b\right) = a^{-2}a = a^{-1} \ ,$$

donc $a = (e + t^*t)^{-1}$. On a évidemment $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$. Ceci correspond au cas borné.

S'il existe maintenant un $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ tel que $\langle \chi | a \rangle = 0$, alors $(*)$ montre que

$$0 = \langle \chi | a \rangle = \left\langle \chi | a^2 \right\rangle + \langle \chi | b^*b \rangle = |\langle \chi | b \rangle|^2 \ ,$$

donc $\langle \chi | b \rangle = 0$. Comme en outre $\langle \chi | e \rangle = 1$, un tel caractère est unique. Ceci correspond au cas non-borné.

Nous verrons plus tard (cf. théorème 7.8) que l'algèbre stellaire associée à un opérateur normal non-borné est de ce type.

Nous avons donc prouvé que $\{\mathcal{G}a = 0\}$ contient au plus un caractère noté χ_∞ . Posons

$$\theta := \frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a} : \{\mathcal{G}a \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

On a

$$\overline{\mathcal{G}a} = \mathcal{G}a = (\mathcal{G}a)^2 + |\mathcal{G}b|^2$$

par $(*)$, donc

$$\frac{1}{\mathcal{G}a} = 1 + \left|\frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a}\right|^2 = 1 + |\theta|^2 = \langle\theta\rangle \ , \qquad (**)$$

puisque $\mathcal{G}a$ est réelle, puis

$$\mathcal{G}a = \frac{1}{1+|\theta|^2} = \langle\theta\rangle^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}b = \theta\cdot\mathcal{G}a = \frac{\theta}{1+|\theta|^2} = \theta\cdot\langle\theta\rangle^{-1} \qquad (***)$$

sur $\{\mathcal{G}a \neq 0\}$.

L'application θ est évidemment continue et elle se prolonge par continuité à $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$ en posant $\theta(\chi_\infty) = \infty$. En effet la formule $(**)$ montre que θ tend vers ∞ , lorsque χ tend vers χ_∞ , puisque $\mathcal{G}a$ tend vers 0 .

L'application θ est injective, car pour tous $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$ tels que $\theta(\chi_1) = \theta(\chi_2)$, les formules $(***)$ montrent que les caractères χ_1 et χ_2 coïncident sur a et b , donc sont égaux. Puisque $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ est compact, θ est un homéomorphisme de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ sur son image $\Lambda := \theta(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{C}}$. Utilisant le théorème de Gelfand-Neumark, nous avons donc prouvé la première partie du

THEOREME *Soient $a, b \in \mathcal{B}$ satisfaisant à $(*)$ et tels a , b et b^* commutent entre eux. On considère l'algèbre stellaire unifère commutative $\mathcal{A}(a,b)$ engendrée par a et b et l'isomorphisme de Gelfand-Neumark $\mathcal{G} : \mathcal{A}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}(a,b))$ associé.*

La fonction $\frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a}$ définie sur $\{\mathcal{G}a \neq 0\}$ se prolonge en un homéomorphisme θ de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}(a,b)$ sur une partie compacte Λ de $\overline{\mathbb{C}}$ et

$$c \longmapsto \mathcal{G}c \circ \overset{-1}{\theta} : \mathcal{A}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda)$$

est un isomorphisme d'algèbres stellaires.

L'isomorphisme réciproque

$$\mathcal{C}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{A}(a,b) \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \overset{-1}{\mathcal{G}}(f\circ\theta)$$

est l'unique morphisme d'algèbre involutive unifère $\Psi : \mathcal{C}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{B}$ tel que

$$\Psi\langle\mathrm{id}\rangle^{-1} = \Psi\frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2} = a \quad \textit{et} \quad \Psi\left(\mathrm{id}\cdot\langle\mathrm{id}\rangle^{-1}\right) = \Psi\frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2} = b \ .$$

Cette application est une isométrie et son image est $\mathcal{A}(a,b)$.

L'isomorphisme réciproque satisfait à la condition puisque les images de a et b dans $\mathcal{C}(\Lambda)$ sont respectivement

$$\mathcal{G}a\circ\theta^{-1} = \frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}b\circ\theta^{-1} = \frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2}$$

par les formules $(***)$. Finalement Ψ est univoquement déterminé sur la sous-algèbre unifère involutive de $\mathcal{C}(\Lambda)$ engendrée par $\frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2}$ et $\frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2}$. Comme ces fonctions séparent les points de Λ , cette sous-algèbre est dense par le théorème de Stone-Weierstraß ; puisque Ψ est continu par le théorème 6.7, Ψ est aussi univoquement déterminé sur $\mathcal{C}(\Lambda)$. $\square$