Chapitre 8

DÉCOMPOSITIONS SPECTRALES

Dans tout ce qui suit F est un espace localement convexe,
σ une intégrale de Radon sur un espace topologique séparé Λ
et
$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma$ une décomposition d'un sous-espace hilbertien dans $F^\dagger$.

Rappelons le lemme 5.12 et le théorème 5.13 : $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est une décomposition de $\mathcal{H}$ dans $F^\dagger$ si, et seulement si, $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ pour tout $\varphi \in F$ et $\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2$ est une semi-norme de Mackey sur F .

Version du 6 septembre 2004

8.1 Les opérateurs de multiplications

LEMME *Soient* $\alpha : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction* σ*-mesurable et* $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(i) *Si* $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ *, on a* $\alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(ii) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, on a* $1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta\ ,\ 1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(iii) *On a* $\zeta = \lim_k 1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta$ *dans* $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(iv) *Si* $\|\alpha \cdot \zeta\|_2 < \infty$ *, alors* $\alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Démonstration de (i) Si $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a

$$\|\alpha \cdot \zeta\|_2^2 = \int^* \|\alpha(\lambda) \cdot \zeta(\lambda)\|_\lambda^2 \, d\sigma(\lambda) \leqslant \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \int^* \|\zeta(\lambda)\|_\lambda^2 \, d\sigma(\lambda) = \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \|\zeta\|_2^2 < \infty \ .$$

D'après la remarque 5.12.4, il existe une suite $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$ telle que $\zeta = \lim_k \zeta_k$ dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$; mais comme

$$\|\alpha \cdot \zeta_k - \alpha \cdot \zeta\|_2^2 \leqslant \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \|\zeta_k - \zeta\|_2^2 \longrightarrow 0 \ ,$$

il vient

$$\alpha \cdot \zeta = \lim_k \alpha \cdot \zeta_k \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \ ,$$

puisque $\alpha \cdot \zeta_k \in \left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$.

Démonstration de (ii) C'est immédiat, puisque $1_{\{|\alpha| \leqslant k\}}\ ,\ 1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$.

Démonstration de (iii) On a $\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{|\alpha| \leqslant k\}$ et

$$\left\|1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta - \zeta\right\|_\diamond = \left\|1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \zeta\right\|_\diamond \leqslant \|\zeta\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ .$$

Puisque $1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \|\zeta\|_\diamond$ est σ-mesurable, on obtient

$$\lim_k \left\|1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta - \zeta\right\|_2^2 = \lim_k \int 1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \|\zeta\|_\diamond^2 \, d\sigma = 0$$

par le théorème de Lebesgue.

Démonstration de (iv) Si $\|\alpha \cdot \zeta\|_2 < \infty$, on obtient

$$\left\|1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta - \alpha \cdot \zeta\right\|_\diamond = \left\|1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta\right\|_\diamond \leqslant \|\alpha \cdot \zeta\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ ,$$

et puisque $1_{\{|\alpha|>k\}} \cdot |\alpha| \cdot \|\zeta\|_\diamond$ est σ-mesurable, on en déduit

$$\lim_k \left\|1_{\{|\alpha|\leqslant k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta - \alpha \cdot \zeta\right\|_2^2 = \lim_k \int 1_{\{|\alpha|>k\}} \cdot |\alpha|^2 \cdot \|\zeta\|_\diamond^2 \, d\sigma = 0$$

par le théorème de Lebesgue. □

Grâce à ce lemme nous pouvons introduire les notations suivantes :

DEFINITION 1 Posons

$$\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) := \left\{\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \;\middle|\; \|\alpha \cdot \zeta\|_2 < \infty\right\}$$

et

$$M_\alpha : \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) : \zeta \longmapsto \alpha \cdot \zeta \ .$$

REMARQUE Rappelons que $\mathbf{L}^\infty(\sigma)$ est muni de la norme supérieure essentielle ! On a donc $|\alpha| \leqslant \|\alpha\|_\infty$ localement σ-p.p. .

Nous utiliserons comme précédemment (cf. exemple 1.2.6 et 6.10) la notation

$$\langle \mathrm{id} \rangle := 1 + |\mathrm{id}|^2 \ .$$

THEOREME

(i) Si $\alpha : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction σ-mesurable, l'opérateur M_α est normal et $M_\alpha^* = M_{\overline{\alpha}}$. En particulier $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est un espace de Hilbert pour la norme définie par M_α .

Si A est une partie σ-mesurable sur laquelle α est essentiellement bornée, alors $1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \subset \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Les noyaux de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ sont respectivement $M_{\langle\alpha\rangle^{-1}}$ et $M_{|\alpha|^2 \cdot \langle\alpha\rangle^{-1}}$.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ l'opérateur M_α est borné dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de norme $\leqslant \|\alpha\|_\infty$. L'application

$$M : \alpha \longmapsto M_\alpha : \mathbf{L}^\infty(\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)\right)$$

est linéaire, involutive, i.e. $M_\alpha^* = M_{\overline{\alpha}}$, multiplicative, i.e. $M_{\alpha\cdot\beta} = M_\alpha M_\beta$ pour tout $\beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ et continue de norme 1 .

(iii) Pour toute partie σ-mesurable $A \subset \Lambda$ l'opérateur $M_A := M_{1_A}$ est l'orthoprojecteur sur $1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$,$M_\emptyset = M_0 = 0$ et $M_\Lambda = M_1 = \mathrm{Id}$.

(iv) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

(b) Pour toute partie σ-mesurable A qui n'est pas localement σ-négligeable, on a

$$1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \neq \{0\} \ .$$

(c) Toute partie σ-mesurable A telle que $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. est localement σ-négligeable.

Démonstration de (i) Si $\zeta \in 1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et α est essentiellement bornée sur A , on a $\alpha \cdot \zeta = 1_A \cdot \alpha \cdot \zeta$ σ-p.p., donc $\alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ par le lemme 8.1. L'opérateur M_α est de domaine dense. En effet, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a $1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ par le lemme (ii) et $\zeta = \lim_k 1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta$ par le lemme (iii). Il est fermé car $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est un espace de Hilbert pour la norme en graphe $\|\cdot\|_\alpha$. En effet si $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans cet espace, on a $\zeta := \lim_k \zeta_k$ et $\theta := \lim_k \alpha \cdot \zeta_k$ dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Mais par la proposition 5.12, il existe une sous-suite (k_l) de $\mathbb{N}$ telle que $\zeta := \lim_l \zeta_{k_l}$ et $\theta := \lim_l \alpha \cdot \zeta_{k_l}$ ponctuellement. On en déduit que $\theta = \alpha \cdot \zeta$, puis que $\zeta = \lim_k \zeta_k$ dans $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Pour calculer le noyau de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, soient $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\theta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. On a

$$(\zeta | \theta)_{\mathbf{L}^2} = \int \left(\langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \middle| \theta\right)_\diamond d\sigma + \int \left(\alpha \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \middle| \alpha \cdot \theta\right)_\diamond d\sigma =$$

$$= \left(\langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \middle| \theta\right)_\alpha ,$$

car $\langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Ce noyau est donc $\zeta \longmapsto \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta$. Déterminons maintenant celui de $\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Remarquons tout d'abord que

$$\|\alpha \cdot \theta\|^2_{\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha} = \inf_{\gamma \in \mathbf{L}^2_\alpha, \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \theta} \|\gamma\|^2_\alpha = \left\|1_{\{\alpha \neq 0\}} \cdot \theta\right\|_\alpha = \int \langle\alpha\rangle \cdot \|\theta\|^2_\diamond \cdot 1_{\{\alpha \neq 0\}} \, d\sigma .$$

On a alors

$$(\zeta | \alpha \cdot \theta)_{\mathbf{L}^2} = \int \langle\alpha\rangle \cdot \left(\overline{\alpha} \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \middle| \theta\right)_\diamond \cdot 1_{\{\alpha \neq 0\}} \, d\sigma = \left(\alpha \cdot \overline{\alpha} \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \middle| \alpha \cdot \theta\right)_{\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha} ,$$

car $\overline{\alpha} \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Ce noyau est donc $\zeta \longmapsto |\alpha|^2 \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta$.

Nous avons ainsi prouvé que

$$\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) + \alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) ,$$

donc que M_α est normal par le lemme 7.7. Ainsi $\mathcal{D}(M_\alpha^*) = \mathcal{D}(M_\alpha) = \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2_{\overline{\alpha}}\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, et comme pour tout $\zeta, \theta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a

$$(\theta | M_\alpha^* \zeta) = (\alpha \cdot \theta | \zeta)_{\mathbf{L}^2} = (\theta | \overline{\alpha} \cdot \zeta)_{\mathbf{L}^2} = (\theta | M_{\overline{\alpha}} \zeta) ,$$

on obtient $M_\alpha^* = M_{\overline{\alpha}}$.

Démonstration de (ii) Si $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a

$$\|M_\alpha \zeta\|_2^2 = \int (\alpha \cdot \zeta | \alpha \cdot \zeta)_\diamond \, d\sigma \leqslant \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \int (\zeta | \zeta)_\diamond \, d\sigma = \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \|\zeta\|_2^2 ,$$

donc $\|M_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$. L'application M est évidemment linéaire, involutive et de norme $\leqslant 1$. Si $\beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, alors

$$M_{\alpha \cdot \beta} \zeta = (\alpha \cdot \beta) \cdot \zeta = \alpha \cdot (\beta \cdot \zeta) = M_\alpha M_\beta \zeta .$$

Démonstration de (iii) Si A est une partie σ-mesurable de Λ , comme

$$1_A^2 = 1_A = \overline{1_A} \ ,$$

l'opérateur M_A satisfait par (ii) aux relations

$$M_A^2 = M_{1_A^2} = M_A = M_A^* \ ,$$

donc est un orthoprojecteur. Son image est $1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Démonstration de (iv)

(a) ⇒ (b) Si A n'est pas localement σ-négligeable, on a $\|M_A\| = \|1_A\|_\infty \neq 0$, donc $M_A \neq 0$.

(b) ⇒ (c) Si $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. , alors $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ ponctuellement σ-p.p. par le théorème 5.12 ou directement en constatant que, pour tout $\varphi \in F$, on a $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 = \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle = 0$ σ-p.p. . Ainsi $\left|1_A \cdot \widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right| = \{0\}$ et en utilisant l'exercice 5.12 on obtient

$$1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}\right) = \overline{\left|1_A \cdot \widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|}^{\mathbf{\Lambda}^2} = \{0\} \ ;$$

(b) montre alors que A est localement σ-négligeable.

(c) ⇒ (a) Il nous suffit de prouver que, pour tout $\lambda < \|\alpha\|_\infty$, on a $\lambda \leqslant \|M_\alpha\|$. Mais $A := \{\lambda < |\alpha|\}$ n'est pas localement σ-négligeable, donc on n'a pas $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ ponctuellement σ-p.p. . Il existe donc un $\varphi \in F$ tel que $\left\{1_A \cdot \widehat{h}\varphi \neq 0\right\}$ ne soit pas σ-négligeable et il vient $\left\|1_A \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2^2 \neq 0$, ainsi que

$$\left\|M_\alpha\left(1_A \cdot \widehat{h}\varphi\right)\right\|_2^2 = \int 1_A \cdot |\alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 \geqslant \lambda^2 \cdot \int 1_A \cdot \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 = \lambda^2 \cdot \left\|1_A \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2^2 \ ,$$

ce qui finit la démonstration. □

8.2 Les opérateurs de Toeplitz associés à une décomposition

DEFINITION 1 Soit P l'orthoprojecteur de $\mathbf{L}^2\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$ sur

$$\mathcal{P} := \left(\operatorname{Ker}\left(\int \diamond\, d\sigma\right)\right)^{\perp \mathbf{L}^2} = \overline{\widehat{h}\,(F)}^{\mathbf{L}^2} \ ,$$

l'espace des représentants de Parseval associé à la décomposition de $\mathcal{H}$ (cf. remarque 5.14.1).

Pour toute fonction σ-mesurable $\alpha : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$, nous poserons

$$D\,(\alpha) := \left\{\xi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)\right\} \ ,$$

et désignerons par Z_α l'opérateur dans $\mathcal{H}$ défini par

$$Z_\alpha : D\,(\alpha) \longrightarrow \mathcal{H} : \xi \longmapsto \int \alpha \cdot \widehat{\xi}\, d\sigma \ .$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[d, "\widehat{\diamond}"'] & D\,(\alpha) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \arrow[r, "Z_\alpha"] & \mathcal{H} \\
\mathcal{P} & \mathcal{P} \cap \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] & \mathbf{L}^2\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \arrow[u, "\int \diamond\, d\sigma"'] \\
 & \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \arrow[ur, "M_\alpha"'] &
\end{tikzcd} \ .$$

Puisque $\widehat{\diamond}$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{P}$, dont l'application réciproque est $\int \diamond\, d\sigma$, l'opérateur Z_α est équivalent à l'opérateur dans $\mathcal{P}$ défini par

$$\zeta \longmapsto P\,(\alpha \cdot \zeta) : \mathcal{P} \cap \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{P} \ .$$

DEFINITION 2 Nous dirons que l'opérateur Z_α dans $\mathcal{H}$, ou l'opérateur équivalent dans $\mathcal{P}$, est un *opérateur de Toeplitz* .

REMARQUE Puisque $\mathcal{P} \cap \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$, muni de la norme induite par celle de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$, est un espace de Hilbert comme on le vérifie immédiatement, l'opérateur Z_α est fermé. La première question génante est savoir sous quelles conditions il est de domaine dense, i.e. $\mathcal{P} \cap \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$

est dense dans $\mathcal{P}$. Nous n'étudierons pas cette question ici. Par contre si $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a le diagramme simplifié suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{Z_\alpha} & \mathcal{H} \\ \widehat{\diamond} \Big\downarrow & & \Big\uparrow \int \diamond \, d\sigma \\ \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) & \xrightarrow[M_\alpha]{} & \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \end{array} .$$

DEFINITION 3 Pour toute partie σ-mesurable A de Λ soit

$$\mathcal{H}_A := \int 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}} \, d\sigma$$

le sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ de noyau $h_A := \int 1_A \cdot \widehat{h} \, d\sigma$.

L'exercice 5.12 montre que

$$\mathcal{H}_A = \int \left(\mathbf{L}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}\right)\right) d\sigma = \int \left(1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)\right) d\sigma .$$

THEOREME

(i) *Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ l'opérateur Z_α est borné dans $\mathcal{H}$ de norme $\leqslant \|\alpha\|_\infty$. L'application*

$$Z : \alpha \longmapsto Z_\alpha : \mathbf{L}^\infty(\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

est linéaire, involutive, i.e. $Z_\alpha^* = Z_{\overline{\alpha}}$, positive, i.e. Z_α est un opérateur auto-adjoint positif si $\alpha \geqslant 0$, et continue de norme $\leqslant 1$.

(ii) *Pour toute partie σ-mesurable $A \subset \Lambda$ l'opérateur $Z_A := Z_{1_A}$ est auto-adjoint positif, $Z_\emptyset = Z_0 = 0$ et $Z_\Lambda = Z_1 = \mathrm{Id}$. On a $Z_A(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}_A$ et les noyaux de ces sous-espaces hilbertiens sont respectivement Z_A^2 et Z_A .*

(iii) *Soit A une partie σ-mesurable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(a)* $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ *scalairement σ-p.p. .*
- *(b)* $\mathcal{H}_A = \{0\}$ *.*
- *(c)* $Z_A(\mathcal{H}) = \{0\}$ *.*

(iv) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(a)* *L'application*

$$\int \diamond \, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est injective, i.e. $\widehat{h}(F)$ est dense dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

- *(b)* *Z est multiplicative, i.e. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a $Z_{\alpha\beta} = Z_\alpha Z_\beta$.*
- *(c)* *Pour toute partie σ-mesurable A l'opérateur Z_A est un orthoprojecteur, i.e.*

$$Z_A^2 = Z_A \quad ou \quad Z_A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_A .$$

(d) *Pour toute partie* σ*-mesurable* A , *on a*

$$\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A} = \{0\} \ .$$

Dans ce cas, Z_A *est l'orthoprojecteur de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{H}_A = Z_A(\mathcal{H})$. *Si les parties* σ*-mesurables* A, B *sont disjointes, on a* $\mathcal{H}_A \perp \mathcal{H}_B$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \boxplus \mathcal{H}_{\complement A}$.

Démonstration de (i) La première partie est évidente par le théorème 8.1, puisque $\widehat{\diamond}$ et $\int \diamond \, d\sigma$ sont de norme $\leqslant 1$ et adjointes l'une de l'autre :

$$\|Z_\alpha\| = \left\| \left(\int \diamond \, d\sigma \right) \circ M_\alpha \circ \widehat{\diamond} \right\| \leqslant \|M_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$$

et

$$Z_\alpha^* = \left(\left(\int \diamond \, d\sigma \right) \circ M_\alpha \circ \widehat{\diamond} \right)^* = \left(\int \diamond \, d\sigma \right) \circ M_{\overline{\alpha}} \circ \widehat{\diamond} = Z_{\overline{\alpha}} \ .$$

La positivité découle du fait que $\widehat{\xi}$ est le représentant de Parseval de ξ , donc que

$$(\xi \,| Z_\alpha \xi) = \int \alpha \cdot \left(\widehat{\xi} \middle| \widehat{\xi} \right) \, d\sigma \geqslant 0 \ .$$

Démonstration de (ii) Puisque 1_A est une fonctions réelle, l'opérateur Z_A est auto-adjoint. On a évidemment $Z_0 = 0$ et

$$Z_1 \xi = \int 1 \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma = \xi \ .$$

Le noyau de $Z_A(\mathcal{H})$ est $Z_A Z_A^* = Z_A^2$ par l'exemple 5.4.5. Puisque Z_A est un opérateur auto-adjoint positif, c'est le noyau d'un sous-espace hilbertien de $\mathcal{H}$. Dans $F^\dagger$ sont noyau est

$$h^\dagger Z_A h = \int 1_A \cdot \widehat{h} \, d\sigma = h_A$$

par la proposition 5.5, ce qui finit de montrer que ce sous-espace hilbertien est $\mathcal{H}_A$.

Démonstration de (iii) Pour toute partie σ-mesurable A , on a $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, on a $1_A \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h} \varphi \right\rangle = 0$ σ-p.p. par les formules de polarisation (cf. proposition 1.3), donc à $\int 1_A \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h} \varphi \right\rangle \, d\sigma = 0$ pour tout $\varphi \in F$. Mais cette relation signifie que $\int 1_A \cdot \widehat{h} \, d\sigma = 0$. Elle est alors successivement équivalente à $\mathcal{H}_A = \{0\}$, puis à $Z_A = 0$ et finalement à $Z_A(\mathcal{H}) = \{0\}$.

Démonstration de (iv)

(a) $\Rightarrow$ (b) Si $\int \diamond \, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$ est injective, $\beta \cdot \widehat{\xi}$ est le représentant de Parseval de $Z_\beta \xi$. Par suite

$$Z_\alpha Z_\beta \xi = \int \alpha \cdot \left(\beta \cdot \widehat{\xi} \right) \, d\sigma = Z_{\alpha\beta} \xi \ .$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Si Z est multiplicative, on a $Z_A^2 = Z_{1_A^2} = Z_A$, ce qui par (ii) est équivalent à $Z_A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_A$. Puisque Z_A est auto-adjoint, c'est un orthoprojecteur.

(c) $\Rightarrow$ (d) Si $\xi \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A}$, on a $\xi = Z_A \xi = Z_{\complement A} \xi = Z_A Z_{\complement A} \xi$, d'où le résultat puisque

$$Z_A Z_{\complement A} = Z_A (\mathrm{Id} - Z_A) = Z_A - Z_A^2 = Z_A - Z_A = 0 \ .$$

(d) ⇒ (a) Si $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\int \zeta \, d\sigma = 0$, alors pour toute partie σ-mesurable A , on a

$$\int 1_A \cdot \zeta \, d\sigma = -\int 1_{\complement A} \cdot \zeta \, d\sigma \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A} = \{0\} \ ,$$

donc $\int 1_A \cdot \zeta \, d\sigma = 0$. Pour tout $\varphi \in F$, on a donc $\int 1_A \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle \, d\sigma = 0$ quel que soit la partie σ-mesurable A , donc $\langle \varphi | \zeta \rangle = 0$ σ-presque partout (cf. exemple 1.16.1). Par la remarque 5.12.2, on en déduit que $\zeta = 0$ σ-presque partout, ce qui finit de prouver que $\int$ est injective.

Finalement si ces propriétés sont satisfaites, quel que soient les parties σ-mesurables A, B disjointes, on obtient $\mathcal{H}_A = Z_A(\mathcal{H}) \perp Z_B(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_B$, puisque Z est multiplicative et donc $Z_A Z_B = Z_{A \cap B} = Z_\emptyset = \{0\}$. □

8.3 Les décompositions non-dégénérées et directes

Les hypothèses de mesurabilité étant très faibles, il est facile de construire des exemples pathologiques. Une manière de les éviter est de supposer que $\widehat{h}$ est σ-mesurable au sens de Lusin, mais avec l'inconvénient de gêner le développement de la théorie. Cette mesurabilité est par contre très utile en pratique.

EXEMPLE Soient $A \subset [0,1]$ et $\widehat{\mathcal{H}} : [0,1] \longrightarrow Hilb\left(\mathbb{K}^{[0,1]}\right) : \lambda \longmapsto \mathbb{K} \cdot 1_A(\lambda) \cdot 1_{\{\lambda\}}$. On a

$$\widehat{h} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(\mathbb{K}^{([0,1])}, \mathbb{K}^{[0,1]}\right) = \mathbb{K}^{[0,1]^2} : \lambda \longmapsto 1_A(\lambda) \cdot \left|1_{\{\lambda\}}\right\rangle \left\langle 1_{\{\lambda\}}\right| \ ,$$

cette application est scalairement $\lambda_{[0,1]}$-mesurable et

$$\int \widehat{\mathcal{H}}\, d\lambda_{[0,1]} = \{0\} \ .$$

En outre $\left\{1_A \cdot 1_{\{\cdot\}} = 0\right\} = \complement A$ n'est pas nécessairement $\lambda_{[0,1]}$-mesurable.

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{K}^{([0,1])}$, l'application

$$\lambda \longmapsto \left\langle \varphi \left| 1_{\{\lambda\}} \right.\right\rangle \left\langle 1_{\{\lambda\}} \left| \psi \right.\right\rangle = \overline{\varphi(\lambda)} \cdot \psi(\lambda)$$

est $\lambda_{[0,1]}$-négligeable. □

DEFINITION 1 Nous dirons que la décomposition $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ est *non-dégénérée* si toute partie σ-mesurable A telle que $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. est localement σ-négligeable.

SCOLIE ***1*** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La décomposition $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ est non-dégénérée.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

(iii) Pour toute partie σ-mesurable A qui n'est pas localement σ-négligeable, on a $\mathcal{H}_A \neq \{0\}$.

(iv) Pour toute partie σ-mesurable A qui n'est pas localement σ-négligeable, on a $Z_A(\mathcal{H}) \neq \{0\}$.

C'est immédiat par les théorèmes 8.1.iv et 8.2.iii. □

REMARQUE 1 Soit $\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ une application scalairement σ-mesurable. Pour que tout ensemble σ-mesurable A tel que l'on ait $1_A \cdot \zeta = 0$ scalairement localement σ-p.p. soit localement σ-négligeable, il faut et il suffit que, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ tel que $1_K \cdot \zeta = 0$ scalairement σ-p.p. , on ait $\sigma(K) = 0$.

C'est immédiat puisqu'une partie est localement σ-négligeable si, et seulement si, toute partie compacte qu'elle contient est σ-négligeable. □

LEMME *Si $\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ est une application continue, ou plus généralement σ-mesurable au sens de Lusin, alors les ensembles $\{\zeta \neq 0\}$ et $\{\zeta = 0\}$ sont σ-mesurable. En outre* *(i) On a $\zeta = 0$ scalairement localement σ-p.p. si, et seulement si, $\zeta = 0$ localement σ-p.p. .*

(ii) Pour que tout ensemble σ-mesurable A tel que l'on ait $1_A \cdot \zeta = 0$ scalairement localement σ-p.p. soit localement σ-négligeable, il faut et il suffit que $\zeta \neq 0$ localement σ-p.p. .

La démonstration de la première partie est analogue à celle faite pour la proposition 15.11 du cours d'Analyse [17]. En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$, il existe une suite $(L_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{K}(K)$ telle que $N := K \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k$ soit σ-négligeable et $\zeta_{|L_k}$ soit continue pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\{\zeta \neq 0\} \cap K = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\widehat{h}_{|L_k} \neq 0\right\}\right) \cup \widetilde{N} \quad \text{pour un certain } \widetilde{N} \subset N \ ,$$

donc $\{\zeta \neq 0\} \cap K$ est σ-mesurable ; on en déduit que $\{\zeta \neq 0\}$ est σ-mesurable (cf. cours d'Analyse [17], théorème 15.9.i).

Démonstration de (i) La condition est évidemment suffisante, car $\{\zeta \neq 0\} \supset \{\langle\varphi|\,\zeta\rangle \neq 0\}$ pour tout $\varphi \in F$. Réciproquement, soit $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ tel que $K \subset \{\zeta \neq 0\}$; avec les notations ci-dessus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in L_k$, il existe $\varphi \in F$ tel que $\langle\varphi|\,\zeta(\lambda)\rangle \neq 0$. Par la compacité de L_k , il existe une suite finie $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \subset F$ telle que

$$L_k \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left\{\left\langle \varphi_j \right| \zeta\right\rangle \neq 0\} \ .$$

Mais comme chaque ensemble $\{\langle\varphi|\,\zeta \neq 0\rangle\}$ est localement σ-négligeable, on en déduit que L_k est σ-négligeable, donc aussi K .

Démonstration de (ii) La condition est évidemment nécessaire, car $1_{\{\zeta=0\}} \cdot \zeta = 0$ partout, donc $\{\zeta = 0\}$ est localement σ-négligeable par la remarque, ce qui montre que $\zeta \neq 0$ localement σ-p.p. . Réciproquement si $\zeta \neq 0$ localement σ-p.p. et $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ tel que $1_K \cdot \zeta = 0$ scalairement σ-p.p. , on a $1_K \cdot \zeta = 0$ σ-p.p. par (i), donc $\sigma(K) = 0$. ——— □

REMARQUE 2 Sans l'hypothèse de mesurabilité (ii) est faux comme le montre l'exemple ci-dessus. On a $\{\zeta = 0\} = \emptyset$ et $1_A \cdot \zeta = 0$ est scalairement σ-négligeable quel que soit la partie A .

PROBLEME Si $\widehat{h} = \widehat{h'}$ scalairement (localement) σ-p.p. , que peut-on dire de $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}'}\right)$? Pour $\varphi \in F$, est-ce que $\widehat{h'}\varphi$ est un champ à valeurs dans $\widehat{\mathcal{H}}$? Probablement non en considérant un cas dégénéré.

DEFINITION 2 Nous dirons que la décomposition $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ est *directe* si elle est non-dégénérée et si l'application

$$\int \diamond \, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est injective.

Dans ce cas $\int \diamond \, d\sigma$ est unitaire et nous écrirons

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \widehat{\mathcal{H}} \, d\sigma \quad \text{dans } F^{\dagger} \ .$$

SCOLIE 2 ***Calcul fonctionnel borné***

Soit $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ *une décomposition de* $\mathcal{H}$ *non-dégénérée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La décomposition* $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ *de* $\mathcal{H}$ *est directe.*

(ii) Z *est multiplicative, i.e. pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$ *, on a* $Z_{\alpha\beta} = Z_{\alpha} Z_{\beta}$ *.*

(iii) *Pour toute partie* σ*-mesurable* A *l'opérateur* Z_A *est un orthoprojecteur, i.e.*

$$Z_A^2 = Z_A \quad \text{ou} \quad Z_A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_A \ .$$

(iv) *Pour toute partie* σ*-mesurable* A *, on a*

$$\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A} = \{0\} \ .$$

Dans ce cas, Z_A *est l'orthoprojecteur de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{H}_A = Z_A(\mathcal{H})$ *. Si les parties* σ*-mesurables* A, B *sont disjointes, on a* $\mathcal{H}_A \perp \mathcal{H}_B$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \boxplus \mathcal{H}_{\complement A}$ *.*

Nous avons recopier le théorème 8.2.iv. ———— $\square$

8.4 Décompositions unidimensionnelles

Soient

$$\epsilon : \lambda \longmapsto \epsilon_\lambda : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$$

une famille scalairement σ-mesurable de vecteurs dans $F^\dagger$ et

$$\mathbb{K} \cdot \epsilon : \Lambda \longrightarrow Hilb\left(F^\dagger\right) : \lambda \longmapsto \mathbb{K} \cdot \epsilon_\lambda$$

avec $\|\epsilon_\lambda\|_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $\epsilon_\lambda \neq 0$.

La famille correspondante des noyaux est

$$|\epsilon\rangle \langle\epsilon| : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}\left(F, F^\dagger\right) \ .$$

Elle est scalairement σ-mesurable.

REMARQUE $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$ est l'espace vectoriel des classes (modulo σ-p.p.) de champs de la forme $\zeta \cdot \epsilon$ pour une fonction $\zeta : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\|\zeta\|_2^2 = \int |\zeta|^2 \, d\sigma < \infty$ et que $\zeta \cdot \langle\epsilon| \varphi\rangle$ soit σ-mesurable pour tout $\varphi \in F$.

EXEMPLE Reprenons l'exemple 8.3. Soient $A \subset [0,1]$ et $\epsilon : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}^{[0,1]} : \lambda \longmapsto 1_A(\lambda) \cdot 1_{\{\lambda\}}$. L'ensemble $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \mathbb{K} \cdot 1_{\{\diamond\}}\right)$ est formé des classes modulo l'égalité $\lambda_{[0,1]}$-p.p. de fonction ζ quelconques sur $[0,1]$ telles que $\zeta = 0$ sur $\complement A$ et $\int^* |\zeta|^2 \, d\lambda_{[0,1]}$. On a $\left| |\epsilon\rangle \langle\epsilon| \left(\mathbb{K}^{([0,1])}\right) \right\rangle = \{0\}$, donc $\mathbf{L}^2\left(\lambda_{[0,1]}, 1_A \cdot \mathbb{K} \cdot 1_{\{\diamond\}}\right) = \{0\}$, mais

$$\mathbf{L}^2\left(\lambda_{[0,1]}\right) \cdot 1_A \cdot 1_{\{\diamond\}} = 1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\lambda_{[0,1]}\right) \subset \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \mathbb{K} \cdot 1_{\{\diamond\}}\right) \ .$$

THEOREME *La famille de noyaux $|\epsilon\rangle \langle\epsilon|$ est scalairement σ-intégrable si, et seulement si, ϵ est scalairement de carré σ-intégrable, i.e. $\langle\epsilon| F\rangle \subset \mathbf{L}^2(\sigma)$.*

Dans ce cas

(i) Pour que $\int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$ soit un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$, il faut et il suffit que

$$\langle\epsilon| : \varphi \longmapsto \langle\epsilon| \varphi\rangle : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$$

soit continue pour la topologie de Mackey sur F .

(ii) Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ de noyau h . Pour que l'on ait

$$\mathcal{H} = \int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma \ ,$$

il faut et il suffit que

$$\|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|\langle\epsilon| \varphi\rangle\|_2 \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(iii) On a

$$\left| |\epsilon\rangle \langle\epsilon| (F) \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right| \subset \mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) \subset \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon \subset \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) \ ,$$

et les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *La décomposition* $\int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$ *est non-dégénérée.*

(b) *Toute partie* σ*-mesurable* A *telle que* $1_A \cdot \epsilon = 0$ *scalairement* σ*-p.p. est localement* σ*-négligeable.*

(c) $\left| \langle \epsilon | F \rangle \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right|$ *est dense dans* $\mathbf{L}^2(\sigma)$.

(d) *On a* $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) = \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$.

(iv) *Si* $\epsilon : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ *est continue, plus généralement* σ*-mesurable au sens de Lusin, alors la décomposition* $\int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$ *est non-dégénérée.*

(v) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *La décomposition est directe, i.e.* $\mathcal{H} = \int^\oplus \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$.

(b) *L'application*

$$\zeta \longmapsto \int \zeta \cdot \epsilon \, d\sigma : \mathbf{L}^2(\sigma) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est unitaire.

(c) $\langle \epsilon | F \rangle$ *est dense dans* $\mathbf{L}^2(\sigma)$.

La première partie n'est qu'une reformulation du lemme 5.12.iv, puisque

$$|\epsilon\rangle \langle \epsilon | \varphi = \langle \epsilon | \varphi \rangle \cdot \epsilon ,$$

donc

$$\left\| \, |\epsilon\rangle \langle \epsilon | \varphi \right\|_\diamond = \| \langle \epsilon | \varphi \rangle \cdot \epsilon \|_\diamond = | \langle \epsilon | \varphi \rangle | \ ,$$

en remarquant que $\epsilon_\lambda = 0$ entraîne évidemment $\langle \epsilon_\lambda | \varphi \rangle = 0$.

Démonstration de (i) C'est l'équivalence (ii)$\Longleftrightarrow$(iii) du théorème 5.13.

Démonstration de (ii) Cela découle du théorème d'unicité 5.3.

Démonstration de (iii) Pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a

$$\left| |\epsilon\rangle \langle \epsilon | \varphi \right\rangle \left\langle f \right| = \overline{f} \cdot \langle \epsilon | \varphi \rangle \cdot \epsilon \quad \text{et} \quad \overline{f} \cdot \langle \epsilon | \varphi \rangle \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ ,$$

ce qui prouve l'inclusion $\left| |\epsilon\rangle \langle \epsilon | (F) \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right| \subset \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$; la remarque montre que $\mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon \subset \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$. Pour montrer que $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) \subset \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$, il nous suffit de prouver que $\mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$ est un sous-espace vectoriel complet de $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$, puisque $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$ est par définition l'adhérence de $\left| |\epsilon\rangle \langle \epsilon | (F) \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right|$ dans $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$. Considérons l'application

$$\Phi : \mathbf{L}^2(\sigma) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon \subset \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) : \zeta \longmapsto \zeta \cdot \epsilon \ .$$

On a

$$\|\zeta \cdot \epsilon\|_2^2 = \int_\Lambda^* \|\zeta(\lambda) \cdot \epsilon(\lambda)\|_{\mathbb{K} \cdot \epsilon_\lambda}^2 \, d\sigma(\lambda) = \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma \leqslant \|\zeta\|_2^2 \ ,$$

ce qui montre que Φ est continue, et

$$\operatorname{Ker} \Phi = \left\{ \theta \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ \middle| \ \int^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\theta|^2 \, d\sigma = 0 \right\} \ .$$

La norme sur $\mathbf{L}^2(\sigma) / \operatorname{Ker} \Phi$, qui est un espace de Hilbert, est donnée par

$$\|\zeta + \operatorname{Ker} \Phi\|^2 = \inf_{\theta \in \zeta + \operatorname{Ker} \mathbf{\Phi}} \|\theta\|_2^2 \ .$$

On a d'une part

$$\left\|\zeta + \mathrm{Ker}\,\Phi\right\|^2 \geqslant \inf_{\theta\in\zeta+\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\Phi}} \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon\neq 0\}} \cdot |\theta|^2 \, d\sigma \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\theta\in\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\Phi}} \left(\int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon\neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma - \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon\neq 0\}} \cdot |\theta-\zeta|^2 \, d\sigma\right) = \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon\neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma \ .$$

D'autre part pour tout $s \in \mathcal{S}(X)$ tel que $s \geqslant 1_{\{\epsilon\neq 0\}} \cdot |\zeta|^2$, en posant $\theta_s := 1_{\left\{s\geqslant|\zeta|^2\right\}} \cdot \zeta$, on a

$$\{\theta_s \neq \zeta\} = \left\{s < |\zeta|^2\right\} \subset \{\epsilon = 0\} \ ,$$

donc $\theta_s \cdot \epsilon = \zeta \cdot \epsilon$, i.e. $\theta_s \in \zeta + \mathrm{Ker}\,\Phi$. Mais comme $|\theta_s|^2 \leqslant s$, on obtient

$$\left\|\zeta + \mathrm{Ker}\,\Phi\right\|^2 = \inf_{\theta\in\zeta+\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\Phi}} \left\|\theta\right\|_2^2 \leqslant \int^* |\theta_s|^2 \, d\sigma \leqslant \int^* s \, d\sigma \ .$$

En prenant l'infimum on obtient finalement

$$\left\|\zeta + \mathrm{Ker}\,\Phi\right\|^2 = \int^* 1_{\{\epsilon\neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma = \left\|\zeta\cdot\epsilon\right\|_2^2$$

et montre que $\mathbf{L}^2(\sigma)\cdot\epsilon \approx \mathbf{L}^2(\sigma)/\,\mathrm{Ker}\,\Phi$ est complet.

Ces inclusions montrent l'équivalence (c)$\Longleftrightarrow$(d).

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) La formule de polarisation montre que $1_A \cdot |\epsilon\rangle\langle\epsilon| = 0$ scalairement σ-p.p. est équivalent à $1_A\cdot\epsilon = 0$ scalairement σ-p.p.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $g \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ est orthogonal à $\left|\langle\epsilon|\, F\rangle\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\int |g| \cdot |\langle\epsilon|\,\varphi\rangle| \cdot 1_{\{g\neq 0\}} \, d\sigma = \int g \cdot \langle\epsilon|\,\varphi\rangle \cdot \overline{\mathrm{signum}\, g} \cdot \overline{\mathrm{signum}\,\langle\epsilon|\,\varphi\rangle} \cdot 1_{\{g\neq 0\}} \, d\sigma = 0 \ ,$$

puisque $\overline{\mathrm{signum}\, g}\cdot\mathrm{signum}\,\overline{\langle\epsilon|\,\varphi\rangle}\cdot 1_{\{g\neq 0\}} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, donc $1_{\{g\neq 0\}}\cdot\langle\epsilon|\,\varphi\rangle = 0$ σ-p.p. ; (b) montre alors que $\{g \neq 0\}$ est localement σ-négligeable, donc σ-négligeable puisque cet ensemble est σ-modéré. Ceci finit de prouver que $g = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Si K est une partie compacte telle que, pour tout $\varphi \in F$, on ait $1_K\cdot\langle\epsilon|\,\varphi\rangle = 0$ σ-p.p. , alors $1_K \perp \left|\langle\epsilon|\, F\rangle\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$, donc $\sigma(K) = 0$.

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) C'est une conséquence des inclusions, car on a

$$\left||\epsilon\rangle\langle\epsilon|\,(F)\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right| = \left[\left|\langle\epsilon|\, F\rangle\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|\right]\cdot\epsilon \ .$$

Démonstration de (iv) Par hypothèse on a $\epsilon \neq 0$ partout, donc $\epsilon \neq 0$ scalairement localement σ-p.p. par le lemme 8.3.ii.

Démonstration de (v) C'est immédiat par définition et (iii). □

EXEMPLE 1 (Décomposition triviale) Si σ une intégrale de Radon sur un espace localement compact Λ , alors

$$\mathbf{L}^2(\sigma) = \int^\oplus \mathbb{K}\cdot\varepsilon_\lambda \, d\sigma(\lambda) \quad \text{dans } \mathcal{M}(\Lambda) \ ,$$

où ε_λ désigne l'intégrale de Dirac au point $\lambda \in \Lambda$.

L'application $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}(\Lambda) : \lambda \longmapsto \varepsilon_\lambda$ est un homéomorphisme sur son image. Les noyaux de $\mathbf{L}^2(\sigma) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$ et $\mathbb{K} \cdot \varepsilon_\lambda \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ sont respectivement

$$\varphi \longmapsto \varphi \cdot \sigma \quad \text{et} \quad |\varepsilon_\lambda\rangle \langle \varepsilon_\lambda| : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \ ;$$

en outre, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(\Lambda)$, on a

$$\langle \varepsilon | \varphi \rangle = \varphi \ ,$$

donc

$$\left\| |\varepsilon\rangle \langle \varepsilon | \varphi \right\|_\diamond = |\langle \varepsilon | \varphi \rangle| = |\varphi| \ ,$$

et par suite

$$\left\| |\varepsilon\rangle \langle \varepsilon | \varphi \right\|_2^2 = \int |\varphi|^2 \, d\sigma = \|\varphi\|_2^2 \ .$$

Le théorème (ii) montre que $(\sigma, \mathbb{K} \cdot \varepsilon)$ est une décomposition de $\mathbf{L}^2(\sigma)$. Elle est non-dégénérée par (iv). Comme $\langle \varepsilon | \mathcal{K}(X) \rangle = \mathcal{K}(X)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$, la décomposition est directe par (v). □

EXEMPLE 2 (Transformation de Fourier)

Rappelons (cf. exemple 4.3.4) que nous avons posé

$$e_\lambda := e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{, pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^n \ ,$$

et

$$e_\diamond : \lambda \longmapsto e_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Alors $(\lambda^n, \mathbb{C} \cdot e_\diamond)$ est une décomposition directe de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot e_\lambda \, d\lambda \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En particulier

$$\int |e_\lambda\rangle \langle e_\lambda| \, d\lambda = \mathrm{Id} : \varphi \longmapsto \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

L'application $e_\diamond$ est évidemment continue. C'est en fait un homéomorphisme sur son image. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on a

$$\langle e_\diamond | \varphi \rangle = \int e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet x} \cdot \varphi(x) \, dx = \mathcal{F}\varphi \ ,$$

donc

$$\left\| |e_\diamond\rangle \langle e_\diamond | \varphi \right\|_\diamond = |\langle e_\diamond | \varphi \rangle| = |\mathcal{F}\varphi| \ ,$$

et par suite

$$\left\| |e_\diamond\rangle \langle e_\diamond | \varphi \right\|_2 = \left(\int |\mathcal{F}\varphi|^2 \, d\lambda^n \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$$

par le théorème de Plancherel 4.11. Ceci montre que $(\lambda^n, \mathbb{C} \cdot e_\diamond)$ est une décomposition non-dégénérée de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. Elle est directe, car

$$\langle e_\diamond | \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rangle = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. □

Remarquons que, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\widehat{\xi} = \mathcal{F}\xi \cdot e_\diamond$, car

$$\xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}\xi = \int \mathcal{F}\xi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda$$

par la proposition 4.10.

EXEMPLE 3 Le théorème de Plancherel-Godement (cf. chapitre 9) est une généralisation de ces exemples.

8.5 Calcul fonctionnel mesurable

On considère une décomposition directe

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma \quad \text{dans } F^{\dagger} \ .$$

Puisque $\int \diamond\, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$ est unitaire, donc Z_α est unitairement équivalent à M_α , en particulier l'image de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est $\mathcal{D}(\alpha)$ et

$$\|Z_\alpha \xi\|^2 = \int |\alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{D}(\alpha) \ ,$$

toute assertion concernant les opérateurs Z_α se prouve donc dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

REMARQUE Dans la décomposition triviale

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \int^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x\, d\mu(x) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

on a $Z = M$!

THEOREME *Soient α, β des fonctions σ-mesurables.*

Z_α est un opérateur normal et $Z_\alpha^* = Z_{\overline{\alpha}}$.

Si A est une partie σ-mesurable sur laquelle α est essentiellement bornée, alors $\mathcal{H}_A \subset D(\alpha)$.

Les noyau de $\mathcal{D}(\alpha) \hookrightarrow \mathcal{H}$ et $Z_\alpha(\mathcal{D}(\alpha)) \hookrightarrow \mathcal{H}$ sont respectivement $Z_{\langle\alpha\rangle^{-1}}$ et $Z_{|\alpha|^2 \cdot \langle\alpha\rangle^{-1}}$

(i) Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a $Z_{a \cdot \alpha} = a \cdot Z_\alpha$.

(ii) Si $|\alpha| \leqslant a \cdot |\beta| + b$ pour certaines constantes $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $D(\beta)$ est dense dans $\mathcal{D}(\alpha)$, et

$$Z_\alpha = \overline{Z_{\alpha|D(\beta)}} \ .$$

(iii) $D(Z_\alpha + Z_\beta) = D(\alpha) \cap D(\beta)$ et $Z_{\alpha+\beta} = \overline{Z_\alpha + Z_\beta}$.

(iv) $D(Z_\alpha Z_\beta) = D(\alpha\beta) \cap D(\beta)$ et $Z_{\alpha\beta} = \overline{Z_\alpha Z_\beta}$.

(v) Si $\beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, alors

$$Z_{\alpha+\beta} = Z_\alpha + Z_\beta \quad \text{et} \quad Z_{\alpha\beta} = Z_\alpha Z_\beta \ .$$

(vi) Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions σ-mesurables telle que

$$\alpha = \lim_k \alpha_k \quad \sigma\text{-p.p.} \quad \text{et} \quad |\alpha_k| \leqslant a \cdot |\beta| + b \text{ pour certains } a, b \in \mathbb{R}_+ \ ,$$

alors pour tout $\xi \in D(\beta)$, on a

$$Z_\alpha \xi = \lim_k Z_{\alpha_k} \xi \quad \text{dans } \mathcal{H} \ .$$

En particulier on peut prendre la suite $\left(1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et on a la formule pour tout $\xi \in D(\alpha)$.

(vii) Pour que $\xi \in \operatorname{Ker} Z_\alpha$ *, il faut et il suffit que*

$$\widehat{\xi} = 0 \quad \sigma\text{-}p.p. \ sur \ \{\alpha \neq 0\} \ ,$$

i.e.

$$\operatorname{Ker} Z_\alpha = \mathcal{H}_{\{\alpha=0\}} \ .$$

(viii) On a $Z_\alpha = 0$ *si, et seulement si,* $\alpha = 0$ σ*-p.p. . En particulier si* $\alpha = \beta$ σ*-p.p. , alors* $Z_\alpha = Z_\beta$ *.*

(ix) Pour que Z_α *soit injectif, il faut et il suffit que l'on ait* $\alpha \neq 0$ σ*-p.p. . Dans ce cas* Z_α *est d'image dense et en définissant*

$$\frac{1}{\alpha} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} : \lambda \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha(\lambda)} & \alpha(\lambda) \neq 0 \\ & si \\ 0 & \alpha(\lambda) = 0 \end{cases} ,$$

on a $Z_\alpha^{-1} = Z_{\frac{1}{\alpha}}$ *.*

(x) Pour que Z_α *soit auto-adjoint, il faut et il suffit que* α *soit réelle* σ*-p.p. .*

(xi) Si $\alpha \leqslant \beta$ σ*-p.p. , alors* $Z_\alpha \leqslant Z_\beta$ *, i.e.* $(\xi|\, Z_\alpha \xi) \leqslant (\xi|\, Z_\beta \xi)$ *pour tout* $\xi \in D(\alpha) \cap D(\beta)$ *.*

(xii) Pour que Z_α *soit auto-adjoint positif, il faut et il suffit que* $\alpha \geqslant 0$ σ*-p.p. .*

(xiii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\operatorname{Ker}(Z_\alpha - z \cdot \mathrm{Id}) = \mathcal{H}_{\{\alpha=z\}} \ .$$

Pour que $z \in \operatorname{Sp}_p T$ *, il faut et il suffit que* $\sigma(\{\alpha = z\}) > 0$ *.*

(xiv) On a $\|Z_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$ *. En particulier* $Z_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *si, et seulement si,* $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ *.*

(xv) Pour que Z_α *soit inversible, il faut et il suffit que*

$$\sigma(\{\alpha = 0\}) = 0 \quad et \quad \frac{1}{\alpha} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma) \ .$$

(xvi) Pour que $z \in \operatorname{Sp} Z_\alpha$*, il faut et il suffit que* $\sigma^*(\{\alpha \in U\}) > 0$ *pour tout voisinage (ouvert)* U *de* z *.*

Toute ces assertions découlent à l'aide de manipulations sur des fonctions du théorème 8.1. La partie initiale de (i).

Démonstration de (i) C'est immédiat.

Démonstration de (ii) L'inégalité montre que $D(\beta) \subset \mathcal{D}(\alpha)$, car pour tout $\eta \in D(\beta)$, on a

$$\|\alpha \cdot \widehat{\eta}\|_2 \leqslant \|(a \cdot |\beta| + b) \cdot \widehat{\eta}\|_2 \leqslant a \cdot \|\beta \cdot \widehat{\eta}\|_2 + b \cdot \|\widehat{\eta}\|_2 < \infty \ .$$

Soit $\xi \in \mathcal{D}(\alpha)$ et posons $B_k := \{|\beta| \leqslant k\}$. On a $1_{B_k} \cdot \widehat{\xi} \in D(\beta)$, et

$$\left\|1_{B_k} \cdot \widehat{\xi} - \widehat{\xi}\right\|_\alpha^2 = \int \left(1 + |\alpha|^2\right) \cdot |1_{B_k} - 1|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_2^2 d\sigma$$

tend vers 0 par le théorème de Lebesgue, puisque $\left(1 + |\alpha|^2\right) \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_2^2 \in \mathbf{L}^1(\sigma)$. La formule découle alors de la proposition 7.2.

Démonstration de (iii) C'est immédiat par (ii), car $|\alpha|, |\beta|, |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, donc

$$D(|\alpha| + |\beta|) \subset D(\alpha) \cap D(\beta) \subset D(\alpha + \beta)$$

et $D(|\alpha| + |\beta|)$ est dense dans $\mathcal{D}(\alpha+\beta)$.

Démonstration de (iv) C'est aussi immédiat par (ii), car $|\alpha \cdot \beta|, |\beta| \leqslant |\alpha \cdot \beta| + |\beta|$.

Démonstration de (v) Cela découle du fait que $T+S$ et TS sont fermés, si T est fermé et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (cf. proposition 7.1.iii et lemme 7.3).

Démonstration de (vi) C'est une conséquence du théorème de Lebesgue, puisque

$$\left\|\alpha_k \cdot \widehat{\xi} - \alpha \cdot \widehat{\xi}\right\|_2^2 = \int |\alpha_k - \alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 \, d\sigma$$

et que

$$|\alpha_k - \alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 \leqslant 8 \cdot \left(a^2 |\beta|^2 + b^2\right) \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 \in \mathbf{L}^1(\sigma) \ .$$

Démonstration de (vii) Pour que $\xi \in \operatorname{Ker} Z_\alpha$, il faut et il suffit que $\xi \in D(\alpha)$ et $\|Z_\alpha \xi\| = 0$, donc que $\alpha \cdot \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\int |\alpha|^2 \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma = 0$, et par suite que $\alpha \cdot \widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. .

Démonstration de (viii) On a $Z_\alpha = 0$ si, et seulement si, $\mathcal{H}_{\{\alpha=0\}} = \operatorname{Ker} Z_\alpha = \mathcal{H}$ d'après (vii), ce qui signifie que $\mathcal{H}_{\{\alpha\neq0\}} = \{0\}$, donc que $\sigma(\{\alpha \neq 0\}) = 0$ puisque la décomposition est non-dégénérée.

Démonstration de (ix) Grâce à (vii) Z_α est injectif si, et seulement si, $\mathcal{H}_{\{\alpha=0\}} = \{0\}$, i.e. si $\alpha \neq 0$ σ-p.p. puisque la décomposition est non-dégénérée. On alors

$$(\operatorname{Im} Z_\alpha)^\perp = \operatorname{Ker} Z_\alpha^* = \operatorname{Ker} Z_{\overline{\alpha}} = \operatorname{Ker} Z_\alpha = \{0\}$$

par la remarque 7.3.2, ce qui montre que Z_α est d'image dense. En outre

$$\overline{Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}}} = \overline{Z_{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha} = Z_{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = Z_1 = \mathrm{Id}$$

par (viii), et comme la formule $(*)$ de 8.2 montre que $\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2_{\frac{1}{\alpha}}\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on obtient $Z_\alpha^{-1} = Z_{\frac{1}{\alpha}}$.

Démonstration de (x) Cela découle de (viii), puisque $Z_\alpha = Z_{\overline{\alpha}}$ est équivalent à

$$0 = \overline{Z_\alpha - Z_{\overline{\alpha}}} = Z_{\alpha - \overline{\alpha}} \ .$$

Démonstration de (xi) On a évidemment

$$(\xi|\, Z_\alpha \xi) = \int \alpha \cdot \left(\widehat{\xi}\middle|\widehat{\xi}\right) d\sigma \leqslant \int \beta \cdot \left(\widehat{\xi}\middle|\widehat{\xi}\right) d\sigma = (\xi|\, Z_\beta \xi) \ .$$

Démonstration de (xii) Il nous suffit par (xi) de prouver la nécessité. Mais d'après (x) la fonction α est réelle σ-p.p. et, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \left(Z_{\{-k\leqslant\alpha<0\}}\xi\middle|\, Z_\alpha Z_{\{-k\leqslant\alpha<0\}}\xi\right) = \int \alpha \cdot 1_{\{-k\leqslant\alpha<0\}} \cdot \|\xi\|^2 \, d\sigma \leqslant 0 \ ,$$

donc $1_{\{\alpha<0\}} \cdot \widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. . Ceci montre que $\mathcal{H}_{\{\alpha<0\}} = \{0\}$, et par suite que $\sigma(\{\alpha < 0\}) = 0$, puisque la décomposition est non-dégénérée.

Démonstration de (xiii) En effet $Z_\alpha - z \cdot \mathrm{Id} = Z_{\alpha - z}$ par (v), donc

$$\operatorname{Ker}(Z_\alpha - z \cdot \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} Z_{\alpha-z} = \mathcal{H}_{\{\alpha=z\}}$$

grâce à (vii). Ainsi $z \in \mathrm{Sp}_p$ si, et seulement si, $\mathcal{H}_{\{\alpha=c\}} \neq \{0\}$, ce qui signifie que $\sigma^*(\{\alpha = c\}) > 0$ puisque la décomposition est non-dégénérée.

Démonstration de (xiv) Tout d'abord on a $\|Z_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$ par la proposition 8.1. Si $0 \leqslant a < \|\alpha\|_\infty$, alors $\sigma^*(\{|\alpha| > a\}) > 0$, donc $\sigma^*(\{k \geqslant |\alpha| > a\}) > 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{\{k \geqslant |\alpha| > a\}} \neq \{0\}$, on a $\widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. sur $\complement\{k \geqslant |\alpha| > a\}$ et il vient

$$\|Z_\alpha \xi\|^2 = \int |\alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma \geqslant \int a^2 \cdot 1_{\{k \geqslant |\alpha| > a\}} \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma = a^2 \cdot \|\xi\|^2 \neq 0\,;$$

on en déduit que $\|Z_\alpha\| \geqslant a$.

Démonstration de (xv) La condition de (ii) est suffisante, car $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$ σ-presque partout, donc

$$Z_{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha \subset Z_1 = \mathrm{Id} = Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}}$$

par la proposition, (iv) et (v). Réciproquement, puisque Z_α est injectif, on a

$$\{0\} = \mathrm{Ker}\, Z_\alpha = \mathcal{H}_{\{\alpha=0\}} \ ,$$

donc $\sigma(\{\alpha = 0\}) = 0$. Comme $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ σ-presque partout, il vient $Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}} \subset \mathrm{Id}$, donc $Z_{\frac{1}{\alpha}} = Z_\alpha^{-1}$ sur $D\left(Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}}\right) = D(1) \cap D\left(\frac{1}{\alpha}\right) = D\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Puisque $Z_{\frac{1}{\alpha}}$ est fermé, on en déduit que

$$Z_{\frac{1}{\alpha}} = Z_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ ,$$

donc que $\frac{1}{\alpha} \in L^\infty(\sigma)$ par (i).

Démonstration de (xvi) Finalement remarquons que $z \notin \mathrm{Sp}\, Z_\alpha$ est équivalent à l'inversibilité de $Z_\alpha - c \cdot \mathrm{Id} = Z_{\alpha - c}$, donc à $\sigma(\{\alpha = z\}) = 0$ et $\frac{1}{\alpha - c} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$. Mais ceci signifie qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que $|\alpha - z| \geqslant \varepsilon$ σ-p.p. , donc que

$$\sigma(\{\alpha \in B(z, \varepsilon)\}) = 0 \ .$$

$\square$

EXERCICE Si α est une fonction σ-mesurable $\geqslant 0$, montrer que

$$Z_\alpha = Z_{\sqrt{\alpha}} Z_{\sqrt{\alpha}} \ .$$

Peut-on généraliser ce résultat ? Au lecteur la fantaisie !

8.6 Le théorème spectral

DEFINITION Soit T un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$. Nous dirons qu'une décomposition directe non-dégénérée $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ dans $F^{\dagger}$ est une *diagonalisation* de T si

$$T = Z_{\kappa}$$

pour une certaine fonction σ-mesurable κ sur Λ . On dit alors que T est *diagonalisable* par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ dans $F^{\dagger}$.

Nous désignerons par $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ le plus petit espace vectoriel $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ contenant $\mathcal{C}^0(\mathbb{C})$ et ayant la propriété :

Si (f_k) est une suite de $\mathcal{V}$ convergente ponctuellement vers une fonction f telle que, pour certains $a, b \in \mathbb{R}_+$, on ait $|f_k| \leqslant a \cdot |f| + b$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $f \in \mathcal{V}$.

On peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des fonctions boréliennes sur $\mathbb{C}$, mais il est plus important de constater que pour toute fonction σ-mesurable α et toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, la fonction $f \circ \alpha$ est σ-mesurable.

THEOREME *Soit T un opérateur fermé dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T est normal.

(ii) L'algèbre $\mathcal{A}(T)$ est commutative.

(iii) Il existe un espace localement convexe tonnelé F tel que $\mathcal{H}$ soit un sous-espace hilbertien de $F^{\dagger}$ et que T soit diagonalisable dans $F^{\dagger}$.

Dans ce cas, il existe une unique application $f \longmapsto f(T)$ de $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ dans l'ensemble des opérateurs normaux dans $\mathcal{H}$ telle que

$$f(T) = Z_{f \circ \kappa} : \xi \longmapsto \int f \circ \kappa \cdot \widehat{\xi}\, d\sigma$$

quelle que soit la diagonalisation de T .

(i) $\Rightarrow$ (ii) C'est le corollaire 7.8.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Puisque $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(A, B)$ est commutative, le théorème 6.10 montre que $\mathcal{A}(T)$ est isomorphe à $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(T))$ et que $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(T)$ s'identifie à la fermeture de $\mathrm{Sp}\,T$ dans la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Pour tout $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, la forme linéaire

$$f \longmapsto (\xi | f(T)\, \xi) : \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(T)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est positive, donc définit une intégrale de Radon σ_{ξ} sur $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(T)$. L'application

$$\mathcal{C}(\mathrm{supp}\,\sigma_{\xi}) \longrightarrow \mathcal{H} : f \longmapsto f(T)\, \xi$$

est une isométrie :

$$\|f(T)\,\xi\|^2 = (\xi\,|f(T)^* f(T)\,\xi) = \left(\xi\,\middle||f|^2(T)\,\xi\right) = \int |f|^2\, d\sigma_\xi\ .$$

Ceci montre que $\mathbf{L}^2(\sigma_\xi)$ est isomorphe à la fermeture $\mathcal{H}_\xi$ du sous-espace vectoriel $F_\xi := \mathcal{A}(T)\,\xi$ dans $\mathcal{H}$, la multiplication par f dans $\mathbf{L}^2(\sigma_\xi)$ correspondant à l'opérateur induit par $f(T)$ dans $\mathcal{H}_\xi$. On a

$$\mathbf{L}^2(\sigma_\xi) = \int^{\oplus} \mathbb{C}\cdot\varepsilon_\lambda\, d\sigma_\xi(\lambda)$$

dans $\mathcal{M}(\operatorname{supp}\sigma_\xi)$; comme

$$F_\xi \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{supp}\sigma_\xi) : f(T)\,\xi \longmapsto f$$

est une bijection, par transposition on obtient une bijection

$$\Phi : \mathcal{M}(\operatorname{supp}\sigma_\xi) \longrightarrow F_\xi^\dagger$$

donc une décomposition directe de $\mathcal{H}_\xi$ dans $F_\xi^\dagger$:

$$\mathcal{H}_\xi = \int^{\oplus} \mathbb{C}\cdot\Phi\varepsilon_\lambda\, d\sigma_\xi(\lambda)\ .$$

En rappelant que

$$a := \langle \mathrm{id}\rangle^{-1} \quad \text{et} \quad b := \mathrm{id}\cdot\langle \mathrm{id}\rangle^{-1}\ ,$$

on a

$$a(T) = (\mathrm{Id} + T^*T)^{-1} = A \quad \text{et} \quad b(T) = T\,(\mathrm{Id} + T^*T)^{-1} = B\ .$$

En considérant les restrictions a_ξ , b_ξ et κ_ξ de a , b et id à $\operatorname{supp}\sigma_\xi \setminus \{\infty\}$, prolongée par 0 à l'infini si nécessaire, les opérateurs induit par A , B et $T = \overline{BA^{-1}}$ dans $\mathcal{H}_\xi$ sont alors respectivement égaux à Z_{a_ξ} , Z_{b_ξ} et

$$\overline{Z_{b_\xi} Z_{\frac{1}{a_\xi}}} = \overline{Z_{\frac{b_\xi}{a_\xi}}} = \overline{Z_{\mathrm{id}_\xi}}\ ,$$

car $\sigma_\xi(\{\infty\}) = 0$.

Il suffit alors de constater, par le lemme de Zorn, qu'il existe une famille $\left(\xi_j\right)_{j\in J}$ telle que

$$\mathcal{H} = \boxplus_{j\in J} \mathcal{H}_{\xi_j}\ ,$$

et on pose

$$(\Lambda,\sigma) := \biguplus_{j\in J}\left(\operatorname{supp}\sigma_{\xi_j}, \sigma_{\xi_j}\right) \quad , \quad F := \bigoplus_{j\in J} F_{\xi_j} \quad , \quad \kappa := \kappa_{\xi_j} \text{ sur } \operatorname{supp}\sigma_{\xi_j}\ .$$

(iii) ⇒ (i) C'est une conséquence évidente du calcul fonctionnel mesurable (théorème 8.5).

Le reste est alors facile. □

DEFINITION On dit que $f \longmapsto f(T)$ est le *calcul fonctionnel mesurable* associé à l'opérateur T . Il nous permet de définir toute une série d'opérateurs à partir de T :

(a) Si P est un polynôme complexe à deux variables, alors en posant $f(\lambda) := P\left(\lambda, \bar{\lambda}\right)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $f(T) = P(T,T^*)$ en général, mais dans certains cas il est nécessaire de prendre la fermeture de $P(T,T^*)$. Par exemple si $P(X,Y) = X - Y$ et T est auto- adjoint, on a $f \circ \kappa = 0$ σ-p.p. , donc $f(T) = 0$; par contre $T - T^*$ est nul, mais seulement défini sur $D(T)$!

(b) $T^{\frac{1}{2}}$, si T est auto-adjoint positif.

(c) $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, si T est un opérateur fermé quelconque.

(d) $T^{\pm}$ tels que $T = T^+ - T^-$ et $T^{\pm}$ auto-adjoints positifs, si T est auto-adjoint.

(e) e^T , $\sin T$, $\cos T$, etc...

(f) $\ln T$, et $T^z := e^{z \cdot \ln T}$ pour $z \in \mathbb{C}$, si T est auto-adjoint positif injectif (i.e. $0 \notin \mathrm{Sp}_p T$), et plus généralement si l'on peut définir une branche du logarithme sur $\mathrm{Sp}\, T$.

8.7 Equations d'évolution

Le calcul fonctionnel nous permet de résoudre certaines équations aux dérivées partielles dont l'une des variables, en général celle du temps, joue un rôle particulier. Considérons par exemple une équation du type

$$\partial_t \zeta (t, x) = L_x \zeta (t, x) \ .$$

On l'interprète comme une équation différentielle ordinaire à valeurs vectorielles, en considérant L_x comme un opérateur dans un certain espace de fonctions ne dépendant que de la variable x .

C'est l'exemple typique d'une *équation d'évolution*

$$\partial \zeta = T\zeta \ ,$$

où T est un opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

DEFINITION Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $\zeta : I \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ est une *solution* de cette équation si ζ est dérivable dans $\mathcal{H}$, i.e. pour tout $t \in I$,

$$\partial \zeta (t) := \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot [\zeta (t+s) - \zeta (t)] \quad \text{existe dans } \mathcal{H} \ ,$$

et si

$$\partial \zeta (t) = T\zeta (t) \quad \text{pour tout } t \in I \ .$$

Dans ce cas, $\zeta : J \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue.

Remarquons qu'une solution ζ est continûment dérivable, i.e. $\partial_t \zeta : I \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue si, et seulement si $T\zeta : I \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue, i.e. $\zeta : I \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ est continue.

On la

PROPOSITION *Soit T un opérateur normal dans $\mathcal{H}$ diagonalisé par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ dans $F^\dagger$. Etant donné $t \in I$, on a*

$$Te^{tT} = Z_{\kappa \cdot e^{t\kappa}} \ ;$$

en particulier $\xi \in D\left(Te^{tT}\right)$ si, et seulement si,

$$\kappa \cdot e^{t\kappa} \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\| \in \mathbf{L}^2 (\sigma) \ .$$

Si $\xi \in D\left(Te^{tT}\right)$ pour tout $t \in I$, alors

$$\zeta : t \longmapsto e^{tT}\xi : I \longrightarrow \mathcal{D}(T)$$

est une solution continûment dérivable de l'équation d'évolution $\partial \zeta = T\zeta$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante, car pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\left|e^{t \cdot z}\right| \leqslant e^{|t \cdot z|} \leqslant e^{|t|} \quad \text{si } |z| \leqslant 1 \ ,$$

donc

$$\left|e^{t \cdot z}\right| \leqslant \left|z \cdot e^{t \cdot z}\right| + e^{|t|} \ ,$$

et le théorème 8.5.ii montre que $D\left(\kappa \cdot e^{t \cdot \kappa}\right) \subset D\left(e^{t \cdot \kappa}\right)$. La formule en découle également.

Il nous reste à prouver que ζ est continûment dérivable et satisfait à l'équation d'évolution. Etant donné $t \in I$, soit $[a, b]$ un voisinage de t dans I . Si $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0 telle que $t + \varepsilon_k \in [a, b]$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_k} \cdot \left[e^{(t+\varepsilon_k) \cdot T} \xi - e^{t \cdot T} \xi\right] = f_k\left(T\right) \xi$$

en ayant posé

$$f_k := \frac{1}{\varepsilon_k} \cdot \left[e^{(t+\varepsilon_k) \cdot \mathrm{id}} - e^{t \cdot \mathrm{id}}\right] \ ,$$

puisque $\xi \in D\left(e^{t \cdot T}\right)$ pour tout $t \in I$. En outre

$$\lim_k f_k\left(z\right) = z \cdot e^{t \cdot z} \ ,$$

et le théorème de la moyenne montre que

$$\left|f_k\left(z\right)\right| \leqslant \sup_{s \in [a,b]} \left|z \cdot e^{s \cdot z}\right| = \sup_{s \in [a,b]} \left|z \cdot e^{s \cdot \mathrm{Re}\, z}\right| \leqslant |z| \cdot \left(e^{a \cdot \mathrm{Re}\, z} + e^{b \cdot \mathrm{Re}\, z}\right) = \left|z \cdot e^{a \cdot z}\right| + \left|z \cdot e^{b \cdot z}\right| \ .$$

Ainsi

$$\left|f_k \circ \kappa\right| \leqslant \left|\kappa \cdot e^{a \cdot \kappa}\right| + \left|\kappa \cdot e^{b \cdot \kappa}\right| \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \, ;$$

mais par hypothèse on a

$$\left[\left|\kappa \cdot e^{a \cdot \kappa}\right| + \left|\kappa \cdot e^{b \cdot \kappa}\right|\right] \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_{\diamond} \in \mathbf{L}^2\left(\sigma\right) \ ,$$

et le théorème 8.5.vi nous permet de conclure : ζ est dérivable et

$$\partial \zeta\left(t\right) = \lim_k f_k\left(T\right) \xi = Z_{\kappa \cdot e^{t \cdot \kappa}} \xi = T e^{t \cdot T} \xi \ .$$

Finalement

$$\lim_k \kappa \cdot e^{(t+\varepsilon_k) \cdot \mathrm{id}} = \kappa \cdot e^{t \cdot \mathrm{id}} \quad \text{ponctuellement}$$

et

$$\left|\kappa \cdot e^{(t+\varepsilon_k) \cdot \mathrm{id}}\right| \leqslant \left|\kappa \cdot e^{a \cdot \kappa}\right| + \left|\kappa \cdot e^{b \cdot \kappa}\right| \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \, ;$$

comme ci-dessus on en déduit que

$$\lim_k T\zeta\left(t + \varepsilon_k\right) = \lim_k T e^{(t+\varepsilon_k) \cdot T} \xi = \lim_k Z_{\kappa \cdot e^{(t+\varepsilon_k) \cdot \kappa}} \xi = Z_{\kappa \cdot e^{t \cdot \kappa}} \xi = T e^{t \cdot T} \xi = T\zeta\left(t\right) \ ,$$

donc que $T\zeta$ est continue, et par suite que $\zeta : I \longrightarrow \mathcal{D}\left(T\right)$ est continue. ——— □

COROLLAIRE ***Equation de la chaleur.*** *Supposons que T est un opérateur auto-adjoint positif de la forme $T = S^* S$ pour un certain opérateur fermé S défini dans $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{G}$. Alors pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, l'équation de la chaleur*

$$\partial \zeta + T\zeta = 0$$

possède une unique solution $\zeta : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{D}\left(T\right)$ continûment dérivable satisfaisant à la condition initiale

$$\lim_{t \to 0+} \zeta\left(t\right) = \xi \ .$$

On a

$$\zeta\left(t\right) = e^{-t \cdot T} \xi \quad \textit{pour tout } t \in I \ ,$$

cette solution est indéfiniment dérivable, satisfait à l'équation

$$\partial^k \zeta + T^k \zeta = 0 \ ,$$

ainsi qu'à

$$\frac{1}{2}\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^t \|S\zeta(s)\|_{\mathcal{G}}^2 \, ds = \frac{1}{2}\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2$$

pour tout $t > 0$ *.*

En outre, si $\xi \in D(T)$ *, on a*

$$\lim_{t\to 0+} \partial\zeta(t) + T\xi = 0 \ .$$

La condition de la proposition appliquée à $-T$ est satisfaite. En effet $\kappa \cdot e^{-t\cdot\kappa} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, puisque $z \longmapsto z \cdot e^{-t\cdot z}$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en $\frac{1}{t}$ et que $\kappa \geqslant 0$ σ-p.p. par le théorème 8.5.xii. Ceci montre que $t \longmapsto e^{-t\cdot T}\xi$ est une solution continûment dérivable. On prouve par récurrence qu'elle est indéfiniment dérivable et satisfait à l'équation donnée en considérant $-T^k$. Par ailleurs, si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}_+^*$ convergente vers 0 , on a

$$\lim_k \exp(-t_k \cdot \kappa) = 1 \quad \text{pontuellement}$$

et

$$|\exp(-t_k \cdot \kappa)| \leqslant 1 \ \sigma\text{-p.p.} \ .$$

Par le théorème 8.5.vi on obtient

$$\lim_k \exp(-t_k \cdot T)\,\xi = \xi \ .$$

Si $\xi \in D(T)$, on obtient de même la dernière assertion, puisque

$$\lim_k \kappa \cdot \exp(-t_k \cdot \kappa) = \kappa \quad \text{ponctuellement}$$

et

$$|\exp(-t_k \cdot \kappa)| \leqslant |\kappa| \ \ \sigma\text{-p.p.} \ .$$

Il nous reste à prouver la formule et l'unicité. Si ζ est une solution continûment dérivable, on a

$$\partial\|\zeta\|_{\mathcal{H}}^2 = \partial(\zeta|\,\zeta)_{\mathcal{H}} = (\partial\zeta|\,\zeta)_{\mathcal{H}} + (\zeta|\,\partial\zeta)_{\mathcal{H}} = -2(\zeta|\,T\zeta)_{\mathcal{H}} =$$

$$= -2(S\zeta|\,S\zeta)_{\mathcal{G}} = -2\|S\zeta\|_{\mathcal{G}}^2 \ ,$$

car $D(T) = D(S^*S) \subset D(S)$. Il suffit donc d'intégrer entre $\varepsilon > 0$ et t , puis de faire tendre ε vers 0 :

$$\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \|\zeta(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^t \partial_t \|\zeta\|_{\mathcal{H}}^2 =$$

$$= -2 \cdot \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^t \|S\zeta\|_{\mathcal{G}}^2 = -2 \cdot \int_0^t \|S\zeta\|_{\mathcal{G}}^2 \ .$$

D'autre part, par linéarité, on peut supposer que la condition initiale $\xi = 0$; mais alors

$$0 \leqslant \|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = -2 \cdot \int_0^t \|S\zeta\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant 0 \ ,$$

et par suite $\zeta = 0$. ——— □

EXEMPLE Classiquement le problème de la diffusion de la chaleur est modélisé par l'équation

$$\partial_t\zeta + \not{\Delta}_D\zeta = 0 \ ,$$

où $\not\Delta_D$ est l'opérateur de Dirichlet sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$. Il est résolu, grâce au théorème précédent, car on peut montrer, en utilisant la nucléarité de $\mathcal{D}(X)$, que $\not\Delta_D$ est diagonalisable dans $\mathcal{D}(X)$. Si X est borné, cette diagonalisation est discrète, i.e.

$$\operatorname{Sp}\not\Delta_D = \operatorname{Sp}_p \not\Delta_D \ ,$$

et $\mathcal{H}$ se décompose dans $\mathcal{H}$! En effet l'injection canonique $\mathcal{D}(\not\Delta_D) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X)$ est compacte, donc aussi le noyau de ce sous- espace hilbertien ; ainsi

$$\frac{1}{1+(\operatorname{Sp}\not\Delta_D)^2} = \operatorname{Sp}\left(\mathrm{Id} + (\not\Delta_D)^2\right)^{-1} \smallsetminus \{0\}$$

est discret, et par suite aussi

$$\operatorname{Sp}\not\Delta_D = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sp}\left(\mathrm{Id} + (\not\Delta_D)^2\right)^{-1} \smallsetminus \{0\}} - 1} \ .$$

Nous en donnerons dans le numéro suivant une solution explicite pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_+^*$.

8.8 La décomposition de Fourier

Rappelons (cf. exemple 5.14.2) que

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int^{\oplus} \mathbb{C} \cdot e_\lambda \, d\lambda \ .$$

Cette décomposition est évidemment non-dégérée et, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, le champ $\mathcal{F}\xi \cdot e_\diamond$ est la décomposition de Parseval $\widehat{\xi}$ de ξ . En outre les applications

$$g \longmapsto g \cdot e_\diamond : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C} \cdot e_\diamond)$$

et

$$g \longmapsto \int g \cdot e_\diamond \, d\lambda^n : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

sont unitaires : cf. §5.15.

PROPOSITION *Soit $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\rho > 0$ presque partout.*

(i) Si $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$. Si $\frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Pour toute fonction λ^n-mesurable $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, l'opérateur de multiplication M_α par α et $\alpha(\not\nabla) := Z_\alpha$ sont normaux dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\alpha) = \int \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle\alpha\rangle) \cdot e_\diamond \, d\lambda^n$, on a

$$\alpha(\not\nabla)\,\xi = \int \alpha \cdot \mathcal{F}\xi \cdot e_\lambda \, d\lambda^n = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\alpha \cdot \mathcal{F}\xi) \ ,$$

i.e.

$$\alpha(\not\nabla) = \overset{-1}{\mathcal{F}} M_\alpha \mathcal{F} \ .$$

(iii) Si $\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors M_α et Z_α sont des opérateurs essentiellement normaux sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\alpha \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, l'application $y \longmapsto \xi(y) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y$ est λ^n-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et

$$\left(\overline{\alpha}(\not\nabla)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger \xi = \int \alpha(\lambda) \cdot \mathcal{F}\xi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \int \xi(y) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y \, dy \ .$$

En particulier

$$\alpha(\not\nabla) = \left(\overline{\alpha}(\not\nabla)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger{}_{|\mathcal{D}(\alpha)} \ .$$

Démonstration de (i) L'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$ est claire si $\rho \in L^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, si θ est orthogonal à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$, alors $\int \overline{\varphi} \cdot \theta \cdot \rho = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc $\theta = 0$ presque partout par la proposition et l'exemple 3 de 1.16. Ceci prouve que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$. Si maintenant $\frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\theta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$, on a

$$\int \frac{|\theta|}{\langle \mathrm{id}\rangle^m} = \int |\theta| \cdot \rho^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{\langle \mathrm{id}\rangle^m} \leqslant \left(\int |\theta|^2 \cdot \rho\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int \frac{1}{\langle \mathrm{id}\rangle^{2m}} \cdot \frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ .$$

Démonstration de (ii) Remarquons tout d'abord que

$$\mathbf{L}^2_\alpha\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}\cdot e_\diamond\right) = \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\alpha\rangle\right)\cdot e_\diamond \ .$$

Mais comme $\alpha \cdot \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\alpha\rangle\right) \subset \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}\left(\mathbb{R}^n\right)$, l'exemple 4.10.2 montre que

$$\int \alpha \cdot \mathcal{F}\xi \cdot e_\lambda \, d\lambda^n = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\alpha \cdot \mathcal{F}\xi\right) \ .$$

Démonstration de (iii) La première partie est immédiate par (i) et la proposition 7.2.ii. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, il vient

$$\left\langle \varphi \middle| \overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)^\dagger \xi \right\rangle = \left(\overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)\varphi \middle| \xi\right) = \int \alpha \cdot \overline{\mathcal{F}\varphi} \cdot \mathcal{F}\xi = \left\langle \mathcal{F}\varphi \middle| \alpha \cdot \mathcal{F}\xi \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\alpha \cdot \mathcal{F}\xi\right) \right\rangle \ ,$$

donc

$$\overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)^\dagger \xi = \int \alpha\left(\lambda\right) \cdot \mathcal{F}\xi\left(\lambda\right) \cdot e_\lambda \, d\lambda$$

par l'exemple 4.10.2. Quant à la dernière assertion, on a $\overline{\alpha} \cdot \mathcal{F}\varphi \in \mathbf{L}^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ et à nouveau par l'exemple 4.10.2 on peut calculer ponctuellement :

$$\overline{\overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)\varphi}\left(y\right) = \overline{\int \overline{\alpha\left(\lambda\right)} \cdot \mathcal{F}\varphi\left(\lambda\right) \cdot e_\lambda\left(y\right) \, d\lambda} = \int \alpha\left(\lambda\right) \cdot \overline{\mathcal{F}\varphi_{-y}\left(\lambda\right)} \, d\lambda =$$

$$= \int \alpha\left(\lambda\right) \cdot \left\langle \varphi_{-y} \middle| e_\lambda \right\rangle \, d\lambda = \left\langle \varphi_{-y} \middle| \int \alpha \cdot e_\lambda \, d\lambda \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y \right\rangle \ ,$$

en ayant utilisé l'une des formules de la proposition 4.9.

Comme $\bar{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)\varphi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, on en déduit que

$$y \longmapsto \left\langle \varphi \middle| \xi\left(y\right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y \right\rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

est intégrable, donc que $y \longmapsto \xi\left(y\right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y$ est scalairement λ^n-intégrable dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)'$, car

$$\left\langle \varphi \middle| \overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)^\dagger \xi \right\rangle = \left(\overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)\varphi \middle| \xi\right) = \int \overline{\overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)\varphi}\left(y\right) \cdot \xi\left(y\right) \, dy = \int \xi\left(y\right) \cdot \left\langle \varphi \middle| \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y \right\rangle \, dy \ .$$

On a donc

$$\overline{\alpha}\left(\nabla\!\!\!\!/\right)^\dagger \xi = \int \xi\left(y\right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y \, dy \ .$$

Finalement l'application $y \longmapsto \xi\left(y\right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y$ est λ^n-intégrable dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)'$ par définition (cf. proposition 3.12), puisque

$$\mathbf{L}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \cdot \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \ .$$

□

REMARQUE 1 Pour $\eta \in \mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)\right)$ et $\mu \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$, on peut définir le produit de convolution par

$$\eta * \mu := \int \eta_y \, d\mu(y) \ .$$

Remarquons que $\eta * \delta_y = \eta_y$. En outre, si $\eta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on peut montrer que

$$\eta_y : x \longmapsto \eta(x-y)$$

est $\mu-$intégrable pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$, que $\int \eta(\cdot - y)\, d\mu(y) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\eta * \mu = \int \xi(\cdot - y)\, d\mu(y) \ .$$

Le produit de convolution définit ci-dessus est donc un prolongement du produit de convolution classique.

Pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on peut donc écrire

$$\left(\bar{\alpha}(\nabla\!\!\!\!/)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger \xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha * \xi \ .$$

REMARQUE 2 La condition $\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ est nécessaire pour que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(\alpha)$.

REMARQUE 3 Un polynôme complexe

$$P := \sum_\alpha c_\alpha \cdot \mathrm{id}^\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

à n variables sur $\mathbb{R}^n$ satisfait évidemment à la condition ci-dessus. Posons

$$L := \sum_\alpha c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

et calculons $P(\nabla\!\!\!\!/)$:

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$P(\nabla\!\!\!\!/)\varphi = \int P(\lambda) \cdot \mathcal{F}\varphi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \int \mathcal{F}(L\varphi)\, e_\lambda \, d\lambda = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(L\varphi)) = L\varphi$$

par le théorème 4.9 et l'exemple 4.10.2, ce qui montre que

$$\overline{L} = P(\nabla\!\!\!\!/)$$

est un opérateur normal. Par la proposition (iii), pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$L^\dagger \xi = \left(P(\nabla\!\!\!\!/)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger \xi = \int \overline{P(\lambda)} \cdot \mathcal{F}\xi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\overline{P} \cdot \mathcal{F}\xi\right) \ ,$$

donc

$$D\left(\overline{L}\right) = D(L^*) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ \middle|\ L^\dagger\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right\} = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ \middle|\ P \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right\} \ .$$

Pour simplifier les notations on ne fait pas de distinction entre $P(\nabla\!\!\!\!/)$ et L . On considère également $P(\nabla\!\!\!\!/)$ comme un opérateur différentiel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Remarquons en outre que

$$\int \lambda_j \cdot e_\lambda \, d\lambda = \int \partial\!\!\!/_j e_\lambda \, d\lambda = \partial\!\!\!/_j\left(\int e_\lambda \, d\lambda\right) = \partial\!\!\!/_j \delta \ ,$$

et par suite que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} P = \int P(\lambda)\, e_\lambda \, d\lambda = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \int \lambda^\alpha \cdot e_\lambda \, d\lambda = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \not\partial^\alpha \delta = P(\not\nabla)\, \delta \ .$$

Nous avons donc prouvé le

THEOREME *Tout opérateur différentiel à coefficients constants $P(\not\nabla) = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \not\partial^\alpha$ sur $\mathbb{R}^n$ est essentiellement normal sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et diagonalisable par $(\lambda^n, \mathbb{C} \cdot e_\lambda, P)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. Le domaine de définition de sa fermeture est*

$$\left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ \middle| \ P \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \right\} \ .$$

Pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$P(\not\nabla)\, \xi = \overset{-1}{\mathcal{F}} P * \xi = P(\not\nabla)\, \delta * \xi \ .$$

EXEMPLE 1 On a

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \Delta_D = \not\Delta_D = |\not\nabla|^2$$

et son domaine de définition est $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^n)$.

EXEMPLE 2 Revenons maintenant à la résolution explicite de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$. Comme dans la démonstration du corollaire 8.7, et en modifiant celle du théorème 8.5.vi, on montre que pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, l'application

$$\zeta : t \longmapsto \int e^{-t \cdot |\lambda|^2} \cdot f(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{D}(\not\Delta_D)$$

est indéfiniment dérivable, et l'unique solution continûment dérivable de $\partial_t \zeta + \not\Delta_D \zeta = 0$ et de condition initiale

$$\xi := \lim_{t \to 0+} \zeta(t) = \int f(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \overset{-1}{\mathcal{F}} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

On peut même montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'application

$$\Psi_s : \xi \longmapsto \zeta : \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty)}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)\right)$$

est linéaire et continue. En outre $\mathcal{C}^{(\infty)}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)\right)$ est un espace localement convexe tonnelé réflexif, donc le dual d'un espace tonnelé.

Calculons la solution E_y , dite élémentaire , de condition initiale

$$\delta_y = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot e_\lambda \, d\lambda \ .$$

On peut le faire ponctuellement. Il vient

$$E_y(t)(x) = \int e^{-t \cdot |\lambda|^2} \cdot e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, d\lambda = \int e^{-\left[t \cdot |\lambda|^2 - 2\pi i \cdot \lambda \bullet (x-y)\right]} \, d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) \cdot \int \exp\left(-t \cdot \left[\lambda - \frac{\pi i \cdot (x-y)}{t}\right]^2\right) d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) \cdot \int e^{-t\cdot|\lambda|^2}\, d\lambda = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) ,$$

en ayant utilisé le théorème de Cauchy. On a donc

$$E_y\left(t\right)\left(x\right) = E\left(t\right)\left(x-y\right)$$

en ayant posé

$$E\left(t\right) := \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |\mathrm{id}|^2}{t}\right) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) .$$

Mais comme $\delta_y = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(e^{-2\pi i\cdot y\bullet\diamond}\right) \in \mathcal{H}^{(-s)}\left(\mathbb{R}^n\right)$ pour tout $s > \frac{n}{2}$, quel que soit $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, on prouve que

$$\xi = \int \xi\left(y\right) \cdot \delta_y\, dy \quad \text{dans } \mathcal{H}^{(-s)}\left(\mathbb{R}^n\right) .$$

Le lemme 3.12.iii montre alors que

$$\zeta = \Psi_{-s}\xi = \int \xi\left(y\right) \cdot \Psi_{-s}\delta_y\, dy = \int \xi\left(y\right) \cdot E_y\, dy \quad \text{dans } \mathcal{C}^{(\infty)}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{H}^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n\right)\right) .$$

En particulier

$$\zeta\left(t\right)\left(x\right) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \int \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) \cdot \xi\left(y\right)\, dy$$

pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Utilisant le produit de convolution, on aurait aussi pu écrire

$$\zeta\left(t\right) = \overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-t\cdot|\mathrm{id}|^2} * \xi ,$$

d'où le même résultat puisque $\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-t\cdot|\mathrm{id}|^2} = E\left(t\right)$. L'invariance par translation de $\Delta\!\!\!\!/_D$ est évidemment fondamentale.

EXEMPLE 3 Considérons la décomposition directe non-dégénérée

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \int^{\oplus} \mathbb{C} \cdot 2\sin\left(2\pi\lambda\cdot\right)\, d\lambda \quad \text{dans } \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)' .$$

L'opérateur de Dirichlet $\Delta\!\!\!\!/_D$ est aussi diagonalisé par $|\mathrm{id}|^2$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, la solution élémentaire E_y de l'équation de la chaleur de condition initiale

$$\delta_y = 4 \cdot \int \sin\left(2\pi\lambda y\right) \cdot \sin\left(2\pi\lambda\cdot\right)\, d\lambda$$

est

$$E_y\left(x\right) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) - \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot (x+y)^2}{t}\right)\right) .$$

EXEMPLE 4 Calcul de la résolvente de $\Delta\!\!\!\!/_D$ dans $\mathbb{R}^n$.

Puisque $\Delta\!\!\!\!/_D = |\nabla\!\!\!\!/|^2$, le théorème 8.5.xvi montre que

$$\mathrm{Sp}\, \Delta\!\!\!\!/_D = \mathbb{R}_+ .$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} c > 0$, on a $-c^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, donc $\not\Delta_D + c^2 \cdot \mathrm{Id}$ est inversible et

$$\left(\Delta_D + c^2 \cdot \mathrm{Id}\right)^{-1} = \overset{-1}{\mathcal{F}} \frac{1}{c^2 + |\mathrm{id}|^2} * \ ,$$

où

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} \frac{1}{c^2 + |\mathrm{id}|^2} = \int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda \, d\lambda \ .$$

Si $n = 1$, on a immédiatement

$$\int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda \, d\lambda = \frac{\pi}{c} \cdot e^{-2\pi c \cdot |\mathrm{id}|} \ .$$

Si $n \geqslant 2$, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, soit σ l'intégrale de Radon superficielle sur la sphère $\mathbb{S}_r^{n-1}$ de rayon r et calculons tout d'abord ponctuellement, ce qui est possible :

$$\int e_\lambda(x) \, d\sigma = r^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\pi i \cdot |x| \cdot r \cdot \sin\vartheta} \cdot \cos^{n-2}\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= r^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2\pi \cdot |x| \cdot r \cdot \sin\vartheta\right) \cdot \cos^{n-2}\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= r^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \cos\left(2\pi \cdot |x| \cdot r \cdot t\right) dt =$$

$$= \frac{2\pi}{|x|^{\frac{n-2}{2}}} \cdot r^{\frac{n}{2}} \cdot J_{\frac{n-2}{2}}\left(2\pi \cdot |x| \cdot r\right) \ .$$

Il vient alors

$$\int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda \, d\lambda = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{2\pi}{|\mathrm{id}|^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{r^{\frac{n}{2}}}{c^2 + r^2} \cdot J_{\frac{n-2}{2}}\left(2\pi \cdot |\mathrm{id}| \cdot r\right) \, dr =$$

$$= \frac{2\pi}{|\mathrm{id}|^{\frac{n-2}{2}}} \cdot c^{\frac{n-2}{2}} \cdot K_{\frac{n-2}{2}}\left(2\pi \cdot c \cdot |\mathrm{id}|\right)$$

dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)'$ par la formule de Hankel-Nicholson (cf. Abramowitz-Stegun 11.4.44).

Rappelons quelques résultats de la théorie des fonctions de Bessel. Les fonctions de Hankel d'ordre ν , définies pour $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ par

$$H_\nu^\pm(r) := \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{\pm i\left(r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty t^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot \left(1 \pm \frac{it}{2r}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot e^{-t} \, dt$$

sur $\mathbb{R}_+^*$, forment un système fondamental de solutions de l'équation différentielle de Bessel :

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 f + \mathrm{id} \cdot \partial f + \left(\mathrm{id}^2 - \nu^2\right) \cdot f = 0 \ .$$

La fonction de Bessel d'ordre ν est définie par

$$J_\nu = \frac{1}{2}\left(H_\nu^+ - H_\nu^-\right)$$

et on a

$$J_\nu(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot \cos(rt) \, dt \ .$$

La fonction de Macdonald d'ordre ν est définie par

$$K_\nu(r) := \frac{\pi}{2} \cdot e^{i\pi\cdot\frac{\nu+1}{2}} \cdot H_\nu^+(ir) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{+i\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty t^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{t}{2r}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\, dt \ .$$

On a

$$K_\nu(r) = \int_0^\infty \cosh(\nu t) \cdot e^{-r\cdot\cosh t}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \cdot \int_0^\infty t^{-\nu-1} \cdot e^{-t-\frac{r^2}{4t}}\, dt \ .$$

Remarquons que les fonctions de Bessel et de Macdonald d'indice demi-entier sont élémentaires. En particulier pour $n=3$, on a

$$\int e_\lambda(x)\, d\sigma = \frac{2r}{|x|} \cdot \sin(2\pi \cdot |x| \cdot r)$$

et

$$\int \frac{1}{c^2+|\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2\,|\mathrm{id}|} \cdot e^{-2\pi c\cdot|\mathrm{id}|} \ .$$

Pour $n=2$, on obtient

$$\int \frac{1}{c^2+|\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda = 2\pi \cdot K_0(2\pi c \cdot |\mathrm{id}|) = 2\pi \cdot \int_0^\infty \cos(\mathrm{id}\cdot \sinh\ t)\ dt \ .$$

EXEMPLE 5 Calculons le propagateur

$$\exp(-it \cdot \not{\Delta}_D) \ .$$

On a

$$\exp(-it \cdot \not{\Delta}_D) = \overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-it\cdot|\mathrm{id}|^2} * \ ,$$

et

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-it\cdot|\mathrm{id}|^2} = \int e^{-it\cdot|\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int e^{-(2\pi\varepsilon+it)\cdot|\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda \ .$$

Ponctuellement il vient

$$\int e^{-(2\pi\varepsilon+it)\cdot|\lambda|^2+2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\, d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2\cdot|x|^2}{2\pi\varepsilon+it}\right) \cdot \int \exp\left(-\left|(2\pi\varepsilon+it)^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda - \frac{\pi i x}{(2\pi\varepsilon+it)^{\frac{1}{2}}}\right|^2\right) d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2\cdot|x|^2}{2\pi\varepsilon+it}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2\pi\varepsilon+it}\right)^{\frac{n}{2}} \ ,$$

grâce au théorème de Cauchy, d'où en passant à la limite

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-it\cdot|\mathrm{id}|^2} = \left(\frac{\pi}{it}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2\cdot|\mathrm{id}|^2}{it}\right) \ .$$

Le mouvement d'une particule libre en mécanique quantique est décrit par l'hamiltonien

$$H = \frac{h^2}{2m} \cdot \not{\Delta}_D$$

et l'équation de Schrödinger

$$i \cdot \frac{h}{2\pi} \partial \zeta = H\zeta \ .$$

On peut montrer, comme pour l'équation de la chaleur, que la solution est donné par le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires

$$t \longmapsto \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} \cdot t \cdot H\right) = \exp\left(-i\frac{\pi h}{m} \cdot t \cdot \not{\Delta}_D\right) = \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) * \ .$$

Si la particule est au temps 0 dans l'état ξ , au temps t elle se trouve dans l'état

$$\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} t \cdot H\right) \xi = \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \int \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id} - y|^2\right) \cdot \xi\left(y\right)\, dy =$$

$$= \left(\frac{m}{iht}\right)^{n/2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) \cdot \int \exp\left(-2\pi i \cdot \frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id} \cdot y\right) \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |y|^2\right) \cdot \xi\left(y\right)\, dy =$$

$$= \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) \cdot \mathcal{F}\left(\exp\left[i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2 \cdot \xi\right]\right)\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right) \ .$$

On peut alors montrer lorsque $t \longmapsto \infty$ que

$$\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} t \cdot H\right) \xi \sim \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) \cdot \mathcal{F}\xi\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \ ,$$

donc que la répartition de la position pour des temps assez grand est environ

$$\left(\frac{m}{ht}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2 \ .$$

Remarquons que $|\mathcal{F}\xi|^2$ est la répartition de $\frac{p}{h}$ au temps 0 . Celle de l'impulsion p est donc donnée par la transformation $p \longmapsto \frac{p}{h}$, i.e.

$$\left(\frac{1}{h}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{1}{h} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2 \ .$$

Une particule classique d'impulsion p partant de 0 en 0 se trouve au temps t en $\frac{p}{m} \cdot t$. Partant statistiquement avec la répartition $\left(\frac{1}{h}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{1}{h} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2$, on obtient la répartition de la position par la transformation $x \longmapsto \frac{mx}{t}$, i.e. $\left(\frac{m}{ht}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2$.

Ceci montre que la particule quantique ayant une certaine répartition de l'impulsion au temps 0 se comporte asymptotiquement comme une particule classique partant statistiquement de 0 au temps 0 avec la même répartition de l'impulsion.

8.9 Equation de Schrödinger

REMARQUE 1 A un système quantique on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les éléments $\xi \in \mathcal{H}$ tels que $\|\xi\| = 1$ sont dits les *états observables* de ce système. Observer un tel système revient à considérer un opérateur auto-adjoint T dans $\mathcal{H}$, dite une *observable* . Si T est diagonalisé par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ dans $F^\dagger$, et si l'on observe beaucoup de systèmes préparés dans l'état $\xi \in D(T)$, la *probabilité* d'obtenir une valeur mesurée dans une partie $A \subset \mathbb{R}$ est

$$\int_{\kappa^{-1}(A)} \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma = \int \left(\widehat{\xi}\right| 1_{\kappa^{-1}(A)} \cdot \widehat{\xi}\Big)_\diamond d\sigma = \left(\xi\right| Z_{\kappa^{-1}(A)}\xi\Big) \ .$$

Remarquons que

$$\int_\Lambda \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma = \|\xi\|^2 = 1 \ .$$

La *valeur moyenne* de toutes les observations possibles est alors

$$\int \kappa \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma = \int \left(\widehat{\xi}\right| \kappa \cdot \widehat{\xi}\Big)_\diamond d\sigma = (\xi| T\xi) \ .$$

On appelle *écart* (quadratique moyen) le nombre $\Delta(T, \xi)$ défini par

$$\Delta(T, \xi)^2 := \|T\xi - (\xi| T\xi) \cdot \xi\|^2 = \int |\kappa - (\xi| T\xi)|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma \ ,$$

qui donne une certaine mesure de la concentration des valeurs mesurées autour de la valeur moyenne, c'est-à-dire une mesure de l' *incertitude* sur la valeur moyenne.

On a $\Delta(T, \xi) = 0$ si, et seulement si, ξ est un état propre de T de valeur propre $(\xi| T\xi)$.

En effet $\Delta(T, \xi) = 0$ si, et seulement si, $|\kappa - (\xi| T\xi)|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 = 0$ σ-p.p. , ce qui est équivalent à $\widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. sur la partie $\{\kappa \neq (\xi| T\xi)\}$. Ceci est équivalent à

$$\xi \in \mathcal{H}_{\{\kappa = (\xi| T\xi)\}} = \operatorname{Ker}(T - (\xi| T\xi) \cdot \mathrm{Id})$$

par le theorème 8.5.xiii. $\square$

REMARQUE 2 A tout système quantique est associé l'observable *énergie* H , dite le *hamiltonien* du système. En général H est un opérateur différentiel auto-adjoint dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, par exemple

$$H = \frac{1}{2m} \cdot \not{\partial}^2 + \frac{k^2}{2} \cdot \mathrm{id}^2$$

pour l'oscillateur harmonique dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, ou

$$H = \frac{1}{2m} \cdot \not{\Delta} - \frac{e^2}{|\mathrm{id}|}$$

pour l'électron de l'atome d'hydrogène neutre dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$, en ayant choisi des unités telles que la constante de Planck h soit égale à 1 , i.e. $\hbar$ à $\frac{1}{2\pi}$.

Soient donc $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et H un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$. L'évolution du système est décrite par une fonction $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow D(H)$ dérivable dans $\mathcal{H}$ et solution de l' *équation de Schrödinger*

$$\not\partial\zeta = -H\zeta \ ,$$

ou comme la note les physiciens

$$i\hbar \cdot \dot{\zeta} = H\zeta \ .$$

PROPOSITION *Pour tout $\xi \in D(H)$, l'équation de Schrödinger possède une unique solution telle que $\zeta(0) = \xi$. On a*

$$\zeta(s) = U_s\xi \quad \textit{en ayant posé} \quad U_s := e^{-2\pi is\cdot H} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

L'application $s \longmapsto U_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$ (fortement) continue.

Mettons l'équation sous la forme

$$\partial\zeta = -2\pi i \cdot H\zeta \ ,$$

et soit $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ une diagonalisation de H dans $F^\dagger$; on peut supposer que la fonction κ est réelle puisque H est auto-adjoint (théorème 8.5.x). Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$e^{-2\pi it\cdot\kappa} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma) \quad , \quad e^{-2\pi i(s+t)\cdot\kappa} = e^{-2\pi is\cdot\kappa}e^{-2\pi it\cdot\kappa} \quad \text{et} \quad \overline{e^{-2\pi it\cdot\kappa}} = e^{-2\pi i(-t)\cdot\kappa} \ ,$$

donc

$$U_t := e^{-2\pi it\cdot H} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad , \quad U_0 = \mathrm{Id} \quad , \quad U_{s+t} = U_sU_t \quad \text{et} \quad U_t^* = U_{-t}$$

par le calcul fonctionnel borné (scolie 8.3.2), ce qui prouve que $s \longmapsto U_s$ est une représentation unitaire. Elle est fortement continue, car

$$\lim_{t\to 0} e^{-2\pi i(s+t)\cdot\kappa} = e^{-2\pi is\cdot\kappa} \quad \text{ponctuellement} \quad \text{et} \quad \left|e^{-2\pi i(s+t)\cdot\kappa}\right| \leqslant 1 \ ,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} U_{s+t}\xi = U_s\xi \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}$$

par le théorème 8.5.vi.

Soit alors $\xi \in D(H)$. Puisque l'opérateur $-2\pi i \cdot H$ est diagonalisé par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, -2\pi i \cdot \kappa\right)$ et que

$$-2\pi i \cdot \kappa \cdot e^{-2\pi it\cdot\kappa} \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\| \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ ,$$

on a $\xi \in D\left(-2\pi i \cdot He^{-2\pi is\cdot H}\right)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, donc que

$$\zeta : s \longmapsto U_s\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}(-2\pi i \cdot H) \equiv \mathcal{D}(H)$$

est une solution continûment dérivable telle que $\zeta(0) = U_0\xi = \xi$.

Prouvons l'unicité. Par linéarité, il nous suffit de montrer que si ζ est une solution telle que $\zeta(0) = 0$, alors $\zeta = 0$. Mais on a

$$\partial\left(\|\zeta\|^2\right) = \partial(\zeta|\,\zeta) = (\partial\zeta|\,\zeta) + (\zeta|\,\partial\zeta) = (-2\pi i \cdot H\zeta|\,\zeta) + (\zeta|\,2\pi i \cdot H\zeta) = 0 \ ,$$

ce qui prouve que $\|\zeta\|$ est une fonction constante égale à $\|\zeta(0)\| = 0$, donc que $\zeta = 0$. □

REMARQUE 3 Nous dirons que $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que $\|\zeta\| = 1$ est *stationnaire* si, pour toute observable T de ζ , i.e. telle que $\zeta(\mathbb{R}) \subset D(T)$, la valeur moyenne $(\zeta|\,T\zeta)$ de T est constante au cours du temps.

Pour que ζ soit stationnaire, il faut et il suffit que ζ soit de la forme

$$\zeta = f \cdot \xi \quad \text{pour un } \xi \in \mathcal{H} \text{ tel que } \|\xi\| = 1 \text{ et une fonction } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \ .$$

En effet si $\xi \in D(T)$, on a

$$(\zeta| T\zeta) = (f \cdot \xi| Tf \cdot \xi) = |f|^2 \cdot (\xi| T\xi) = (\xi| T\xi) \ .$$

Réciproquement, pour tout $\eta \in \mathcal{H}$, l'orthoprojecteur $P_\eta = |\eta)(\eta|$ sur $\mathbb{C} \cdot \eta$ est une observable de ζ , donc

$$(\zeta| P_\eta\zeta) = |(\eta| \zeta)|^2 \quad \text{est constant.}$$

Pour tout $\eta \perp \zeta(0)$, on a

$$(\eta| \zeta(t)) = (\eta| \zeta(0)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \ ,$$

donc $\zeta(t) \perp \eta$, et par suite que $\zeta(t) \in \mathbb{U} \cdot \zeta(0)$. Ainsi $\zeta(t) = f(t) \cdot \zeta(0)$ pour un certain $f(t) \in \mathbb{U}$. □

DEFINITION On dit que $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un *état stationnaire* si ζ est une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger.

COROLLAIRE *Les états stationnaires sont exactement ceux de la forme*

$$t \longmapsto e^{-2\pi i E \cdot t} \cdot \xi \ ,$$

où ξ est un vecteur propre de H associé à la valeur propre E , i.e.

$$H\xi = E\xi \ ;$$

on dit que c'est l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

La suffisance est immédiate, puisque

$$\partial\!\!\!/ \left(e^{-2\pi i E \cdot \diamond} \cdot \xi\right) = -E \cdot e^{-2\pi i E \cdot \diamond} \cdot \xi = -H \left(e^{-2\pi i E \cdot \diamond} \cdot \xi\right) \ .$$

Réciproquement, si ζ est un état stationnaire, il est de la forme $f \cdot \xi$, où $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$. Mais comme $f = (\xi| \zeta)$, f est continûment dérivable et il vient

$$\partial\!\!\!/ f \cdot \xi = \partial\!\!\!/ \zeta = -H\zeta = -f \cdot H\xi \ .$$

En particulier on a

$$H\xi = -\frac{\partial\!\!\!/ f(0)}{f(0)} \cdot \xi \ ,$$

ce qui montre que ξ est un vecteur propre de H associée à la valeur propre $E := -\frac{\partial\!\!\!/ f(0)}{f(0)}$; il vient alors

$$\partial\!\!\!/ f \cdot \xi = -f \cdot H\xi = -f \cdot E \cdot \xi \ ,$$

donc $\partial\!\!\!/ f = -E \cdot f$, ce qui montre que $f = f(0) \cdot e^{-2\pi i E \cdot \diamond}$, d'où le résultat en remplaçant ξ par $f(0) \cdot \xi$. □

REMARQUE 4 Les états d'un système quantique sont représentés par les éléments d'un sous-espace vectoriel dense D d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Etant donné $\eta \in D$ l'état initial au temps 0 du système et $s \in \mathbb{R}$, soit $V(s, \eta) \in D$ l'état du système au temps t . D'après l'interprétation probabiliste, si η est observable, alors $V(s, \eta)$ l'est aussi, i.e.

$$\|V(s, \eta)\| = 1 \quad \text{si} \quad \|\eta\| = 1 \ .$$

Les phénomènes ondulatoires proviennent du *principe de superposition* , qui stipule que

$$V_s : \eta \longmapsto V(s,\eta) : D \longrightarrow D$$

est un opérateur linéaire. On $V_0 = \mathrm{Id}$. L'évolution étant *déterministe* et *réversible* , pour tout $s,t \in \mathbb{R}$, il vient

$$V_{s+t}\eta = V(s+t,\eta) = V(s,V(t,\eta)) = V_s V(t,\eta) = V_s V_t \eta \ ,$$

donc

$$V_{s+t} = V_s V_t \ .$$

Ceci montre que chaque V_s est une bijection isométrique de D sur D , donc un opérateur unitaire ; il est clair qu'il se prolonge en un opérateur unitaire U_s dans $\mathcal{H}$ et que

$$s \longmapsto U_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

est une représentation unitaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$.

En admettant la continuité de l'évolution du système, i.e. la continuité de

$$s \longmapsto V_s\eta$$

pour tout $\eta \in D$, la représentation $s \longmapsto U_s$ est fortement continue.

En effet, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon > 0$, choisissons $\eta \in D$ tel que $\|\eta - \xi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que l'on ait $\|V_t\eta - \eta\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ si $|t| \leqslant \delta$. Pour ces t , on obtient alors

$$\|U_t\xi - \xi\| \leqslant \|U_t\xi - U_t\eta\| + \|V_t\eta - \eta\| + \|\eta - \xi\| \leqslant \|V_t\eta - \eta\| + 2\|\eta - \xi\| \leqslant \varepsilon \ .$$

$\square$

Ainsi, les principes fondamentaux de la mécanique quantique entraîne que l'évolution d'un système quantique est décrite par une représentation fortement continue de $\mathbb{R}$ dans un espace de Hilbert. Nous avons vu dans la proposition précédente que l'équation de Schrödinger induit une telle représentation. Nous allons maintenant montrer la réciproque.

THEOREME (de Stone) *Soit $s \longmapsto U_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ une représentation unitaire fortement continue. Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint H dans $\mathcal{H}$ tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on ait*

$$U_s = e^{-2\pi i s\cdot H} \ .$$

Plus précisément, le domaine de H est l'ensemble des $\xi \in \mathcal{H}$ tels que $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot(U_t\xi - \xi)$ existe, et on a

$$H\xi = -\frac{1}{2\pi i}\cdot \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot(U_t\xi - \xi) \ .$$

Pour tout $a \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, le théorème 3.12.ii montre que $s \longmapsto a(s)\cdot U_s$ est λ-intégrale dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma) = \left(|\mathcal{H}\rangle_i \langle\mathcal{H}|\right)^\dagger$. Posons

$$\pi(a) := \int a(s)\cdot U_s\, ds \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma) \ .$$

Il est clair que

$$\pi : \mathcal{K}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) : a \longmapsto \pi(a)$$

est linéaire. On a

$$\pi(a^*) = \int \overline{a(-s)}\cdot U_s\, ds = \int \overline{a(s)}\cdot U_{-s}\, ds = \int \overline{a(s)}\cdot U_s^*\, ds =$$

$$= \int (a(s) \cdot U_s)^* \, ds = \left(\int a(s) \cdot U_s \, ds \right)^* = \pi(a)^*$$

par le lemme 3.12.iii appliqué à $\diamond^* : \mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma)$, qui est évidemment continue. Pour tout $b \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, et en évaluant en $\xi \in \mathcal{H}$, donc en calculant les intégrales dans $\mathcal{H}_\sigma$, il vient

$$\pi(a * b)\xi = \int \left(\int a(s-t) \cdot b(t) \, dt \right) \cdot U_s \xi \, ds = \int a(s-t) \cdot b(t) \cdot U_s \xi \, d(s,t) =$$

$$= \int a(s) \cdot b(t) \cdot U_{s+t} \xi \, d(s,t) = \int \left(\int a(s) \cdot U_s (b(t) \cdot U_t \xi) \, dt \right) ds =$$

$$= \int a(s) \cdot U_s \left(\int b(t) \cdot U_t \xi \, dt \right) ds = \left(\int a(s) \cdot U_s \, ds \right) \left(\int b(t) \cdot U_t \xi \, dt \right) = \pi(a)\pi(b)\xi \ ,$$

en ayant utilisé le théorème de Fubini, la formule de changement de variable, ainsi que le lemme 3.12.iii appliqué à U_s .

Nous avons donc prouvé que π est une représentation de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$. Par le corollaire au théorème de Plancherel-Godement nous pouvons considérer un $\mathcal{K}(\mathbb{R})$-module F tel que $\mathcal{H}$ soit isomorphe à un sous-module hilbertien diagonalisable dans $F^\dagger$, i.e. il existe un espace localement compact Λ , une intégrale de Radon σ et des applications continues

$$\varepsilon : \Lambda \longrightarrow F^\dagger \quad \text{et} \quad \varkappa : \Lambda \longrightarrow \mathrm{Sp}_h \, \mathcal{K}(\mathbb{R})$$

tels que

$$\mathcal{H} = \int^\oplus \mathbb{C} \cdot \varepsilon \, d\sigma \quad \text{et} \quad a\xi = \int \langle \varkappa | \, a \rangle \cdot \widehat{\xi} \cdot \varepsilon \, d\sigma \ .$$

Remarquons qu'il existe une fonction continue $\kappa : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} : \lambda \longmapsto \kappa(\lambda)$ tel que

$$\langle \varkappa | \, a \rangle = \int e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot a(s) \, ds \ .$$

Posons $H := Z_\kappa$. C'est un opérateur auto-adjoint et on a $e^{-2\pi i s \cdot H} = Z_{e^{-2\pi i s \cdot \kappa}}$. Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, il vient

$$\int a(s) \cdot (\eta | \, U_s \xi) \, ds = (\eta | \, a\xi) = \int \left(\widehat{\eta} \cdot \varepsilon \middle| \, \widehat{a\xi} \cdot \varepsilon \right)_\diamond d\sigma = \int \left(\widehat{\eta} \cdot \varepsilon \middle| \, \langle \varkappa | \, a \rangle \cdot \widehat{\xi} \cdot \varepsilon \right)_\diamond d\sigma =$$

$$= \int \overline{\widehat{\eta}} \cdot \left(\int e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot a(s) \, ds \right) \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma = \int a(s) \cdot \left(\int \overline{\widehat{\eta}} \cdot e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma \right) ds =$$

$$= \int a(s) \cdot \left(\int \overline{\widehat{\eta}} \cdot e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma \right) ds = \int a(s) \cdot \left(\eta \middle| \, e^{-2\pi i s \cdot H} \xi \right) ds \ .$$

Par comparaison on obtient

$$U_s = e^{-2\pi i s \cdot H} \ .$$

Etant donné $\xi \in D(H)$, en posant $\zeta := U_\diamond \xi = e^{-2\pi i \diamond \cdot H} \xi$, la proposition précédente montre que ζ est dérivable, donc que

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t \xi - \xi) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (\zeta(t) - \zeta(0)) = \partial\zeta(0)$$

existe. Réciproquement, définissons un opérateur S sur l'ensemble $D(S)$ des ξ possèdant cette propriété par

$$S\xi := -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t\xi - \xi) \ .$$

Pour tout $\xi, \eta \in D(S)$, on obtient

$$(\xi|\, S\eta) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \left(\xi \middle| \frac{1}{t} \cdot (U_t\eta - \eta)\right) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} \cdot (U_t^*\xi - \xi) \middle| \eta\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{-t} \cdot (U_{-t}\xi - \xi) \middle| \eta\right) = (S\xi|\, \eta) \ .$$

Ainsi S est un opérateur symétrique, $D(S) \supset D(H)$ et

$$H\xi = -\partial\!\!\!/ \zeta(0) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t\xi - \xi) = S\xi \ ,$$

montrant que S est un prolongement de H . On en déduit que

$$H \subset S \subset S^* \subset H^* = H \ ,$$

et par suite $H = S$, ainsi que $D(H) = D(S)$. □