

Chapitre 5

SOUS-ESPACES HILBERTIENS

Dans tout ce qui suit F est un espace localement convexe séparé.

Version du 30 mars 2005

5.1 Le noyau d'un sous-espace-hilbertien

DEFINITION 1 Nous dirons que $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$, ou plus simplement \mathcal{H} , est un *sous-espace hilbertien* de F^\dagger si \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de F^\dagger muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que l'injection canonique $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ soit continue. On désigne par $\text{Hilb}(F^\dagger)$ l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de F^\dagger .

Il est équivalent d'après le scolie 3.7.i d'exiger que $j : \mathcal{H}_\sigma \hookrightarrow F^\dagger$ soit continue. En considérant la semi-dualité $(\mathcal{H} | \mathcal{H})$, l'application $j^\dagger : F_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ est continue d'après la proposition 3.7.iii, donc aussi $j^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$.

DEFINITION 2 L'application linéaire continue

$$h := jj^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma \hookrightarrow F^\dagger$$

s'appelle le *noyau* de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$.

Par simplification, puisque j n'est que l'injection canonique du sous-espace vectoriel \mathcal{H} dans F^\dagger , on dénote aussi par h l'application linéaire continue

$$h := j^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma .$$

On dit également que c'est le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$. On a alors $j = h^\dagger$ et le noyau comme application de F dans F^\dagger est $h^\dagger h$.

REMARQUE 1 Dans les applications, l'espace F sera tonnelé. Dans ce cas le noyau $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$ est continu par le scolie 3.7.ii. Pour ne pas faire cette hypothèse, il suffit d'introduire la topologie de Mackey; le noyau $h : F_\tau \longrightarrow \mathcal{H}$ est alors continu par le théorème 3.11.ii. Un espace tonnelé est muni de la topologie de Mackey comme nous l'avons vu dans le théorème 3.11.i.

REMARQUE 2 Attention, si \mathcal{H} est en semi-dualité avec \mathcal{H}^\dagger et cet espace n'est pas identifié avec \mathcal{H} , alors l'adjointe de $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est une application linéaire continue $j^\dagger : F_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}^\dagger$ et on a

$$\langle \varphi | j\xi \rangle_F = \langle j^\dagger \varphi | \xi \rangle_{\mathcal{H}^\dagger} = \langle R^{-1} j^\dagger \varphi | \xi \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H} .$$

Ceci montre que l'adjointe de j calculée en considérant la semi-dualité $(\mathcal{H} | \mathcal{H})$ est égale à $R^{-1} j^\dagger$, où R désigne l'application de Riesz de \mathcal{H} dans \mathcal{H}^\dagger . Le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est donc $j R^{-1} j^\dagger$, ou $R^{-1} j^\dagger$.

REMARQUE 3 Rappelons les résultats suivants :

(a) D'après la remarque 3.4.4, le scolie 3.7.i et le théorème 3.11.ii, on a

$$F^\dagger = (F_\sigma)^\dagger ,$$

et

$$\mathcal{L}(F, F^\dagger) = \mathcal{L}(F_\sigma, F^\dagger) = \mathcal{L}(F_\tau, F^\dagger) = \mathcal{L}(F_\tau, F_\tau^\dagger)$$

est l'ensemble des applications linéaires de F dans F^\dagger admettant une adjointe.

(b) La proposition 3.13 montre qu'il y a une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues

$$T : F \longrightarrow F^\dagger ,$$

les formes sesquilinéaires séparément continues

$$\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

et les formes semi-linéaires continues

$$\tilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle_i \langle F| \longrightarrow \mathbb{K}$$

donnée par

$$\langle |\varphi\rangle \langle \psi| \mid \tilde{\mathfrak{s}} \rangle = \mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \langle \varphi \mid T\psi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F .$$

Soit maintenant $T : F \longrightarrow F^\dagger$ une application linéaire.

(c) Pour que T soit continue, ou faiblement continue, et que l'on ait $T = T^\dagger$, il faut et il suffit que \mathfrak{s} soit hermitienne, i.e. que

$$\langle \varphi \mid T\psi \rangle = \overline{\langle \psi \mid T\varphi \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F .$$

Il suffit de constater que \mathfrak{s} est hermitienne si, et seulement si, T est une adjointe de T .

(d) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors \mathfrak{s} est hermitienne, respectivement hermitienne positive si, et seulement si, on a $\langle \varphi \mid T\varphi \rangle \in \mathbb{R}$, respectivement $\langle \varphi \mid T\varphi \rangle \geq 0$ pour tout $\varphi \in F$.

Cela découle directement de la formule de polarisation, proposition 1.3.iii. ————— \square

DEFINITION 3 Une application linéaire continue $T : F \longrightarrow F^\dagger$ est dite un *noyau*. Si $T = T^\dagger$ on dit que ce noyau est *hermitien*. Si en plus on a

$$\langle \varphi \mid T\varphi \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F ,$$

on dit qu'il est *hermitien positif*. On désigne par $\mathcal{L}_h(F, F^\dagger)$, respectivement $\mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$, le sous-espace vectoriel réel des noyaux hermitiens, respectivement le cône convexe des noyaux hermitiens positifs.

REMARQUE 4 Soient $S, T \in \mathcal{L}_h(F, F^\dagger)$. Pour que $S = T$, il faut et il suffit que, pour tout $\varphi \in F$, on ait

$$\langle \varphi \mid S\varphi \rangle = \langle \varphi \mid T\varphi \rangle .$$

C'est immédiat par les formules de polarisation, proposition 1.3, (ii) et (iii). ————— \square

PROPOSITION *Le noyau h de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est hermitien positif, i.e. $h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$, et on a*

$$(h\varphi | \xi)_{\mathcal{H}} = \langle \varphi | \xi \rangle_F \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H} .$$

En particulier on a

$$\langle \varphi | h\psi \rangle_F = (h\varphi | h\psi)_{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad \langle \varphi | h\varphi \rangle_F = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F .$$

En outre $h : F_\tau \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue, i.e.

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle_F^{\frac{1}{2}} = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}$$

est une semi-norme continue sur F_τ .

En effet

$$(h\varphi | \xi) = (j^\dagger \varphi | \xi) = \langle \varphi | j\xi \rangle = \langle \varphi | \xi \rangle ,$$

et par suite

$$\langle \varphi | h\psi \rangle = (h\varphi | h\psi) = \overline{(h\psi | h\varphi)} = \overline{\langle \psi | h\varphi \rangle} = \langle h\varphi | \psi \rangle ,$$

ce qui montre que le noyau $h : F \longrightarrow F^\dagger$ est hermitien. On aurait aussi pu calculer

$$(jj^\dagger)^\dagger = j^{\dagger\dagger}j^\dagger = jj^\dagger .$$

Il est positif puisque

$$\langle \varphi | h\varphi \rangle = \|h\varphi\|^2 \geq 0 .$$

La continuité de $h : F_\tau \longrightarrow \mathcal{H}$ découle de la remarque 1. □

COROLLAIRE *Soit \mathcal{H} un sous-espace vectoriel de F^\dagger muni d'une structure d'espace de Hilbert. Pour que $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ soit un sous-espace hilbertien, il faut et il suffit qu'il existe une application $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que*

$$\langle \varphi | \xi \rangle_F = (h\varphi | \xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H} .$$

Dans ce cas h est le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$.

La nécessité découle de la proposition. Réciproquement la formule montre que h est l'adjointe de $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$, donc que j est continue par le scolie 3.7, puis par comparaison que h est bien le noyau. □

5.2 Exemples élémentaires de sous-espaces hilbertiens

EXEMPLE 1 Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert (en semi-dualité avec lui-même) et $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} . Alors $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$, en ayant muni \mathcal{G} du produit scalaire induit par \mathcal{H} , est un sous-espace hilbertien de \mathcal{H} , dont le noyau est l'orthoprojecteur

$$P_{\mathcal{G}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{G}$, on a

$$(\varphi | \eta)_{\mathcal{H}} = (P_{\mathcal{G}}\varphi | \eta)_{\mathcal{H}} = (P_{\mathcal{G}}\varphi | \eta)_{\mathcal{G}} .$$

□

REMARQUE 1 Ceci montre que la notion de noyau d'un sous-espace hilbertien généralise celle d'orthoprojecteur sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert.

EXEMPLE 2 Soit $\xi \in F^{\dagger}$ tel que $\xi \neq 0$. Alors $\mathbb{K} \cdot \xi$, muni du produit scalaire

$$(\alpha \cdot \xi, \beta \cdot \xi) \longmapsto \bar{\alpha} \cdot \beta$$

(ξ est donc de norme 1 dans $\mathbb{K} \cdot \xi$), est un sous-espace hilbertien $\mathbb{K} \cdot \xi \hookrightarrow F^{\dagger}$ dont le noyau est

$$|\xi\rangle \langle \xi| : \varphi \longmapsto |\xi\rangle \langle \xi | \varphi = \langle \xi | \varphi \rangle \cdot \xi .$$

En effet on a

$$\langle \varphi | \alpha \cdot \xi \rangle = \langle \varphi | \xi \rangle \cdot \alpha = \left(\langle \xi | \varphi \rangle \cdot \xi \middle| \alpha \cdot \xi \right) = \left(|\xi\rangle \langle \xi | \varphi \middle| \alpha \cdot \xi \right) .$$

□

EXEMPLE 3 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Le noyau de tout sous-espace hilbertien $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur borné auto-adjoint positif dans \mathcal{H} . Celui de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ est Id. Nous verrons réciproquement grâce au théorème de Schwartz (cf. exemple 5.11.2) qu'à tout opérateur borné auto-adjoint positif dans \mathcal{H} correspond un unique sous-espace hilbertien de \mathcal{H} .

EXEMPLE 4 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert en semi-dualité avec \mathcal{H}^{\dagger} . Les noyaux de

$$\mathcal{H}_{\beta}^{\dagger} \hookrightarrow \mathcal{H}^{\dagger} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\sigma} = (\mathcal{H}^{\dagger})^{\dagger}$$

sont respectivement l'application de Riesz

$$R : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_{\beta}^{\dagger} \quad \text{et} \quad R^{-1} : \mathcal{H}^{\dagger} \longrightarrow \mathcal{H} .$$

En effet par définition du produit scalaire sur $\mathcal{H}_{\beta}^{\dagger}$, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}_{\beta}^{\dagger}$, on a

$$\langle \xi | \mu \rangle_{\mathcal{H}} = (R\xi | \mu)_{\mathcal{H}_{\beta}^{\dagger}} \quad \text{et} \quad \langle \mu | \xi \rangle_{\mathcal{H}^{\dagger}} = (R^{-1}\mu | \xi)_{\mathcal{H}} .$$

□

EXEMPLE 5 Soient X un espace localement compact et μ une intégrale de Radon (positive) sur X . Alors

$$\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) : \xi \longmapsto \xi \cdot \mu$$

est un sous-espace hilbertien, dont le noyau est

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \varphi \longmapsto [\varphi] .$$

Il faut faire attention si l'on ne fait pas de distinction entre la fonction φ et sa classe $[\varphi]$. Par exemple si le support de μ n'est pas X (cf. remarque 1.2.1 et définition 1.2.2), ce noyau n'est pas injectif! Par précaution, on peut écrire

$$\mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \hookrightarrow \mathcal{M}(X) ,$$

dont le noyau est

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu : \varphi \longmapsto \varphi \cdot \mu .$$

En effet $\langle \varphi | \xi \cdot \mu \rangle = \int \bar{\varphi} \cdot \xi \, d\mu = (\varphi | \xi)$. □

EXEMPLE 6 Pour tout $x \in X$, on a $\mathbb{K} \cdot \varepsilon_x \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ et son noyau est $|\varepsilon_x\rangle \langle \varepsilon_x|$.

D'après l'exemple précédent, comme $\mathbb{K} \cdot \varepsilon_x = \mathbf{L}^2(\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$, le noyau est

$$\varphi \longmapsto \varphi \cdot \varepsilon_x = \varphi(x) \cdot \varepsilon_x = |\varepsilon_x\rangle \langle \varepsilon_x| \varphi .$$

On aurait aussi pu appliquer l'exemple 2. □

EXERCICE Soient \mathcal{H}, \mathcal{G} des espaces de Hilbert. On a $\left(|\mathcal{G}\rangle_i \langle \mathcal{H}| \right)^\dagger = \mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G}_\sigma)$. Montrer que $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G}_\sigma)$ et calculer son noyau.

Dans ce formalisme (cf. Cohen-Tannoudji [5], p. 108 et ss) l'espace vectoriel \mathcal{E} des vecteurs ket représentent les états physiques du système quantique considéré. Rappelons (cf. [5], p. 94 et ss) que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel d'un espace \mathbf{L}^2 . Cohen-Tannoudji suppose pratiquement (cf. p. 95) que $\mathcal{E} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Plus généralement on peut supposer que \mathcal{E} est un espace test par rapport à une intégrale de Radon pivot μ (cf. définition 1.16.2).

Après avoir introduit le dual \mathcal{E}^* de \mathcal{E} formé des vecteurs bra et le vecteur bra associé à un vecteur ket de \mathcal{E} , Cohen-Tannoudji constate que certains bra (les distributions de Dirac) n'ont pas de ket correspondant dans \mathcal{E} (cf. [5], p. 110 et ss). Ces vecteurs bra jouent pourtant un rôle primordial comme vecteurs de base dans une décomposition continue et il leur associe des vecteurs ket généralisés ayant un "produit scalaire" avec tout vecteur ket de \mathcal{E} (cf. [5], p. 113 et 114).

Il me semble plus naturel de considérer un espace localement convexe séparé F , ainsi qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau h , par exemple un espace test F par rapport à une intégrale de Radon pivot μ , donc $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\mu)$, et d'interpréter $h(F)$ comme l'espace des états physiques et F^\dagger comme l'espace des vecteurs ket généralisés. On a donc les inclusions

$$h(F) \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger .$$

5.3 Caractérisation d'un sous-espace hilbertien

Voici une caractérisation d'un sous-espace hilbertien \mathcal{H} à l'aide de son noyau h montrant comment certaines informations relatives à \mathcal{H} sont contenues dans h .

PROPOSITION Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien de noyau h .

(i) Le sous-espace vectoriel $h(F)$ est dense dans \mathcal{H} , et \mathcal{H} est le complété de $h(F)$ muni du produit scalaire

$$(h\varphi|h\psi)_{h(F)} := \langle \varphi|h\psi \rangle_F .$$

(ii) Soit $\xi \in F^\dagger$. Pour que $\xi \in \mathcal{H}$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$|\langle \varphi|\xi \rangle| \leq c \cdot \langle \varphi|h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F .$$

Dans ce cas,

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi|h\varphi \rangle \leq 1} |\langle \varphi|\xi \rangle|$$

est la plus petite de ces constantes.

La densité de $h(F)$ dans \mathcal{H} est clair puisque j est injective (cf. corollaire 3.10.iv). La première partie est alors évidente en utilisant la proposition 5.1. Quant à la seconde, si $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$|\langle \varphi|\xi \rangle| = |(h\varphi|\xi)| \leq \|\xi\| \cdot \|h\varphi\| = \|\xi\| \cdot \langle \varphi|h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} .$$

Ceci montre que $\|\xi\|$ est l'une de ces constantes. L'égalité en découle car la boule unité de $h(F)$ est dense dans celle de \mathcal{H} par la remarque 3.8.2. Réciproquement si $\xi \in F^\dagger$ satisfait à l'inégalité, on vérifie immédiatement que ξ s'annule sur $\text{Ker } h$, donc définit une forme semi-linéaire

$$h\varphi \longmapsto \langle \varphi|\xi \rangle$$

continue sur $h(F)$. Elle possède donc un prolongement continu à \mathcal{H} . D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $\eta \in \mathcal{H}$ tel que

$$\langle \varphi|\xi \rangle = (h\varphi|\eta) = \langle \varphi|\eta \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in F .$$

On a donc $\xi = \eta \in \mathcal{H}$. □

THEOREME (d'unicité) Un sous-espace hilbertien est univoquement déterminé par son noyau.

Plus précisément, si h et g sont les noyaux de $\mathcal{H}, \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$, alors $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, on a $\|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|g\varphi\|_{\mathcal{G}}$.

En effet (ii) montre que le sous-espace vectoriel est univoquement déterminé par h , puis (i) qu'il en est de même de la structure hilbertienne. La seconde partie découle de la remarque 5.1.3. □

REMARQUE 1 Le noyau fournit une indexation uniforme, paramétrée par F , d'une partie dense de chaque sous-espace hilbertien.

REMARQUE 2 Nous verrons en démontrant le théorème de Schwartz (cf. remarque 5.11.2) une autre caractérisation d'un sous-espace hilbertien utilisant la notion d'image décrite dans le paragraphe suivant.

EXEMPLE La seconde partie de la proposition est une version abstraite d'un résultat classique en théorie de l'intégration (cf. exercice 1.16.3) :

Soient X un espace localement compact et μ une intégrale de Radon (positive) sur X . Pour qu'une intégrale de Radon ν sur X appartienne à $\mathbf{L}^2(\mu)$, i.e. que ν soit de base μ et de densité dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, il faut et il suffit que

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{K}(X), \|\varphi\|_2 \leq 1} |\langle \varphi | \nu \rangle| < \infty ,$$

i.e. que ν soit continue sur $\mathcal{K}(X)$ pour la topologie induite par $\mathbf{L}^2(\mu)$.

5.4 Image d'un sous-espace hilbertien

Nous allons maintenant donner un procédé très général de construction de sous-espaces hilbertiens. Soient G un autre espace localement convexe séparé et $\Phi \in \mathcal{L}(F^\dagger, G^\dagger)$. Si $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est un sous-espace hilbertien de F^\dagger de noyau $h : F \longrightarrow F^\dagger$, alors

$$\Phi|_{\mathcal{H}} = \Phi h^\dagger : \mathcal{H} \longrightarrow G^\dagger$$

est une bijection de

$$\text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{H}})^{\perp \mathcal{H}} = (\mathcal{H} \cap \text{Ker} \Phi)^{\perp \mathcal{H}}$$

sur $\Phi(\mathcal{H})$. Munissons ce sous-espace vectoriel du produit scalaire transporté, i.e.

$$(\Phi\xi | \Phi\eta)_{\Phi(\mathcal{H})} := (\xi | \eta)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in \text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{H}})^{\perp \mathcal{H}}.$$

On dit que $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\Phi\xi = \theta$ est un *représentant* de $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$. L'unique représentant $\xi \in \text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{H}})^{\perp \mathcal{H}}$ sera noté $\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta$ et s'appelle le *représentant de Parseval* de θ ; nous dirons également que

$$\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1} : \theta \longmapsto \Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta : \Phi(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est l'*application de Parseval*.

THEOREME $\Phi(\mathcal{H}) \hookrightarrow G^\dagger$ est un sous-espace hilbertien dont le noyau $g : G \longrightarrow G^\dagger$ est $\Phi h \Phi^\dagger$.

Plus précisément, pour tout $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$, on a

$$\|\theta\|_{\Phi(\mathcal{H})} = \min_{\xi \in \mathcal{H}, \Phi\xi = \theta} \|\xi\|_{\mathcal{H}} = \left\| \Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta \right\|_{\mathcal{H}},$$

i.e. le représentant de Parseval $\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta$ est l'unique solution du problème variationnel

$$\Phi\xi = \theta \quad \text{et} \quad \|\xi\| \text{ est minimal.}$$

L'application de Parseval est une isométrie et $\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\Phi|_{\mathcal{H}}$ est l'orthoprojecteur sur $\text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{H}})^{\perp \mathcal{H}}$.

Pour tout $\gamma \in G$, l'élément $h\Phi^\dagger\gamma$ de \mathcal{H} est le représentant de Parseval de $\Phi h \Phi^\dagger\gamma$. D'autre part, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a

$$(\Phi\xi | \Phi\eta)_{\Phi(\mathcal{H})} = (\xi | \eta)_{\mathcal{H}},$$

pour autant que l'un des ξ, η soit le représentant de Parseval.

La deuxième partie découle du théorème de la projection, car le représentant de Parseval $\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta$ de $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$ est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{H}})^{\perp \mathcal{H}}$ de tout représentant de θ .

Démontrons la troisième partie. Pour tout $\gamma \in G$ et $\xi \in \mathcal{H} \cap \text{Ker} \Phi$, on a

$$(h\Phi^\dagger\gamma | \xi)_{\mathcal{H}} = \langle \Phi^\dagger\gamma | \xi \rangle = \langle \gamma | \Phi\xi \rangle = 0,$$

donc $h\Phi^\dagger\gamma \in \text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{H}})^{\perp\mathcal{H}}$. Quant à la dernière formule, on a

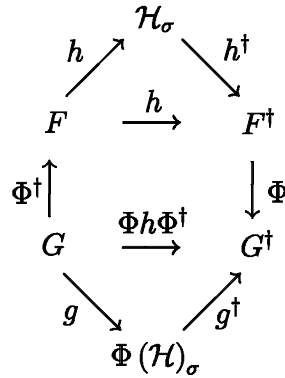
$$\left(\xi \left| \Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta \right.\right)_{\mathcal{H}} = \left(\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}[\Phi\xi] \left| \Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta \right.\right)_{\mathcal{H}} = (\Phi\xi | \theta)_{\Phi(\mathcal{H})} .$$

Finalement, pour tout $\gamma \in G$ et $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$, il vient

$$\langle \gamma | \theta \rangle_G = \left\langle \gamma \left| \Phi \left(\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta \right) \right.\right\rangle_G = \left\langle \Phi^\dagger\gamma \left| \Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta \right.\right\rangle_F = \left(h\Phi^\dagger\gamma \left| \Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}\theta \right.\right)_{\mathcal{H}} = (\Phi h\Phi^\dagger\gamma | \theta)_{\Phi(\mathcal{H})} ,$$

d'où la première assertion. □

On a le diagramme commutatif suivant :



DEFINITION Nous dirons que $\Phi(\mathcal{H}) \hookrightarrow G^\dagger$ est le *sous-espace hilbertien image de \mathcal{H} par Φ* .

REMARQUE L'application de Parseval $\Phi|_{\mathcal{H}}^{-1}$ est un inverse à droite de $\Phi|_{\mathcal{H}}$. Pour que Φ soit une application unitaire de \mathcal{H} sur $\Phi(\mathcal{H})$, il faut et il suffit que Φ soit injective sur \mathcal{H} .

COROLLAIRE Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et $\Psi : F \rightarrow \mathcal{H}$ une application linéaire faiblement continue.

- (i) Si l'on considère la semi-dualité $(\mathcal{H} | \mathcal{H})$, i.e. en identifiant \mathcal{H} et $\mathcal{H}_\beta^\dagger$, alors $\Psi^\dagger(\mathcal{H}) \hookrightarrow F^\dagger$ est un sous-espace hilbertien de noyau $\Psi^\dagger\Psi$.
- (ii) Si l'on considère la semi-dualité $\langle \mathcal{H} | \mathcal{H}_\beta^\dagger \rangle$, i.e. on n'identifie pas \mathcal{H} et $\mathcal{H}_\beta^\dagger$, et $R : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\beta^\dagger$ est l'application de Riesz, alors $\Psi^\dagger(\mathcal{H}_\beta^\dagger) \hookrightarrow F^\dagger$ est un sous-espace hilbertien de noyau $\Psi^\dagger R \Psi$.

En effet les noyaux de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_\beta^\dagger \hookrightarrow \mathcal{H}^\dagger$ sont respectivement Id et R d'après les exemples 5.2.3 et 5.2.4. □

EXEMPLE 1 On peut évidemment appliquer le corollaire si F est un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} muni d'une topologie localement convexe plus fine que celle induite par celle de \mathcal{H} , par exemple la topologie localement convexe la plus fine, et en prenant l'injection canonique pour Ψ .

EXEMPLE 2 L'exemple 5.2.5 s'obtient en considérant l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mu)$, l'application canonique

$$\Psi : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \varphi \longmapsto \varphi$$

et en identifiant $\mathbf{L}^2(\mu)$ avec son semi-dual fort. L'application de Riesz est donc l'identité et, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, on a

$$\langle \varphi | \Psi^\dagger \xi \rangle = (\varphi | \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \bar{\varphi} \cdot \xi \, d\mu = \langle \varphi | \xi \cdot \mu \rangle .$$

On en déduit que le noyau de $\Psi^\dagger(\mathbf{L}^2(\mu))$ est $\varphi \longmapsto \varphi \cdot \mu$, ce qu'il fallait démontrer.

EXEMPLE 3 Plus généralement, nous allons utiliser les notations de l'exemple 3.4.5, en particulier la semi-dualité

$$\left\langle \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$$

définie par $\langle \xi | \eta \rangle_{\mu, \rho} := \int \bar{\xi} \cdot \eta \, d\mu$. L'application de Riesz est dans ce cas

$$\mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow [\mathbf{L}^2(\mu, \rho)]_\beta^\dagger = \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) : \xi \longmapsto \rho \cdot \xi .$$

Soient $\rho \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$ et

$$\Psi : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu, \rho) : \varphi \longmapsto \varphi .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\eta \in \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$, on a

$$\langle \varphi | \Psi^\dagger \eta \rangle = \langle \Psi \varphi | \eta \rangle_\rho = \int \bar{\varphi} \cdot \eta \, d\mu = \langle \varphi | \eta \cdot \mu \rangle ,$$

car $\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \subset \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$:

$$\|\varphi \cdot \eta\|_1 = \left\| \sqrt{\rho} \cdot \varphi \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \right\|_1 \leq \|\sqrt{\rho} \cdot \varphi\|_2 \cdot \left\| \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \right\|_2 = \|\varphi\|_{2, \rho} \cdot \|\eta\|_{2, \frac{1}{\rho}} < \infty .$$

On en déduit que le noyau de $\Psi^\dagger\left(\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)\right)$ est $\Psi^\dagger R \Psi : \varphi \longmapsto \rho \cdot \varphi \cdot \mu$. Mais c'est aussi le noyau de $\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \mu$, puisque

$$\langle \varphi | \eta \cdot \mu \rangle = \int \bar{\varphi} \cdot \eta \, d\mu = \langle \varphi | \eta \rangle_\rho = (\rho \cdot \varphi | \eta)_{\mathbf{L}^2(\mu, \frac{1}{\rho})}$$

(cf. remarque 5.1.1). Ainsi

$$\Psi^\dagger\left(\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)\right) = \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \mu .$$

Remarquons que

$$\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \mu = \mathbf{L}^2(\rho\mu) \cdot \rho\mu = \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \cdot \rho\mu ,$$

ce qui peut paraître surprenant, mais dans le second cas $\rho\mu$ est l'intégrale pivot, tandis que dans le premier c'est μ qui joue ce rôle (cf. remarque 4.2).

On a $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) \subset \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$. Dans ce cas $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) \cdot \mu$ est le plongement naturel de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathbf{L}^2(\rho\mu)$ dans $\mathcal{M}(X)$!

La suffisance découle de ce qui précède. Réciproquement soit K un compact de X . L'injection $\mathbf{L}^2(\rho \cdot \mu, K) \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\mu, K)$ étant évidemment de graphe fermé, elle est continue. Il existe donc une constante $M < \infty$ telle que

$$\|\psi\|_{1,K} \leq M \cdot \|\psi\|_{2,\rho,K} \quad \text{pour tout } \psi \in \mathbf{L}^2(\rho \cdot \mu, K) .$$

Pour tout $f \in \mathbf{L}^1_+(\mu, K)$, on a $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\rho}} \in \mathbf{L}^2(\mu, \rho, K)$, donc

$$\left\| \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\rho}} \right\|_{1,K} \leq M \cdot \left\| \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\rho}} \right\|_{2,\rho,K} = M \cdot \|f\|_{1,K}^{\frac{1}{2}} .$$

Appliquant cette inégalité à 1_K on obtient

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right\|_{1,K} \leq M \cdot \|1\|_{1,K}^{\frac{1}{2}} ,$$

puis par récurrence

$$\left\| \rho^{-\frac{2^n-1}{2^n}} \right\|_{1,K} \leq M^{1+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot \|1\|_{1,K}^{\frac{1}{2^n}}$$

pour tout $n \geq 1$. Comme nous pouvons supposer que $\rho \leq 1$, nous obtenons finalement

$$\|\rho^{-1}\|_{1,K} = \limsup_{n \geq 1} \left\| \rho^{-\frac{2^n-1}{2^n}} \right\|_{1,K} \leq M^2 .$$

□

EXEMPLE 4 Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n . Alors $\mathbf{L}^2(X)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}(X)'$ de noyau

$$\varphi \longmapsto \varphi : \mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X) .$$

De même $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ de noyau

$$\varphi \longmapsto \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) .$$

La théorie des sous-espaces hilbertiens permet de démontrer assez facilement certains résultats cités ou démontrés par P.A. Fillmore et J.P. Williams [9]. Nous en verrons quelques exemples dans la suite.

EXEMPLE 5 Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert, T un opérateur borné dans \mathcal{H} et $\xi \in \mathcal{H}$. Alors le noyau de $T(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est TT^* et, pour que $\xi \in T(\mathcal{H})$, il faut et il suffit que

$$\sup_{\eta \in \mathcal{H}, \|T^*\eta\| \leq 1} |(\eta | \xi)| < \infty .$$

Le noyau de $T(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est évidemment TT^* par le théorème et la seconde partie n'est qu'une reformulation de la proposition 5.3.ii. □

La seconde partie est un résultat de Yu. L. Shmulyan (cf. [9], corollary 2, p. 259).

EXEMPLE 6 Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert, T un opérateur borné dans \mathcal{H} et $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de \mathcal{H} . Pour que $\mathcal{G} = T(\mathcal{H})$, il faut et il suffit que $g = TT^*$. En particulier si $g^{\frac{1}{2}}$ est l'unique racine carrée auto-adjointe positive de g (cf. exemple 6.8.3), on a $\mathcal{G} = g^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H})$.

C'est immédiat par le théorème d'unicité 5.3, puisque le noyau de $T(\mathcal{H})$ est g par l'exemple précédent. □

EXEMPLE 7 Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de noyau g . Alors le noyau de $g(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est g^2 et celui de $g(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $g|_{\mathcal{G}}$.

La première partie découle de l'exemple 5 ci-dessus, puisque g est un opérateur borné positif dans \mathcal{H} , donc $g^* = g$. En considérant $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$, l'adjointe g^\dagger est l'injection canonique de \mathcal{G} dans \mathcal{H} et le noyau de $g(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $gg^\dagger = g|_{\mathcal{G}}$ également par le théorème. □

EXEMPLE 8 Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert et R l'application de Riesz, alors l'espace de Hilbert \mathcal{H}^\dagger est l'image de \mathcal{H} par R , i.e. $\mathcal{H}^\dagger = R(\mathcal{H})$.

C'est immédiat puisque par définition, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a

$$(R\xi | R\eta)_{\mathcal{H}^\dagger} = (\xi | \eta)_{\mathcal{H}}.$$

□

5.5 Transitivité

PROPOSITION Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux

$$h : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma \quad \text{et} \quad g : \mathcal{H}_\sigma \longrightarrow \mathcal{G}_\sigma$$

respectivement. Alors le noyau de $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ est $gh : F \longrightarrow \mathcal{G}_\sigma$.

En effet $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ est l'image de $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ par h^\dagger . Son noyau est donc

$$h^\dagger g^\dagger gh .$$

□

LEMME On a des injections canoniques continues

$$\mathcal{L}_s(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{L}_s(F, \mathcal{H}) : T \longmapsto Th \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_s(F, \mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{L}_s(F, F^\dagger_\sigma) : S \longmapsto h^\dagger S$$

et, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, les formules

$$|\xi\rangle \langle \eta| h = |\xi\rangle \langle \eta| \quad \text{et} \quad h^\dagger |\xi\rangle \langle \eta| h = |\xi\rangle \langle \eta| .$$

La première assertion découle du fait que $h(F)$ est dense dans \mathcal{H} d'après la proposition 5.3.i. La deuxième est évidente. Quant aux formules, pour tout $\varphi \in F$, il vient

$$|\xi\rangle \langle \eta| h \varphi = |\xi\rangle \langle \eta| h \varphi_{\mathcal{H}} \cdot \xi = \langle \eta | \varphi \rangle_F \cdot \xi = |\xi\rangle \langle \eta| \varphi$$

et

$$\langle \varphi | h^\dagger |\xi\rangle \rangle_F = \langle h \varphi | \xi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi | \xi \rangle .$$

□

COROLLAIRE Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien et $(e_j)_{j \in J}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} . Alors $(|e_j\rangle \langle e_j|)_{j \in J}$ et $(|e_j\rangle \langle e_j|)_{j \in J}$ sont respectivement sommables dans $\mathcal{L}_s(F, \mathcal{H})$ et $\mathcal{L}_s(F, F^\dagger)$, et le noyau de \mathcal{H} est

$$\sum_{j \in J} |e_j\rangle \langle e_j| : F \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{ou} \quad \sum_{j \in J} |e_j\rangle \langle e_j| : F \longrightarrow F^\dagger .$$

En effet $(|e_j\rangle \langle e_j|)_{j \in J}$ est sommable dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ et on a

$$\text{Id} = \sum_{j \in J} |e_j\rangle \langle e_j| \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$$

(cf. 3.21), d'où le résultat. □

5.6 Dilatation d'un sous-espace hilbertien

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien de noyau h et $\alpha \geq 0$. L'application

$$\Phi : F^\dagger \longrightarrow F^\dagger : \xi \longmapsto \sqrt{\alpha} \cdot \xi$$

est évidemment linéaire continue.

DEFINITION On désigne par $\alpha \cdot \mathcal{H}$ le sous-espace hilbertien $\Phi(\mathcal{H})$.

On a évidemment $0 \cdot \mathcal{H} = \{0\}$. Pour tout $\alpha > 0$, le sous-espace vectoriel sous-jacent de $\alpha \cdot \mathcal{H}$ est \mathcal{H} et, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$(\sqrt{\alpha} \cdot \xi | \sqrt{\alpha} \cdot \eta)_{\alpha \cdot \mathcal{H}} = (\xi | \eta)_{\mathcal{H}}.$$

Le représentant de Parseval de $\xi \in \alpha \cdot \mathcal{H}$ est $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \xi$ et on a

$$(\xi | \eta)_{\alpha \cdot \mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} \cdot (\xi | \eta)_{\mathcal{H}}.$$

En d'autres termes si $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien et $\alpha > 0$, alors $\mathcal{G} = \alpha \cdot \mathcal{H}$ si, et seulement si, les sous-espaces vectoriels \mathcal{G} et \mathcal{H} coïncident et si, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{G}$, on a

$$(\xi | \eta)_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\alpha} \cdot (\xi | \eta)_{\mathcal{H}}.$$

PROPOSITION Le noyau de $\alpha \cdot \mathcal{H}$ est $\alpha \cdot h$ et, pour tout $\varphi \in F$, le représentant de Parseval de $(\alpha \cdot h) \varphi$ est $\sqrt{\alpha} \cdot h \varphi$.

On a $\Phi^\dagger \varphi = \sqrt{\alpha} \cdot \varphi$ pour tout $\varphi \in F$, d'où le résultat. □

5.7 Somme de deux sous-espaces hilbertiens

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement. L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow F^\dagger : (\xi, \eta) \longmapsto \xi + \eta$$

est continue.

En effet, pour tout $\varphi \in F$, $\xi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{G}$, on a

$$\langle \varphi | \xi + \eta \rangle = (h\varphi | \xi)_{\mathcal{H}} + (g\varphi | \eta)_{\mathcal{G}} = ((h\varphi, g\varphi) | (\xi, \eta))_{\mathcal{H} \times \mathcal{G}} .$$

□

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ le sous-espace hilbertien $\Phi(\mathcal{H} \times \mathcal{G})$ et on dit que c'est la *somme* de \mathcal{H} et \mathcal{G} .

Le sous-espace vectoriel sous-jacent de $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est évidemment la somme des sous-espaces vectoriels sous-jacents. Le produit scalaire de $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est plus complexe et dépend de la position relative de \mathcal{H} et \mathcal{G} puisque

$$\text{Ker } \Phi = \{(\xi, -\xi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G} \mid \xi \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}\} .$$

L'étude du cas où $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$ sera faite en 5.10.

PROPOSITION Le noyau de $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est $h + g$ et, pour tout $\varphi \in F$, le représentant de Parseval de $(h + g)\varphi$ est $(h\varphi, g\varphi)$.

Pour tout $\varphi \in F$, $\xi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{G}$, il vient

$$(\Phi^\dagger \varphi | (\xi, \eta))_{\mathcal{H} \times \mathcal{G}} = \langle \varphi | \xi + \eta \rangle = ((h\varphi, g\varphi) | (\xi, \eta))_{\mathcal{H} \times \mathcal{G}} ,$$

et par suite $\Phi^\dagger \varphi = (h\varphi, g\varphi)$. Le noyau de $\mathcal{H} + \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ est donc

$$\Phi \Phi^\dagger = h + g$$

par le théorème 5.4. □

DEFINITION 2 Le représentant de Parseval de $\theta \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ sera noté $(p_{\mathcal{H}}\theta, p_{\mathcal{G}}\theta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}$; on dit que $\theta = p_{\mathcal{H}}\theta + p_{\mathcal{G}}\theta$ est la *décomposition de Parseval* de θ et que les applications linéaires $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $p_{\mathcal{G}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ sont les *applications de Parseval* de la décomposition $\mathcal{H} + \mathcal{G}$.

Les autres assertions du théorème 5.4 peuvent être reformulées de la manière suivante :

SCOLIE Pour $\theta \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ la décomposition de Parseval $\theta = p_{\mathcal{H}}\theta + p_{\mathcal{G}}\theta$ est l'unique décomposition $\theta = \xi + \eta$ telle que $\|\theta\|_{\mathcal{H} + \mathcal{G}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{G}}^2$. C'est aussi l'unique solution du problème variationnel

$$\theta = \xi + \eta \quad \text{et} \quad \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{G}}^2 \quad \text{est minimal.}$$

THEOREME

(i) L'application de Parseval $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ est le noyau du sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$. Elle est de norme ≤ 1 et

$$\text{Ker } p_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})} .$$

(ii) Les opérateurs $p_{\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{G}}$ dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ sont auto-adjoints positifs de norme ≤ 1 , commutent l'un avec l'autre, satisfont à $p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}} = \text{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$ et $0 \leq p_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{G}} \leq \text{Id}$.

(iii) Le noyau du sous-espace hilbertien $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} + \mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est $p_{\mathcal{H}|_{\mathcal{H}}}$. Il est injectif.

Démonstration de (i) Pour tout $\theta \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$(p_{\mathcal{H}}\theta | \xi)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{H}}\theta | \xi)_{\mathcal{H}} + (p_{\mathcal{G}}\theta | 0)_{\mathcal{G}} = ((p_{\mathcal{H}}\theta, p_{\mathcal{G}}\theta) | (\xi, 0))_{\mathcal{H} \times \mathcal{G}} = (\theta | \xi)_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$$

d'après la dernière formule du théorème 5.4. Ceci montre que $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ est le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$ par le corollaire 5.1. On a

$$\|p_{\mathcal{H}}\theta\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|p_{\mathcal{H}}\theta\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\theta\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\theta\|_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}^2 ,$$

donc $\|p_{\mathcal{H}}\| \leq 1$, et

$$\text{Ker } p_{\mathcal{H}} = (\text{Im } p_{\mathcal{H}}^*)^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})} ,$$

puisque $p_{\mathcal{H}}^*$ est l'injection canonique de \mathcal{H} dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$.

Démonstration de (ii) On a $\|p_{\mathcal{H}}^*\| \leq 1$ par le corollaire 3.8 ou bien simplement, en utilisant le problème variationnel, que

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}^2 \leq \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|0\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Considéré comme un opérateur dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$, on en déduit que $p_{\mathcal{H}}$ est de norme ≤ 1 . Par la proposition ci-dessus appliquée à $F = \mathcal{H} + \mathcal{G}$ et l'exemple 5.2.3, on obtient $p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}} = \text{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$. Les autres assertions sont immédiates.

Démonstration de (iii) Le théorème 5.4 montre que le noyau de $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} + \mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est

$$p_{\mathcal{H}} \text{Id } p_{\mathcal{H}}^{\dagger} = p_{\mathcal{H}|_{\mathcal{H}}} .$$

Ce noyau est injectif par (i). □

EXEMPLE Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et S, T des opérateurs bornés dans \mathcal{H} . Alors

$$S(\mathcal{H}) + T(\mathcal{H}) = (SS^* + TT^*)^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H})$$

(cf. [9], theorem 2.2, p. 260).

Cela découle des exemples 5 et 6 de 5.4. En effet, les noyaux des sous-espaces hilbertiens $S(\mathcal{H})$ et $T(\mathcal{H})$ sont respectivement SS^* et TT^* , tandis que celui de $S(\mathcal{H}) + T(\mathcal{H})$ est $SS^* + TT^*$ par la proposition. □

5.8 Structure d'ordre sur les sous-espaces hilbertiens

DEFINITION 1 Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement. Nous noterons $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ si

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G} \text{ est continue de norme } \leq 1 .$$

Ceci définit évidemment une structure d'ordre sur $\text{Hilb}(F^\dagger)$. Remarquons que $\mathcal{L}(F, F^\dagger)$ est aussi muni d'une structure d'ordre, notée $T \leq S$, définie par

$$S - T \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger) ,$$

i.e.

$$\langle \varphi | T\varphi \rangle \leq \langle \varphi | S\varphi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in F .$$

PROPOSITION Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G} \in \text{Hilb}(F^\dagger)$.

- (i) Pour que $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$, il faut et il suffit que l'on ait $h \leq g$.
- (ii) Pour que l'on ait $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{H} \leq \alpha \cdot \mathcal{G}$.

Démonstration de (i) La condition est nécessaire car, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\langle \varphi | h\varphi \rangle = \|h\varphi\|^2 = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, |\xi| \leq 1} |\langle \varphi | \xi \rangle|^2 \leq \sup_{\eta \in \mathcal{G}, |\eta| \leq 1} |\langle \varphi | \eta \rangle| = \langle \varphi | g\varphi \rangle .$$

Réciproquement, soit $\xi \in \mathcal{H}$. Par la proposition 5.3.ii on obtient alors

$$\infty > \|\xi\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leq 1} |\langle \varphi | \xi \rangle| \geq \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | g\varphi \rangle \leq 1} |\langle \varphi | \xi \rangle| ,$$

ce qui montre que $\xi \in \mathcal{G}$ et que $\|\xi\|_{\mathcal{G}} \leq \|\xi\|_{\mathcal{H}}$.

Démonstration de (ii) La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, d'après le théorème du graphe fermé 3.14, l'injection canonique $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ est continue. En effet elle a un graphe fermé, les topologies de \mathcal{H} et \mathcal{G} étant plus fines que celle induite par F^\dagger . Il existe donc un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\|\cdot\|_{\mathcal{G}} \leq \sqrt{\alpha} \cdot \|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_{\frac{1}{\alpha} \cdot \mathcal{H}} ,$$

ce qui montre que $\frac{1}{\alpha} \cdot \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$. □

COROLLAIRE Si $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ comme ensembles, alors les normes de \mathcal{H} et \mathcal{G} sont équivalentes et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\alpha \cdot \mathcal{G} \leq \mathcal{H} \leq \beta \cdot \mathcal{G} .$$

En particulier, sur un sous-espace vectoriel de F^\dagger il existe au plus une topologie d'espace de Hilbert telle que l'injection canonique soit continue.

DEFINITION 2 Dans le cas du corollaire, on dit que \mathcal{H} et \mathcal{G} sont *équivalents* et on écrit $\mathcal{H} \equiv \mathcal{G}$.

5.9 Intersection de deux sous-espaces hilbertiens

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement. On vérifie immédiatement que $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ muni du produit scalaire

$$(\theta | \vartheta)_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}} := (\theta | \vartheta)_{\mathcal{H}} + (\theta | \vartheta)_{\mathcal{G}}$$

est un sous-espace hilbertien. On a $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \leq \mathcal{H}, \mathcal{G}$.

PROPOSITION *Les noyaux de $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$ sont respectivement $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{G}}p_{\mathcal{H}} = p_{\mathcal{H}}p_{\mathcal{G}}$. On a*

$$\text{Ker } p_{\mathcal{G}} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G})^{\perp_{\mathcal{H}}}.$$

En outre

$$\mathcal{H} = p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$$

et les applications de Parseval de cette décomposition sont $p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}$, donc

$$0 \leq p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}}, p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}} \leq \text{Id}.$$

D'autre part $h(F)$ est dense dans $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} + \mathcal{G})$ et

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|p_{\mathcal{H}}\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \cdot \|p_{\mathcal{G}}\xi\|_{\mathcal{G}}^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}.$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\theta \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$, on a

$$(\xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{H}}\xi + p_{\mathcal{G}}\xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{G}}\xi | \theta)_{\mathcal{G}} + (p_{\mathcal{G}}\xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{G}}\xi | \theta)_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}},$$

car $(p_{\mathcal{H}}\xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (\xi | \theta)_{\mathcal{H} + \mathcal{G}} = (p_{\mathcal{G}}\xi | \theta)_{\mathcal{G}}$. Ceci prouve la première partie grâce au corollaire 5.1. Par la proposition 5.5 et le théorème 5.7, on en déduit que le noyau de $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$ est $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}p_{\mathcal{H}} = p_{\mathcal{G}}p_{\mathcal{H}}$. Si $\theta \in \text{Ker } p_{\mathcal{G}}$, on a $\theta = p_{\mathcal{H}}\theta \in \mathcal{H}$, donc

$$\text{Ker } p_{\mathcal{G}} = \text{Ker } p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}} = \left(\text{Im } p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}^\dagger \right)^{\perp_{\mathcal{H}}} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G})^{\perp_{\mathcal{H}}},$$

puisque $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}^\dagger$ est l'injection canonique de $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ dans \mathcal{H} .

En outre d'après 5.7, proposition et théorème, le noyau de

$$p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$$

est $p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}} = \text{Id}_{\mathcal{H}}$, ce qui permet de conclure à l'aide du théorème d'unicité 5.3. D'autre part

$$h(F) = p_{\mathcal{H}}(h + g)(F)$$

et $(h + g)(F)$ est dense dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ d'après la proposition 5.3.i. Quant à la formule, on a

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|p_{\mathcal{H}}\xi\|_{p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} + \mathcal{G})}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\xi\|_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{H} + \mathcal{G}}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\xi\|_{\mathcal{G}}^2 \\ &= \|p_{\mathcal{H}}\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \cdot \|p_{\mathcal{G}}\xi\|_{\mathcal{G}}^2. \end{aligned}$$

□

5.10 Somme directe de deux sous-espaces hilbertiens

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement.

DEFINITION On dit que $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est la *somme directe* de \mathcal{H} et \mathcal{G} si l'application

$$\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} : (\xi, \eta) \longmapsto \xi + \eta$$

est bijective, i.e. si $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$. Dans ce cas on écrit $\mathcal{H} \boxplus \mathcal{G}$.

REMARQUE Cette notation est justifiée, car Φ est une application unitaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ sur $\mathcal{H} + \mathcal{G}$, donc \mathcal{H} et \mathcal{G} sont orthogonaux dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ et les applications de Parseval $p_{\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{G}}$ sont respectivement les orthoprojecteurs sur \mathcal{H} et \mathcal{G} .

Ainsi l'orthogonalité de \mathcal{H} et \mathcal{G} dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est équivalente à $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$.

PROPOSITION Pour que la somme $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ soit directe, il faut et il suffit que \mathcal{H} et \mathcal{G} soient étrangers pour l'ordre, c'est-à-dire que, pour tout sous-espace hilbertien \mathcal{K} , on ait $\mathcal{K} = \{0\}$ si $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}, \mathcal{G}$.

La condition est évidemment nécessaire puisque

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}.$$

Réciproquement, on a $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \leq \mathcal{H}, \mathcal{G}$ (cf. 5.9), donc $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$. □

5.11 Théorème de Schwartz

LEMME Pour tout noyau hermitien positif $h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$, la fonction

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme s.c.i. sur F .

Elle est continue si F est tonnelé.

La forme sesquilinéaire

$$F \times F \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle = \langle h\varphi | \psi \rangle$$

est hermitienne positive puisque $h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$. On a donc $|\langle \psi | h\varphi \rangle| \leq \langle \psi | h\psi \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 1.1), donc

$$\sup_{\psi \in F, \langle \psi | h\psi \rangle \leq 1} |\langle \psi | h\varphi \rangle| \leq \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

En prenant

$$\psi = \frac{\varphi}{\langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}}$$

si $\langle \varphi | h\varphi \rangle \neq 0$, on obtient l'égalité, le cas $\langle \varphi | h\varphi \rangle = 0$ étant trivial. On en déduit évidemment que $\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ est s.c.i., puis la continuité à l'aide du scolie 2.13. \square

THEOREME Pour tout noyau hermitien positif $h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ tel que $\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ soit continue, il existe un unique sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau h .

L'application noy $\mathcal{H} \longmapsto h$ est un morphisme injectif croissant de $\text{Hilb}(F^\dagger)$ dans le conoïde ordonné $\mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$; c'est un isomorphisme si F est tonnelé.

En particulier $\text{Hilb}(F^\dagger)$ est un conoïde ordonné et on a associativité et commutativité de l'addition, distributivité de la multiplication par les scalaires positifs par rapport à l'addition et compatibilité avec l'ordre.

En outre si $\Phi \in \mathcal{L}(F_\sigma^\dagger, G_\sigma^\dagger)$, alors

$$\Phi : \text{Hilb}(F^\dagger) \longrightarrow \text{Hilb}(G^\dagger) : \mathcal{H} \longmapsto \Phi(\mathcal{H})$$

est une application linéaire croissante.

L'unicité a déjà été démontrée en 5.3. La forme hermitienne positive $(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle$ passe au quotient $F_h := F / \text{Ker } h$ en définissant

$$(\varphi + \text{Ker } h, \psi + \text{Ker } h) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle,$$

puisque pour $\varphi \in \text{Ker } h$ ou $\psi \in \text{Ker } h$, on a bien $\langle \varphi | h\psi \rangle = \langle h\varphi | \psi \rangle = 0$. C'est un produit scalaire sur F_h par le théorème 1.1, car si $0 = \|\psi + \text{Ker } h\|^2 = \langle \psi | h\psi \rangle$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \varphi | h\psi \rangle| \leq \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \psi | h\psi \rangle^{\frac{1}{2}},$$

montre que $\langle \varphi | h\psi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in F$, donc que $h\psi = 0$, i.e. $\psi + \text{Ker } h = 0$. Soit \widehat{F}_h l'espace de Hilbert complété de F_h (cf. remarque 3.8.2).

L'application canonique quotient

$$\Psi : F \longrightarrow \widehat{F}_h : \varphi \longmapsto \varphi + \text{Ker } h$$

est continue par hypothèse, car on a

$$\|\varphi + \text{Ker } h\|_{\widehat{F}_h} = \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} .$$

D'après le corollaire 5.4.ii, le sous-espace hilbertien image $\mathcal{H} := \Psi^\dagger \left(\left(\widehat{F}_h \right)_\beta^\dagger \right)$ est de noyau $\Psi^\dagger Q \Psi$, où $Q : \widehat{F}_h \longrightarrow \left(\widehat{F}_h \right)_\beta^\dagger$ désigne l'application de Riesz. Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\langle \varphi | \Psi^\dagger Q \Psi \psi \rangle = \langle \Psi \varphi | Q \Psi \psi \rangle_{\widehat{F}_h} = (\Psi \varphi | \Psi \psi)_{\widehat{F}_h} = \langle \varphi | h\psi \rangle ,$$

donc $\Psi^\dagger Q \Psi = h$.

La dernière partie découle des propositions 5.6, 5.7, 5.8 et du théorème 5.4. ——— □

REMARQUE 1 Il est pratiquement indispensable de faire l'hypothèse que F est tonnelé pour montrer que

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme continue. On peut quelque peu l'affaiblir, car il suffit que F^\dagger soit séquentiellement complet pour une topologie compatible avec la dualité, mais cela ne semble pas très utile.

Plus généralement, noy est un isomorphisme de $\text{Hilb}(F^\dagger)$ sur le sous-conoïde héréditaire vers le bas de $\mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ formé des noyaux positifs h tels que la semi-norme

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

soit continue pour la topologie de Mackey $\tau(F, F^\dagger)$ sur F .

Il suffit d'appliquer le théorème de Schwartz à F_τ . Nous avons vu que cette condition est nécessaire dans la proposition 5.1. Le sous-conoïde de ces semi-normes est héréditaire vers le bas puisque, pour tout $g \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ tel que $g \leq h$, on a évidemment $\langle \varphi | g\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\varphi \in F$, ce qui montre que la semi-norme associée à g est aussi continue pour la topologie de Mackey. ————— □

REMARQUE 2 Dans la démonstration du théorème de Schwartz nous avons obtenu une autre caractérisation du sous-espace hilbertien \mathcal{H} à l'aide de son noyau h (cf. 5.3). On a

$$\mathcal{H} = \Psi^\dagger \left(\left(\widehat{F}_h \right)_\beta^\dagger \right) ,$$

où

$$\Psi : F \longrightarrow \widehat{F}_h : \varphi \longmapsto \varphi + \text{Ker } h$$

est l'application canonique de F dans l'espace de Hilbert \widehat{F}_h associé à la forme sesquilinéaire hermitienne positive $(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle$ définie par h .

La connexion entre ces deux caractérisations est donnée par la formule $h = \Psi^\dagger Q \Psi$. Si l'on identifie $\left(\widehat{F}_h \right)_\beta^\dagger$ avec son image \mathcal{H} — Ψ^\dagger s'identifie donc à l'injection canonique $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ — ce

qui est souvent utile pour simplifier les notations, alors l'unique application linéaire continue $\widehat{h} : \widehat{F}_h \longrightarrow \mathcal{H}$ qui factorise h par Ψ est l'application de Riesz $Q : \widehat{F}_h \longrightarrow \mathcal{H} = \left(\widehat{F}_h\right)_\beta^\dagger$.

EXEMPLE 1 Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G} \in \text{Hilb}(F^\dagger)$. Si $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$, il existe un unique sous-espace hilbertien \mathcal{K} de F^\dagger tel que $\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{K}$.

En effet $g - h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ est le noyau d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{K} \hookrightarrow F^\dagger$ et

$$g = h + (g - h) ,$$

car la semi-norme

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | (g - h) \varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle \varphi | g \varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

est évidemment continue pour la topologie de Mackey. _____ \square

EXEMPLE 2 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Le théorème de Schwartz montre qu'il y a correspondance biunivoque entre les sous-espaces hilbertiens $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et les opérateurs bornés auto-adjoints positifs g dans \mathcal{H} (cf. exemple 5.2.3).

Ceci montre également que $\text{Hilb}(\mathcal{H})$ est l'ensemble des images d'opérateurs bornés dans \mathcal{H} (cf. exemple 5.4.6). La théorie des sous-espaces hilbertiens est donc le cadre naturel dans lequel il faut placer le travail de Fillmore et Williams.

EXEMPLE 3 Soient $U : F \longrightarrow \mathcal{H}$, $V : F \longrightarrow \mathcal{G}$ des applications linéaires faiblement continues dans des espaces de Hilbert \mathcal{H} et \mathcal{G} , en semi-dualité avec eux-mêmes. La forme sesquilinéaire hermitienne positive

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (U\varphi | U\psi)_\mathcal{H} + (V\varphi | V\psi)_\mathcal{G} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est associée au noyau hermitien positif

$$k := U^\dagger U + V^\dagger V .$$

La semi-norme

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | k \varphi \rangle^{\frac{1}{2}} = [(U\varphi | U\psi)_\mathcal{H} + (V\varphi | V\psi)_\mathcal{G}]^{\frac{1}{2}}$$

est évidemment continue. On a

$$\text{Ker } k = \text{Ker } U \cap \text{Ker } V ,$$

et si $\mathcal{K} \hookrightarrow F^\dagger$ désigne le sous-espace hilbertien associé à k , en utilisant la remarque 2 ci-dessus, on obtient

$$\Psi^\dagger \left(\left(\widehat{F}_k \right)_\beta^\dagger \right) = \mathcal{K} = U^\dagger(\mathcal{H}) + V^\dagger(\mathcal{G}) .$$

En outre, si $\widehat{k} : \widehat{F}_k \longrightarrow F^\dagger$, $\widehat{U} : \widehat{F}_k \longrightarrow \mathcal{H}$ et $\widehat{V} : \widehat{F}_k \longrightarrow \mathcal{G}$ désignent les factorisations de k , U et V par $\varphi \longmapsto \varphi + \text{Ker } k$, alors

$$\widehat{k} = U^\dagger \widehat{U} + V^\dagger \widehat{V}$$

induit l'application de Riesz $\widehat{F}_k \longrightarrow \mathcal{K} = \left(\widehat{F}_k\right)_\beta^\dagger$.

5.12 Champs de carré intégrable

Dans tout ce qui suit, soient

Λ un espace topologique séparé, σ une intégrale de Radon sur Λ ,
 $\widehat{\mathcal{H}} : \Lambda \longrightarrow \text{Hilb}(F^\dagger)$ une famille de sous-espaces hilbertiens dans F^\dagger
 et
 $\widehat{h} : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_s(F, F^\dagger)$ la famille des noyaux correspondants.

DEFINITION 1 Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la norme et le produit scalaire dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ seront notés $\|\cdot\|_\lambda = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}$ et $(\cdot|\cdot)_\lambda = (\cdot|\cdot)_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}$. Pour toute application

$$\theta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger,$$

on définit

$$\|\theta\|_\diamond = \|\theta\|_{\widehat{\mathcal{H}}} : \lambda \longmapsto \|\theta(\lambda)\|_\lambda = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | \widehat{h}(\lambda)\varphi \rangle \leq 1} |\langle \varphi | \theta(\lambda) \rangle| : \Lambda \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+,$$

et on pose

$$\|\theta\|_2 := \|\|\theta\|_\diamond\|_2 = \left(\int^* \|\theta(\lambda)\|_\lambda^2 d\sigma(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il est clair que $\|\cdot\|_2$ est dénombrablement sous-additive. Comme toujours nous ne ferons aucune différence entre une classe, modulo l'égalité σ -p.p., et l'un des représentants de cette classe. Il faut évidemment s'assurer, dans toute définition, que cela ne dépend pas du représentant choisi.

Si $\|\theta\|_2 < \infty$, on a $\|\theta\|_\diamond < \infty$ σ -p.p. (cf. cours d'Analyse [17], corollaire 15.1.ii). D'autre part la proposition 5.3.ii montre que

$$\theta(\lambda) \in \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \iff \|\theta(\lambda)\|_\lambda < \infty.$$

Ceci nous conduit naturellement à la

DEFINITION 2 On dit que $\theta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ est un *champ* (à valeurs dans $\widehat{\mathcal{H}}$) si θ est scalairement σ -mesurable et si l'on a

$$\theta(\lambda) \in \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \quad \text{pour } \sigma\text{-presque tous les } \lambda \in \Lambda,$$

Si θ, ζ sont des champs, on définit

$$(\theta|\zeta)_\diamond : \lambda \longmapsto (\theta(\lambda)|\zeta(\lambda))_\lambda : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K},$$

en σ -presque tous les λ où cela a un sens, et par 0 sinon.

Nous désignerons par $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ l'espace vectoriel des classes, modulo l'égalité σ -p.p., des champs θ de carré intégrable, donc tels que $\|\theta\|_2 < \infty$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

REMARQUE 1 $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ n'est pas nécessairement un espace de Hilbert. Le point délicat est de définir le produit scalaire, ce qui nécessite la σ -mesurabilité de $(\theta|\zeta)_\diamond$, ou celle de $\|\theta\|_\diamond$.

par les formules de polarisations 1.3, ii et iii. Mais ceci n'est en général pas satisfait, même si l'on suppose que \widehat{h} est scalairement σ -mesurable.

On a tout d'abord la

PROPOSITION $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ est un espace de Banach.

Plus précisément soit $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$. Alors il existe une sous-suite $(\alpha(l))_{l \in \mathbb{N}}$ telle que :

(i) Pour σ -presque tous les $\lambda \in \Lambda$, la suite $(\theta_{\alpha(l)}(\lambda))_{l \in \mathbb{N}}$ converge dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$.

(ii) La suite $(\theta_{\alpha(l)})_{l \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement σ -p.p. dans F^\dagger vers un champ $\theta \in \Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ tel que

$$\theta = \lim_k \theta_k \quad \text{dans } \Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) .$$

En outre il existe une fonction $g \in \mathcal{SK}(\Lambda) \cap \mathbf{L}^2(\sigma)$ telle que

$$\|\theta_{\alpha(l)}\|_\diamond \leq g \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N} .$$

Soit $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$. Il existe alors une sous-suite $(\theta_{\alpha(l)})_{l \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_2 \leq \frac{1}{2^l} ,$$

et on a

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_\diamond \right\|_2 \leq \sum_{l=0}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \infty .$$

Ceci montre que

$$\lambda \longmapsto \sum_{l=0}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)}(\lambda) - \theta_{\alpha(l)}(\lambda)\|_\lambda$$

est finie σ -p.p. . Par suite $(\theta_{\alpha(l)}(\lambda))_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ pour σ -presque tous les $\lambda \in \Lambda$. Définissons $\theta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ par

$$\theta(\lambda) = \lim_l \theta_{\alpha(l)}(\lambda) \quad \text{dans } \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) ,$$

lorsque cette limite existe, et par 0 sinon. Ainsi θ est limite σ -p.p. dans F^\dagger de la suite $(\theta_{\alpha(l)})_{l \in \mathbb{N}}$, donc est scalairement σ -mesurable. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\theta_{\alpha(k)} - \theta\|_\diamond = \left\| \sum_{l=k}^{\infty} [\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}] \right\|_\diamond \leq \sum_{l=k}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_\diamond ,$$

donc comme ci-dessus

$$\|\theta_{\alpha(k)} - \theta\|_2 \leq \left\| \sum_{l=k}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_\diamond \right\|_2 \leq \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^l} .$$

Ceci montre que $\theta \in \Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$, et comme dans le cas classique, que $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers θ dans $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$. Finalement, il suffit de choisir $g \in \mathcal{SK}_+(\Lambda)$ tel que $\int^* g^2 d\sigma < \infty$ et

$$g \geq \|\theta_{\alpha(0)}\|_{\diamond} + \sum_{l=0}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_{\diamond} ,$$

puisque

$$\begin{aligned} \int^* \left(\|\theta_{\alpha(0)}\|_{\diamond} + \sum_{l=0}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_{\diamond} \right)^2 d\sigma &= \left\| \|\theta_{\alpha(0)}\|_{\diamond} + \sum_{l=0}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_{\diamond} \right\|_2^2 \leq \\ &\leq \|\theta_{\alpha(0)}\|_2 + \sum_{l=0}^{\infty} \|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\|_2 < \infty . \end{aligned}$$

□

Rappelons que $\mathcal{L}_s(F, F^\dagger) = (|F\rangle_i \langle F|)^\dagger$ (cf. remarque 3.13.1).

LEMME

(i) Une application $\theta : \Lambda \rightarrow F^\dagger$ est un champ si, et seulement si, on a $\|\theta\|_{\diamond} < \infty$ σ -presque partout, en particulier si l'on a $\|\theta\|_2 < \infty$.

(ii) Pour tout $\varphi \in F$, l'application

$$\widehat{h}\varphi : \lambda \mapsto \widehat{h}(\lambda)\varphi : \Lambda \rightarrow F^\dagger$$

est un champ et on a

$$\|\widehat{h}\varphi\|_{\diamond}^2 = (\widehat{h}\varphi | \widehat{h}\varphi)_{\diamond} = \langle \varphi | \widehat{h}\varphi \rangle .$$

(iii) Pour que \widehat{h} soit scalairement σ -mesurable, il faut et il suffit que $\|\widehat{h}\varphi\|_{\diamond}$ soit σ -mesurable pour tout $\varphi \in F$.

(iv) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) \widehat{h} est scalairement σ -intégrable.
- (b) Pour tout $\varphi \in F$, $\widehat{h}\varphi$ est scalairement σ -intégrable.
- (c) Pour tout $\varphi \in F$, on a $\|\widehat{h}\varphi\|_{\diamond} \in \mathbf{L}^2(\sigma)$.

Démonstration de (i) Cela découle de la proposition 5.3.ii.

Démonstration de (ii) C'est évident.

Démonstration de (iii) Remarquons que $|F\rangle \langle F|$ est engendré par les tenseurs élémentaires $|\psi\rangle \langle \varphi|$, pour $\varphi, \psi \in F$, et que

$$\langle |\psi\rangle \langle \varphi| | \widehat{h} \rangle = \langle \psi | \widehat{h}\varphi \rangle .$$

La suffisance est alors conséquence des formules de polarisation de la proposition 1.3, ii et iii, puisque chaque $\widehat{h}(\lambda)$ est hermitien. Il est clair que la condition est nécessaire.

Démonstration de (iv) Les conditions (a) et (b) sont évidemment équivalentes. La formule de (ii) montre que (b) entraîne (c). Finalement, si (c) est satisfait, on a

$$\left| \left\langle \psi \left| \widehat{h}\varphi \right\rangle \right| = \left| \left(\widehat{h}\psi \left| \widehat{h}\varphi \right\rangle \right)_\diamond \right| \leq \left\| \widehat{h}\psi \right\|_\diamond \cdot \left\| \widehat{h}\varphi \right\|_\diamond \in \mathbf{L}^1(\sigma) ,$$

donc (a).

DEFINITION 3 Si \widehat{h} est scalairement σ -intégrable, l'application sesquilinéaire à droite

$$(\varphi, f) \longmapsto \overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi : F \times \mathbf{L}^\infty(\sigma) \longrightarrow \Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

induit une application linéaire $|F\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) | \longrightarrow \Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ dont le sous-espace vectoriel image sera noté $\left| \widehat{h}(F) \right\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) |$. On désigne par $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ la fermeture de $\left| \widehat{h}(F) \right\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) |$ dans $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$, i.e.

$$\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) := \overline{\left| \widehat{h}(F) \right\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) |}^{\Lambda^2} .$$

COROLLAIRE Si \widehat{h} est scalairement σ -intégrable, alors l'espace de Banach $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ est une espace de Hilbert.

Plus précisément, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ et $\theta \in \Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$, les fonctions

$$(\zeta|\theta)_\diamond : \lambda \longmapsto (\zeta(\lambda)|\theta(\lambda))_\lambda \quad \text{et} \quad \|\zeta\|_\diamond : \lambda \longmapsto \|\zeta(\lambda)\|_\lambda$$

sont σ -mesurables, $(\zeta|\theta)_\diamond \in \mathbf{L}^1(\sigma)$ et $\|\zeta\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$. En outre, pour tout $\theta' \in \Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ tel que $\theta = \theta'$ scalairement σ -p.p., on a $(\zeta|\theta)_\diamond = (\zeta|\theta')_\diamond$ σ -p.p. .

Le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ est donné par

$$(\zeta|\theta)_{\mathbf{L}^2} = \int (\zeta|\theta)_\diamond d\sigma \quad \text{pour tout } \zeta, \theta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) .$$

En effet, il existe une suite $(\zeta_k) \subset \left| \widehat{h}(F) \right\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) |$ telle que $\zeta(\lambda) = \lim_k \zeta_k(\lambda)$ dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ pour σ -presque tout les $\lambda \in \Lambda$. Mais pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, la fonction $\left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \left| \theta \right\rangle \right)_\diamond = f \cdot \langle \varphi | \theta \rangle$ est σ -mesurable, et il en est donc de même de $(\zeta_k|\theta)_\diamond$ par combinaisons linéaires, puis de $(\zeta|\theta)_\diamond = \lim_k (\zeta_k|\theta)_\diamond$. On en déduit également que $(\zeta_k|\theta)_\diamond = (\zeta_k|\theta')_\diamond$ σ -p.p., puis que $(\zeta|\theta)_\diamond = (\zeta|\theta')_\diamond$ σ -p.p. . Comme

$$\int^* |(\zeta|\theta)_\diamond| d\sigma \leq \int^* \|\zeta\|_\diamond \cdot \|\theta\|_\diamond d\sigma \leq \|\zeta\|_2 \cdot \|\theta\|_2 < \infty ,$$

les premières assertions sont démontrées.

Il est alors clair que

$$(\zeta, \theta) \longmapsto \int (\zeta|\theta)_\diamond d\sigma$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ induisant la norme $\|\cdot\|_2$. □

REMARQUE 2 Rappelons (cf. définition 3.12.1) qu'une application $\theta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ est dite scalairement σ -négligeable si, pour tout $\varphi \in F$, on a $\langle \varphi | \theta \rangle = 0$ σ -presque partout ; l'ensemble de mesure nulle dépend évidemment de φ !

Si $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ possède un représentant, pour l'égalité scalaire σ -p.p., qui soit scalairement σ -négligeable, nous allons montrer dans le théorème qui suit que $\zeta = 0$, i.e. $\zeta = 0$ σ -p.p.. En d'autres termes l'égalité σ -p.p. et l'égalité scalaire σ -p.p. coïncident sur $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$.

THEOREME *Si \widehat{h} est scalairement σ -intégrable, alors l'application canonique*

$$\zeta \longmapsto [\zeta] : \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) / \{\theta = 0 \text{ scal. } \sigma\text{-p.p.}\}$$

est unitaire.

Montrons tout d'abord que c'est une isométrie. On a évidemment

$$\|[\zeta]\|_2 := \inf_{\theta = \zeta \text{ scal. } \sigma\text{-p.p.}} \|\theta\|_2 \leq \|\zeta\|_2 .$$

Pour l'autre inégalité, si $\theta = \zeta$ scalairement σ -p.p., pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a

$$\left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \zeta \right)_\diamond = f \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle = f \cdot \langle \varphi | \theta \rangle = \left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \theta \right)_\diamond \quad \sigma\text{-p.p.} ,$$

donc

$$\begin{aligned} \|\zeta\|_2 &= \sup_{\vartheta \in |\widehat{h}(F)\rangle\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) |, \|\vartheta\|_2 \leq 1} \left| \int (\vartheta | \zeta)_\diamond d\sigma \right| = \\ &= \sup_{\vartheta \in |\widehat{h}(F)\rangle\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) |, \|\vartheta\|_2 \leq 1} \left| \int (\vartheta | \theta)_\diamond d\sigma \right| \leq \\ &\leq \sup_{\vartheta \in |\widehat{h}(F)\rangle\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) |, \|\vartheta\|_2 \leq 1} \int^* \|\vartheta\|_\diamond \cdot \|\theta\|_\diamond d\sigma \leq \|\theta\|_2 . \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer la surjectivité. Soit donc $\theta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$. La fonction

$$\vartheta \longmapsto \int (\vartheta | \theta)_\diamond d\sigma : \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme semi-linéaire continue, puisque

$$\left| \int (\vartheta | \theta)_\diamond d\sigma \right| \leq \int^* \|\vartheta\|_\diamond \cdot \|\theta\|_\diamond d\sigma \leq \|\vartheta\|_2 \cdot \|\theta\|_2 .$$

Utilisant le théorème de représentation de Riesz, il existe $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ tel que

$$(\vartheta | \zeta)_{\mathbf{L}^2} = \int (\vartheta | \theta)_\diamond d\sigma \quad \text{pour tout } \vartheta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) .$$

Pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a alors

$$\int f \cdot \langle \varphi | \theta \rangle d\sigma = \int \left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \theta \right)_\diamond d\sigma = \left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \zeta \right)_{\mathbf{L}^2} = \int f \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle d\sigma .$$

Remarquons maintenant que $\langle \varphi | \theta - \zeta \rangle \in \mathbf{L}^1(\sigma)$, puisque cette fonction est σ -mesurable et que

$$\|\langle \varphi | \theta - \zeta \rangle\|_1 = \left\| \left(\widehat{h}\varphi \middle| \theta - \zeta \right)_\diamond \right\|_1 \leq \left\| \widehat{h}\varphi \right\|_2 \cdot \|\theta - \zeta\|_2 < \infty .$$

Elle est donc σ -modérée et grâce à l'exemple 1.16.1, qui montre que $\mathbf{L}^\infty(\sigma)$ est un espace test, on en tire $\theta = \zeta$ scalairement σ -presque partout (cf. lemme 1.16.iii).

Nous aurions aussi pu utiliser le fait que $\mathbf{L}^{\infty, \bullet}(\sigma)$ est le dual fort de $\mathbf{L}^1(\sigma)$, résultat que nous n'avons malheureusement pas démontré (cf. exemple 3.8.2 et remarque 3.8). — \square

REMARQUE 3 Ce qui précède peut être généralisé de la manière suivante. Si G est un espace test de fonctions contenu dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$, il suffit de supposer que \widehat{h} est scalairement σ -intégrable sur G , i.e. pour tout $\gamma \in G$, le champ $\gamma \cdot \widehat{h}$ est scalairement σ -intégrable.

On peut par exemple prendre l'espace vectoriel $\mathcal{KL}^\infty(\sigma)$ des fonctions essentiellement bornées à support compact, muni de la topologie finale par aux sous-espaces vectoriels $\mathcal{KL}^\infty(\sigma, K)$ des fonctions essentiellement bornées à support dans $K \in \mathfrak{K}(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty, K}$, et supposer que \widehat{h} est scalairement σ -intégrable sur chaque compact de Λ . L'espace $\mathcal{KL}^\infty(\sigma)$, au contraire de $\mathbf{L}^\infty(\sigma)$, est contenu dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$, mais son dual n'est pas des plus agréables. Ceci conduit à introduire d'autres espaces test, par exemple $\mathcal{K}(\Lambda)$ dans le cas localement compact.

DEFINITION 4 Si \widehat{h} est scalairement σ -intégrable sur G , l'application sesquilinéaire à droite

$$(\varphi, \gamma) \mapsto \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi : F \times G \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

induit une application linéaire $|F\rangle \langle G| \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ dont le sous-espace vectoriel image sera noté $|\widehat{h}(F)\rangle \langle G|$. On désigne alors par $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ la fermeture de $|\widehat{h}(F)\rangle \langle G|$ dans $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$.

Remarquons, si \widehat{h} est en plus scalairement σ -intégrable, que pour tout $\varphi \in F$, on a $\|\widehat{h}\varphi\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$; il existe donc une suite croissante $(A_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de parties σ -intégrables telle que $\|\widehat{h}\varphi\|_\diamond$ s'annule hors de $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l$. On en déduit que $\widehat{h}\varphi = \lim_l 1_{A_l} \cdot \widehat{h}\varphi$ dans $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$. Puisque G est dense dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$ (cf. théorème 1.16.i) et que $1_{A_l} \in \mathbf{L}^2(\sigma)$, on en déduit que $\widehat{h}\varphi$ appartient à la fermeture de $|\widehat{h}(F)\rangle \langle G|$ dans $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$, i.e.

$$\overline{|\widehat{h}(F)\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)|}^{\mathbf{\Lambda}^2} \subset \overline{|\widehat{h}(F)\rangle \langle G|}^{\mathbf{\Lambda}^2}.$$

Réciproquement soit $\gamma \in G$ et posons $A_l := \{|\gamma| \leq l\}$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$. On a $1_{A_l} \cdot \gamma \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ et comme $\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi = \lim_l 1_{A_l} \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi$ dans $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$, on obtient l'autre inclusion.

REMARQUE 4 Le théorème est encore valable dans cette situation générale en utilisant l'intégration essentielle. Il faut alors considérer les relations d'équivalence "égalité localement σ -p.p." et "égalité scalaire localement σ -p.p.".

EXERCICE Soit A une partie de Λ .

(a) Montrer que $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}})$ est contenu et fermé dans $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$.

(b) Si A est σ -mesurable, montrer que

$$\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}) = 1_A \cdot \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) = \mathbf{\Lambda}^2(1_A \cdot \sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

en explicitant les applications permettant l'identification.

(c) Si A est σ -mesurable et \widehat{h} scalairement σ -intégrable, alors

$$\mathbf{L}^2(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}) = 1_A \cdot \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) = \mathbf{L}^2(1_A \cdot \sigma, \widehat{\mathcal{H}}) .$$

REMARQUE 5 Si dans la définition 1 on remplace l'intégrale supérieure par l'intégrale supérieure essentielle et dans la définition 2 on calcule modulo l'égalité locale σ -p.p., l'espace $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ ne change pas.

En effet une fonction essentiellement de carré σ -intégrable est égale localement σ -p.p. à une fonction de carré σ -intégrable.

5.13 Intégration d'une famille de sous-espaces hilbertiens

Rappelons que si F est tonnelé, il en est de même de $|F\rangle_i \langle F|$ (cf. corollaire 2.14). D'après l'exemple 2.10.4 on a $F^{\otimes} = (F_{fine})^\dagger$, donc

$$(|F\rangle \langle F|)^{\otimes} = L(F, F^{\otimes}) = \mathcal{L}(F_{fine}, (F_{fine})^\dagger) = (|F_{fine}\rangle_i \langle F_{fine}|)^\dagger$$

(cf. remarque 3.13.1). En fait on a $|F_{fine}\rangle_i \langle F_{fine}| = (|F\rangle_i \langle F|)_{fine}$.

LEMME Si \hat{h} est scalairement σ -intégrable, alors $\int \hat{h} d\sigma \in (|F\rangle \langle F|)^{\otimes}$ est le noyau d'un sous-espace hilbertien \mathcal{H} de F^{\otimes} et, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\left(\int \hat{h} d\sigma \right) \varphi = \int \hat{h} \varphi d\sigma,$$

ainsi que

$$\|\hat{h}\varphi\|_2^2 = \left\| \left(\int \hat{h} d\sigma \right) \varphi \right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| \left(\int \hat{h} d\sigma \right) \varphi \right\rangle &= \left\langle |\psi\rangle \langle \varphi| \left| \int \hat{h} d\sigma \right\rangle = \int \left\langle |\psi\rangle \langle \varphi| \left| \hat{h} \right\rangle d\sigma = \int \langle \psi | \hat{h} \varphi \rangle d\sigma = \\ &= \int \langle \hat{h} \psi | \varphi \rangle d\sigma = \dots = \left\langle \left(\int \hat{h} d\sigma \right) \psi \left| \varphi \right\rangle \right. \end{aligned}$$

et

$$\left\langle \varphi \left| \left(\int \hat{h} d\sigma \right) \varphi \right\rangle = \int \langle \varphi | \hat{h} \varphi \rangle d\sigma \geq 0,$$

ce qui montre que $\int \hat{h} d\sigma \in L_+(F, F^{\otimes})$. Comme F_{fine} est un espace tonnelé (cf. exemple 2.13.4), le théorème de Schwartz 5.12 et le lemme 5.12 montrent que $\int \hat{h} d\sigma$ est le noyau d'un sous-espace hilbertien de F^{\otimes} . Les deux formules sont immédiates :

$$\left\langle \psi \left| \left(\int \hat{h} d\sigma \right) \varphi \right\rangle = \int \langle \psi | \hat{h} \varphi \rangle d\sigma = \left\langle \psi \left| \int \hat{h} \varphi d\sigma \right\rangle\right.$$

et

$$\|\hat{h}\varphi\|_2^2 = \int \|\hat{h}\varphi\|_{\diamond}^2 d\sigma = \int \langle \varphi | \hat{h} \varphi \rangle d\sigma = \left\langle \varphi \left| \left(\int \hat{h} d\sigma \right) \varphi \right\rangle = \left\| \left(\int \hat{h} d\sigma \right) \varphi \right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

DEFINITION Si \hat{h} est scalairement σ -intégrable, on désigne par $\int \hat{\mathcal{H}} d\sigma$ le sous-espace hilbertien de F^{\otimes} dont le noyau est $\int \hat{h} d\sigma$.

Il nous faut maintenant répondre à la question : sous quelles conditions est-ce que $\int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$ est un sous-espace hilbertien de F^\dagger ?

THEOREME *Considérons les propriétés suivantes :*

(i) $\left\| \widehat{h\varphi} \right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ pour tout $\varphi \in F$ et la fonction $\varphi \mapsto \left\| \widehat{h\varphi} \right\|_2$ est une semi-norme continue sur F .

(ii) $\left\| \widehat{h\varphi} \right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ pour tout $\varphi \in F$ et la fonction $\varphi \mapsto \left\| \widehat{h\varphi} \right\|_2$ est une semi-norme de Mackey sur F .

(iii) \widehat{h} est scalairement σ -intégrable et il existe un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau h tel que

$$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma \quad \text{i.e.} \quad \|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \left\| \widehat{h\varphi} \right\|_2 \quad \text{pour tout } \varphi \in F .$$

(iv) \widehat{h} est σ -intégrable dans $\mathcal{L}_s(F, F^\dagger)$.

(v) \widehat{h} est scalairement σ -intégrable dans $\mathcal{L}_s(F, F^\dagger)$.

(vi) Pour tout $\varphi \in F$, on a $\left\| \widehat{h\varphi} \right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$.

Alors

$$(i) \implies (ii) \iff (iii) \implies (iv) \implies (v) \implies (vi) .$$

Si F est tonnelé, alors (v) \implies (i). Si F est un espace localement convexe final par rapport à une famille d'applications linéaires $T_j : F_j \longrightarrow F$, chaque F_j étant un espace de Fréchet, alors (vi) \implies (i).

(i) \implies (ii) C'est évident, puisque la topologie de Mackey est la plus fine des topologies localement convexes compatibles avec la semi-dualité $\langle F | F^\dagger \rangle$ (cf. proposition 3.11.iii).

(ii) \implies (iii) Il suffit de poser $\mathcal{H} := \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma \hookrightarrow F^\circledast$. L'équivalence des deux égalités découle du théorème d'unicité 5.3 et du lemme ci-dessus et \mathcal{H} est un sous-espace hilbertien de F^\dagger par le théorème de Schwartz (cf. remarque 5.11.1).

(iii) \implies (ii) Puisque \mathcal{H} est un sous-espace hilbertien de F^\dagger , la proposition 5.1 montre que

$$\varphi \mapsto \left\| \widehat{h\varphi} \right\|_2 = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}$$

est une semi-norme de Mackey.

(iii) \implies (iv) Par définition (cf. proposition et définition 3 de 3.12), il nous suffit de prouver que

$$t \mapsto \left\| \left\langle t \mid \widehat{h} \right\rangle \right\|_1$$

est une semi-norme continue sur $|F_\tau\rangle_i \langle F_\tau|$, c'est-à-dire que

$$(\psi, \varphi) \mapsto \left\| \left\langle |\psi\rangle \langle \varphi| \mid \widehat{h} \right\rangle \right\|_1 = \left\| \left\langle \psi \mid \widehat{h\varphi} \right\rangle \right\|_1$$

est séparément une semi-norme de Mackey. Or

$$\left\| \left\langle \psi \mid \widehat{h\varphi} \right\rangle \right\|_1 = \int \left| \left\langle \psi \mid \widehat{h\varphi} \right\rangle \right| d\sigma \leq \left\| \widehat{h\psi} \right\|_2 \cdot \left\| \widehat{h\varphi} \right\|_2 ,$$

d'où notre assertion par la proposition 5.1.

(iv) \Rightarrow (v) C'est évident.

(v) \Rightarrow (vi) C'est évident par le lemme 5.12.iv.

(v) \Rightarrow (i) Pour cette implication nous supposons que F est tonnelé. Par hypothèse $\int \widehat{h} d\sigma \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$, donc

$$\varphi \mapsto \|\widehat{h}\varphi\|_2 = \left\langle \varphi \left| \left(\int \widehat{h} d\sigma \right) \varphi \right. \right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme continue sur F par le lemme 5.11, ce qu'il fallait démontrer.

(vi) \Rightarrow (i) Nous supposons maintenant que F est un espace localement convexe final par rapport à une famille d'applications linéaires $T_j : F_j \rightarrow F$, chaque F_j étant un espace de Fréchet. Il nous suffit de prouver que

$$\varphi \mapsto \widehat{h}\varphi : F \rightarrow \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

est continue. L'hypothèse nous ramène au cas où F est un espace de Fréchet et, par le théorème du graphe fermé 3.14, il nous reste à montrer que, pour toute suite $(\varphi_k) \subset F$ telle que $\varphi := \lim_k \varphi_k$ existe dans F et $\theta := \lim_k \widehat{h}\varphi_k$ existe dans $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$, on a $\theta = \widehat{h}\varphi$. Mais d'après le théorème 5.12 nous pouvons extraire une sous-suite $(\varphi_{\alpha(l)})$ telle que $\theta = \lim_l \widehat{h}\varphi_{\alpha(l)}$ ponctuellement σ -presque partout dans F^\dagger . La continuité des $\widehat{h}(\lambda) : F \rightarrow F^\dagger$ prouve alors notre assertion, puisque $\theta = \lim_l \widehat{h}\varphi_{\alpha(l)} = \widehat{h}(\lim_l \varphi_{\alpha(l)}) = \widehat{h}\varphi$ tout d'abord σ -p.p., puis dans $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$. □

REMARQUE D'après le théorème de Gelfand-Dunford 3.12, il suffit que F satisfasse à la propriété (GDF) pour que (vi) \Rightarrow (i) (cf. lemme 5.12.iv).

5.14 Décomposition d'un sous-espace hilbertien

L'assertion (iv) du théorème 5.13 est la plus simple et correspond aux besoins pratiques.

DEFINITION Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien. Si $\widehat{\mathcal{H}}$ est une famille de sous-espaces hilbertiens de F^\dagger qui soit scalairement σ -intégrable, i.e. \widehat{h} est scalairement σ -intégrable, et telle que $\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$, i.e.

$$\|h\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \int \|\widehat{h}\varphi\|_{\diamond}^2 d\sigma \quad \text{pour tout } \varphi \in F,$$

nous dirons que $(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ est une *décomposition* du sous-espace hilbertien \mathcal{H} dans F^\dagger , ou bien simplement que l'on a la décomposition

$$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma \quad \text{dans } F^\dagger.$$

THEOREME Si $\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$ dans F^\dagger , alors tout champ $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ est σ -intégrable dans F^\dagger , l'application linéaire

$$\int \diamond d\sigma : \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow F^\dagger : \zeta \longmapsto \int \zeta d\sigma$$

est continue et l'image de $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ par cette application est \mathcal{H} , i.e.

$$\int (\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})) d\sigma = \mathcal{H}.$$

Par définition, pour montrer que ζ est σ -intégrable dans F^\dagger , il suffit de constater que, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\int^* |\langle \varphi | \zeta \rangle| d\sigma = \int^* |(\widehat{h}\varphi | \zeta)_\diamond| \leq \int^* \|\widehat{h}\varphi\|_\diamond \cdot \|\zeta\|_\diamond d\sigma \leq \|\widehat{h}\varphi\|_2 \cdot \|\zeta\|_2 < \infty,$$

et que $\varphi \longmapsto \|\widehat{h}\varphi\|_2$ est une semi-norme continue sur F_τ par le théorème 5.13, (iv) \Rightarrow (ii). L'application $\int \diamond d\sigma$ est évidemment continue, puisque

$$\left| \left\langle \varphi \left| \int \zeta d\sigma \right. \right\rangle \right| = \left| \int \langle \varphi | \zeta \rangle d\sigma \right| \leq \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| d\sigma \leq \|\widehat{h}\varphi\|_2 \cdot \|\zeta\|_2.$$

Finalement

$$\left(\left[\int \diamond d\sigma \right]^\dagger \varphi \left| \zeta \right. \right)_{\mathbf{L}^2} = \left\langle \varphi \left| \int \zeta d\sigma \right. \right\rangle = \int (\widehat{h}\varphi | \zeta) d\sigma = (\widehat{h}\varphi | \zeta)_{\mathbf{L}^2},$$

ce qui montre que le noyau de $\int (\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})) d\sigma \hookrightarrow F^\dagger$ est

$$\int \left[\int \diamond d\sigma \right]^\dagger : \varphi \longmapsto \int \widehat{h}\varphi d\sigma = \left(\int \widehat{h} d\sigma \right) \varphi,$$

i.e. $\int \widehat{h} d\sigma = h$, d'où le résultat. □

REMARQUE 1 Nous pouvons maintenant interpréter le théorème à l'aide du théorème 5.4. La formule

$$\mathcal{H} = \int \left(\mathbf{L}^2 \left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}} \right) \right)$$

signifie que $\int \diamond d\sigma$ est une isométrie de $\text{Ker} \left(\int \diamond d\sigma \right)^{\perp \mathbf{L}^2}$ sur \mathcal{H} , en particulier que tout élément $\xi \in \mathcal{H}$ est de la forme $\int \zeta d\sigma$ pour un $\zeta \in \mathbf{L}^2 \left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}} \right)$. On dit que ζ est une *décomposition* de ξ . D'autre part $\text{Ker} \left(\int \diamond d\sigma \right)$ est l'ensemble des $\zeta \in \mathbf{L}^2 \left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}} \right)$ tels que

$$0 = \left\langle \varphi \left| \int \zeta d\sigma \right. \right\rangle = \int \langle \varphi | \zeta \rangle d\sigma = \left(\widehat{h}\varphi \left| \zeta \right. \right)_{\mathbf{L}^2} \quad \text{pour tout } \varphi \in F,$$

donc

$$\left(\text{Ker} \left(\int \diamond d\sigma \right) \right)^{\perp \mathbf{L}^2} = \overline{\widehat{h}(F)}^{\mathbf{L}^2}.$$

Il est important de bien distinguer

$$\overline{\widehat{h}(F)}^{\mathbf{L}^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^2 \left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}} \right) = \overline{\widehat{h}(F)} \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right\rangle^{\Lambda^2}.$$

La *décomposition de Parseval* $\widehat{\xi}$ de $\xi \in \mathcal{H}$ est l'unique décomposition ζ de ξ adhérente à $\widehat{h}(F)$. C'est aussi l'unique décomposition telle que $\|\zeta\|_2$ soit minimale ou que $\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \|\zeta\|_2$.

Par exemple, la décomposition de Parseval $\widehat{h\varphi}$ de $h\varphi$ est $\widehat{h}\varphi$, car on a $h\varphi = \left(\int \widehat{h} d\sigma \right) \varphi = \int \widehat{h}\varphi d\sigma$ et $\widehat{h}\varphi \in \widehat{h}(F)$!

L'application $\xi \mapsto \widehat{\xi}$ est une isométrie de \mathcal{H} sur $\overline{\widehat{h}(F)}^{\mathbf{L}^2}$ prolongeant $h\varphi \mapsto \widehat{h}\varphi$. Comme tout $\xi \in \mathcal{H}$ est limite d'une suite $(h\varphi_k)$, $h(F)$ étant dense dans \mathcal{H} , on a $\widehat{\xi} = \lim \widehat{h}\varphi_k$, ce qui permet en principe de calculer $\widehat{\xi}$!

Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a

$$(\xi | \eta)_{\mathcal{H}} = \int (\zeta | \widehat{\eta})_{\diamond} d\sigma,$$

quel que soit la décomposition ζ de ξ . En particulier l'adjointe de $\xi \mapsto \widehat{\xi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{L}^2 \left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}} \right)$ est $\int \diamond d\sigma$, puisque

$$\left(\zeta \left| \left(\int \diamond d\sigma \right)^* \eta \right. \right)_{\mathbf{L}^2} = \left(\int \zeta d\sigma \left| \eta \right. \right)_{\mathcal{H}} = \int (\zeta | \widehat{\eta})_{\diamond} d\sigma = (\zeta | \widehat{\eta})_{\mathbf{L}^2}.$$

REMARQUE 2 Avec la notation du théorème 5.12, tout $\theta \in \Lambda^2 \left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}} \right)$ est σ -intégrable dans F^\dagger et

$$\int \theta d\sigma = \int [\theta] d\sigma \in \mathcal{H},$$

mais on peut avoir $\|\theta\|_2 > \|[\theta]\|_2$.

REMARQUE 3 Considérons la généralisation décrite dans la remarque 5.12.4. Soit G un espace test de fonctions contenu dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$. D'après la remarque 3.13.1, le semi-dual faible de $|F\rangle_i \langle G|$ est $\mathcal{L}_s(G, F^\dagger)$, celui de $\left| |F\rangle_i \langle G| \right\rangle_i \left\langle |F\rangle_i \langle G| \right\rangle$ étant $\mathcal{L}_s\left(|F\rangle_i \langle G|, \mathcal{L}_s(G, F^\dagger)\right) = \mathcal{L}_s\left(|F\rangle_i \langle G|, \left(|F\rangle_i \langle G| \right)^\dagger\right)$. Etant donné $\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$, nous utiliserons les notations

$$\diamond(\lambda) \cdot \zeta(\lambda) : G \longrightarrow F^\dagger : \gamma \longmapsto \gamma(\lambda) \cdot \zeta(\lambda)$$

et

$$\diamond \cdot \zeta : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_s(G, F^\dagger) : \lambda \longmapsto \diamond(\lambda) \cdot \zeta(\lambda)$$

PROPOSITION *L'application*

$$|\diamond|^2 \cdot \widehat{h} : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_s(G, \mathcal{L}_s(F, F^\dagger)) : \lambda \longmapsto |\diamond(\lambda)|^2 \cdot \widehat{h}(\lambda),$$

est σ -intégrable dans $\mathcal{L}_s(G, \mathcal{L}_s(F, F^\dagger))$ si, et seulement si, les fonctions

$$\varphi \longmapsto \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_2 \quad \text{et} \quad \gamma \longmapsto \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_2$$

sont des semi-normes de Mackey sur F et G respectivement.

Dans ce cas, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ et $\gamma \in G$, le champ $\gamma \cdot \zeta$ est σ -intégrable dans F^\dagger , les applications

$$\int \diamond \cdot \zeta d\sigma : G \longrightarrow F^\dagger : \gamma \longmapsto \int \gamma \cdot \zeta d\sigma$$

et

$$\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathcal{L}_s(G, F^\dagger) : \zeta \longmapsto \int \diamond \cdot \zeta d\sigma$$

sont respectivement faiblement continue et continue. La seconde est injective, et le noyau du sous-espace hilbertien

$$\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \hookrightarrow \mathcal{L}_s(G, F^\dagger)$$

est donné par

$$|F\rangle_i \langle G| \longrightarrow \mathcal{L}_s(G, F^\dagger) : |\varphi\rangle \langle \gamma| \longmapsto \int \diamond \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi d\sigma.$$

Par définition l'intégrabilité de $|\diamond|^2 \cdot \widehat{h}$ signifie que la fonction

$$F \times F \times G \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (\varphi, \psi, \gamma) \longmapsto \int |\gamma|^2 \cdot \left| \langle \varphi | \widehat{h}\psi \rangle \right| d\sigma$$

est séparément une semi-norme de Mackey. En particulier, pour tout $\gamma \in G$, le champ $|\gamma|^2 \cdot \widehat{h}$ est σ -intégrable dans $\mathcal{L}_s(F, F^\dagger)$. Par le théorème 5.13, (iii) \Rightarrow (ii), appliqué à $|\gamma|^2 \cdot \widehat{h}$, la fonction $\varphi \longmapsto \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_2$ est une semi-norme de Mackey sur F , car

$$\int \left\| |\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_{|\gamma|^2 \cdot \widehat{h}}^2 d\sigma = \int \frac{1}{|\gamma|} \cdot \left\| |\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_{\widehat{h}}^2 d\sigma = \int \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_{\widehat{h}}^2 d\sigma = \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_2^2.$$

D'autre part

$$\int |\gamma|^2 \cdot \left| \langle \varphi | \widehat{h}\varphi \rangle \right| d\sigma = \int \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_\diamond^2 d\sigma = \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_2^2,$$

donc $\gamma \mapsto \|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi\|_2$ est aussi une semi-norme de Mackey.

Etant donné $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$, l'intégrabilité de $\diamond \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi$ signifie que la fonction

$$F \times G \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (\psi, \theta) \longmapsto \int \left| \langle \psi \mid \theta \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \rangle \right| d\sigma$$

est séparément une semi-norme de Mackey. En particulier en prenant $\theta = \gamma$ le champ $|\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\varphi$ est σ -intégrable dans F^\dagger .

Par le théorème 5.13, (iii) \Rightarrow (ii), appliqué à $|\gamma|^2 \cdot \widehat{h}$, la fonction $\varphi \mapsto \|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi\|_2$ est une semi-norme de Mackey sur F , car

$$\int \left\| |\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_{|\gamma|^2 \cdot \widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \int \frac{1}{|\gamma|^2} \cdot \left\| |\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_{\widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \int \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_{\widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_2^2.$$

D'autre part

$$\int \left| \langle \psi \mid \theta \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \rangle \right| d\sigma = \int \left\| |\gamma| \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_{|\gamma| \cdot \widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \left\| \sqrt{|\gamma|} \cdot \widehat{h}\diamond \right\|_2^2,$$

donc $\gamma \mapsto \left\| \sqrt{|\gamma|} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_2$ est aussi une semi-norme de Mackey.

Dans ce cas, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ et $\gamma \in G$, on a

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \varphi \mid \int \gamma \cdot \zeta d\sigma \right\rangle \right| &\leq \int^* |\langle \varphi \mid \gamma \cdot \zeta \rangle| d\sigma \leq \int^* \left| \left(\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \mid \zeta \right)_\diamond \right| d\sigma \leq \\ &\leq \int^* \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_\diamond \cdot \|\zeta\|_\diamond d\sigma \leq \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_2 \cdot \|\zeta\|_2 < \infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que le champ $\gamma \cdot \zeta$ est σ -intégrable dans F^\dagger . La continuité des applications découle de l'inégalité

$$\left| \left\langle \varphi \mid \int \gamma \cdot \zeta d\sigma \right\rangle \right| \leq \int^* |\langle \varphi \mid \gamma \cdot \zeta \rangle| d\sigma \leq \left\| \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_2 \cdot \|\zeta\|_2.$$

Montrons l'injectivité. Si $\int \diamond \cdot \zeta d\sigma = 0$, pour tout $\gamma \in G$ et $\varphi \in F$, on a

$$0 = \left\langle \varphi \mid \int \gamma \cdot \zeta d\sigma \right\rangle = \int \gamma \cdot \langle \varphi \mid \zeta \rangle d\sigma,$$

donc $\langle \varphi \mid \zeta \rangle = 0$ localement σ -p.p. puisque G est un espace test, et par suite $\zeta = 0$ σ -p.p. par le théorème 5.12 (cf. remarque 5.12.3).

On peut donc considérer $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ comme un sous-espace hilbertien de $\mathcal{L}_s(G, F^\dagger)$. Calculons son noyau. Pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$, on a

$$\langle |\varphi\rangle \langle \gamma| \mid \zeta \rangle = \left\langle \varphi \mid \int \gamma \cdot \zeta d\sigma \right\rangle = \int \gamma \cdot \langle \varphi \mid \zeta \rangle d\sigma = \left(\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \mid \zeta \right)_{\mathbf{L}^2}.$$

Ce noyau comme application linéaire de $|F\rangle_i \langle G|$ dans $\mathcal{L}_s(G, F^\dagger)$ est donc donné par

$$|\varphi\rangle \langle \gamma| \longmapsto \int \diamond \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi d\sigma.$$

Il provient évidemment de l'application sesquilinéaire à droite

$$F \times G \longrightarrow \mathcal{L}_s(G, F^\dagger) : (\varphi, \gamma) \longmapsto \int \diamond \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi d\sigma.$$

Son image s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ que nous avons noté $|\widehat{h}(F)\rangle\langle G|$.

□

5.15 Espaces de Hilbert à noyaux reproduisants

C'est le cas très particulier de l'exemple 5.2.5, où X est un espace discret. On a alors

$$\mathcal{K}(X) = \mathbb{K}^{(X)} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(X) = \mathbb{K}^X .$$

DEFINITION On dit qu'un espace vectoriel de fonctions \mathcal{H} sur un ensemble X , muni d'une structure d'espace de Hilbert, est un *espace de Hilbert à noyau reproduisant* sur X si \mathcal{H} est un sous-espace hilbertien de \mathbb{K}^X , i.e. si l'injection canonique

$$j : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{K}^X : \xi \longmapsto (\xi(x))_{x \in X}$$

est continue.

Cela signifie que, pour tout $x \in X$, l'évaluation

$$\delta_x : \xi \longmapsto \bar{\xi}(x) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, ou encore que la convergence dans \mathcal{H} implique la convergence simple sur X .

L'adjointe de l'injection canonique est alors

$$j^\dagger : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathcal{H}^\dagger : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot |\delta_x\rangle ,$$

i.e.

$$j^\dagger 1_{\{x\}} = |\delta_x\rangle \quad \text{pour tout } x \in X ,$$

où $(1_{\{x\}})_{x \in X}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^{(X)}$. En effet

$$\langle \xi | j^\dagger 1_{\{x\}} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \xi | 1_{\{x\}} \rangle_{\mathbb{K}^X} = \overline{\xi(x)} = \langle \xi | \delta_x \rangle_{\mathcal{H}} .$$

Le noyau du sous-espace hilbertien \mathcal{H} est ainsi donné, d'après la remarque 5.1.2, par

$$h = jR^{-1}j^\dagger : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot R^{-1} |\delta_x\rangle : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{K}^X .$$

D'après l'exemple 3.13.1, ce noyau hermitien positif est défini par une unique *fonction-noyau*

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K} : (x, y) \longmapsto \langle 1_{\{x\}} | h 1_{\{y\}} \rangle = \langle 1_{\{x\}} | R^{-1} \delta_y \rangle$$

tel que

$$h\varphi(x) = \sum_{y \in X} h(x, y) \cdot \varphi(y) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \text{ et tout } x \in X .$$

Pour tout $x, y \in X$, on a

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)} ,$$

et la positivité signifie que, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$, on a

$$\sum_{x, y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot h(x, y) \cdot \varphi(y) = \langle \varphi | h\varphi \rangle \geq 0 ,$$

i.e. que pour toutes suites finies $(c_j)_{j=1,\dots,n} \subset \mathbb{K}$ et $(x_j)_{j=1,\dots,n} \subset X$, on a

$$\sum_{k,l=1}^n \overline{c_k} \cdot c_l \cdot h(x_k, y_l) \geq 0;$$

on dit que cette fonction-noyau est de *type positif*.

Remarquons encore, pour tout $x, y \in X$, que

$$h(\cdot, y) = R^{-1}\delta_y = h1_{\{y\}} \in \mathcal{H}$$

et que la propriété caractéristique du noyau (cf. corollaire 5.1) s'écrit

$$\langle 1_{\{x\}} | \xi \rangle_{\mathbb{K}(x)} = (R^{-1}\delta_x | \xi)_{\mathcal{H}}$$

c'est-à-dire

$$\xi(x) = (h(\cdot, x) | \xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}.$$

On dit que c'est la *propriété de reproduction* et que $h(\cdot, \cdot)$ est le *noyau reproduisant* de \mathcal{H} .

En outre

PROPOSITION Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert à noyau reproduisant h sur X .

(i) La famille de fonctions $(h(\cdot, x))_{x \in X}$ est totale dans \mathcal{H} et

$$h(x, y) = (h(\cdot, x) | h(\cdot, y))_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

(ii) Soit $x \in X$. On a

$$\|\delta_x\| = \|h(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}$$

et

$$\|h(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}^2 = h(x, x).$$

Si la fonction $h(\cdot, x) \neq 0$, alors $h(x, x) \neq 0$ et

$$\inf_{\xi \in \mathcal{H}, \xi(x)=1} \|\xi\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{h(x, x)^{\frac{1}{2}}} = \left\| \frac{h(\cdot, x)}{h(x, x)} \right\|_{\mathcal{H}}.$$

(iii) Pour toute partie $A \subset X$, on a

$$\|\xi\|_{\infty, A} \leq \sup_{x \in A} h(x, x)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_{\mathcal{H}},$$

i.e. la convergence dans \mathcal{H} entraîne la convergence uniforme sur toute partie A de X où la fonction

$$x \mapsto h(x, x) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est bornée.

En particulier, pour tout $x \in X$ et tout $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, on a

$$|\xi(x)| \leq h(x, x)^{\frac{1}{2}} = \frac{h(\diamond, x)}{\|h(\cdot, x)\|}(x).$$

(iv) Si $(\epsilon_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne de \mathcal{H} , alors $(\epsilon_j(x))_{j \in J} \in \ell^2(J)$ pour tout $x \in X$, $(|\epsilon_j| \langle \epsilon_j |)_{j \in J}$ est sommable dans $\mathbb{K}^{X \times X}$ et

$$h = \sum_{j \in J} |\epsilon_j| \langle \epsilon_j | : (x, y) \mapsto \sum_{j \in J} \epsilon_j(x) \cdot \overline{\epsilon_j(y)}.$$

La convergence est uniforme séparément en chaque variable sur toute partie de X où la fonction $x \mapsto h(x, x) : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bornée.

(v) Si X est un espace topologique et $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X)$, alors la fonction $x \mapsto h(x, x) : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est s.c.i..

(vi) Réciproquement toute fonction-noyau $h : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ hermitienne de type positif définit un sous-espace hilbertien à noyau reproduisant $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{K}^X$.

En particulier si $\Xi = (\Xi_x)_{x \in X}$ est une famille dans un espace de Hilbert \mathcal{X} ou bien $(f_j)_{j \in J}$ est une famille de \mathbb{K}^X telle que $(f_j(x))_{j \in J} \in \ell^2(J)$ pour tout $x \in X$, alors

$$h(x, y) := (\Xi_x | \Xi_y)_{\mathcal{X}},$$

ou plus particulièrement

$$h(x, y) := \sum_{j \in J} f_j(x) \cdot \overline{f_j(y)},$$

est une fonction-noyau hermitienne de type positif et toute fonction-noyau hermitienne de type positif est de ce type.

Démonstration de (i) C'est immédiat par le corollaire 1.4 et la propriété de reproduction.

Démonstration de (ii) La première partie est immédiate, puisque R est une isométrie de \mathcal{H} sur \mathcal{H}^\dagger , et on a

$$\|h(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}^2 = (h(\cdot, x) | h(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = h(x, x)$$

par la propriété de reproduction. La seconde partie découle de la formule démontrée dans l'exercice 3.8.2 :

$$\inf_{\xi \in \mathcal{H}, \xi(x)=1} \|\xi\|_{\mathcal{H}} = d(0, \{\langle \cdot | \delta_x \rangle = 1\}) = \frac{1}{\|\delta_x\|} = \frac{1}{h(x, x)^{\frac{1}{2}}} = \left\| \frac{h(\cdot, x)}{h(x, x)} \right\|_{\mathcal{H}}.$$

Démonstration de (iii) C'est immédiat puisque par la propriété de reproduction et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\xi(x)| \leq \|h(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\xi\|_{\mathcal{H}}.$$

Démonstration de (iv) En effet le j -ième coefficient de Fourier de $h(\cdot, x)$ est

$$(\epsilon_j | h(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = \overline{\epsilon_j(x)}$$

et

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (h(\cdot, x) | h(\cdot, y))_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{k \in J} (\epsilon_k | h(\cdot, x))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_k \left| \sum_{l \in J} (\epsilon_l | h(\cdot, y))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_l \right. \right) = \\ &= \sum_{k, l \in J} \overline{(\epsilon_k | h(\cdot, x))_{\mathcal{H}}} \cdot (\epsilon_l | h(\cdot, y))_{\mathcal{H}} \cdot (\epsilon_k | \epsilon_l) = \sum_{j \in J} \epsilon_j(x) \cdot \overline{\epsilon_j(y)}. \end{aligned}$$

Si $A \subset X$ est telle que $\sup_{x \in A} h(x, x) < \infty$, pour tout $y \in X$ et toute partie finie $I \subset J$, il vient

$$\left\| \sum_{j \in I} \epsilon_j(\diamond) \cdot \overline{\epsilon_j(y)} \right\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} \left| \sum_{j \in I} (\epsilon_j | h(\cdot, y))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_j \right|(x) \leq$$

$$\leq \sup_{x \in A} h(x, x)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{j \in I} (\epsilon_j | h(\cdot, y))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_j \right\|_{\mathcal{H}} .$$

La convergence uniforme en découle puisque le membre de droite converge vers 0 suivant l'ensemble filtré croissant $\mathfrak{P}^f(J)$.

Démonstration de (v) En effet

$$h(x, x) = \sup_{K \in \mathfrak{K}(J)} \sum_{j \in K} |\epsilon_j(x)|^2 .$$

Démonstration de (vi) C'est immédiat par le théorème de Schwartz 5.11 puisque $\varphi \mapsto h(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}} : \mathbb{K}^{(X)} \rightarrow \mathbb{R}$ est évidemment une semi-norme continue, $\mathbb{K}^{(X)}$ étant muni de la topologie localement convexe la plus fine.

Si $h(x, y) := (\Xi_x | \Xi_y)_{\mathcal{X}}$, on a

$$h(x, y) = (\Xi_x | \Xi_y)_{\mathcal{X}} = \overline{(\Xi_y | \Xi_x)_{\mathcal{X}}} = \overline{h(y, x)} ,$$

et pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{x, y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot h(x, y) \cdot \varphi(y) &= \sum_{x, y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot (\Xi_x | \Xi_y)_{\mathcal{X}} \cdot \varphi(y) = \\ &= \left(\sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot \Xi_x \middle| \sum_{y \in X} \varphi(y) \cdot \Xi_y \right)_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot \Xi_x \right\|_{\mathcal{X}}^2 \geq 0 , \end{aligned}$$

ce qui finit de prouver que c'est une fonction-noyau hermitienne de type positif.

Finalement il suffit alors de prendre $\mathcal{X} := \mathcal{H}$ et de poser $\Xi_x := h(\cdot, x)$ et $f_j(x) := \epsilon_j(x)$ à l'aide de (i) et (iv). □

EXERCICE 1 Montrer que le produit (ponctuel sur $X \times X$) de deux fonctions hermitiennes de type positif est hermitien de type positif.

Remarquer que le produit de deux opérateurs positifs bornés dans un espace de Hilbert est positif si ces opérateurs commutent.

EXERCICE 2 Soit $h : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction-noyau hermitienne. Montrer que h est de type positif si, et seulement si, pour toute partie finie $K \subset X$, on a

$$\det (h(x, y))_{x, y \in K} \geq 0 .$$

EXERCICE 3 Soit $h : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction-noyau hermitienne de type positif. Montrer que, pour tout $x, y, z \in X$, on a

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x) \cdot h(y, y)$$

et

$$|h(x, y) - h(x, z)|^2 \leq h(x, x) \cdot |h(y, y) - 2 \cdot \operatorname{Re} h(y, z) + h(z, z)| .$$

5.16 Sous-espaces fermés de $\mathbf{L}^2(\sigma)$ à noyaux reproduisants

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur X . Supposons que X est muni d'une topologie séparée et que le produit scalaire de \mathcal{H} est donné par une intégrale de Radon σ , i.e. $\mathcal{H} \sqsubset \mathbf{L}^2(\sigma)$, ou encore $\mathcal{H} \subset \mathbf{L}^2(\sigma)$ et

$$(\xi | \eta)_{\mathcal{H}} = \int \bar{\xi}(y) \cdot \eta(y) d\sigma(y) \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Pour tout $x \in X$, on a $h(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ et comme $\overline{h(y, x)} = h(x, y)$, il vient

$$\xi(x) = (h(\cdot, x) | \xi)_{\mathcal{H}} = \int h(x, y) \cdot \xi(y) d\sigma(y);$$

les $\xi \in \mathcal{H}$ satisfont donc à une *propriété de moyenne* par rapport aux intégrales $h(x, \cdot) \cdot \sigma$.

THEOREME

(i) On a

$$h(x, y) = \int h(x, z) \cdot h(z, y) d\sigma(z) \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

(ii) Tout opérateur T de $\mathbf{L}^2(\sigma)$ dans \mathcal{H} est un opérateur intégral de noyau

$$x \mapsto \overline{T^*h(\cdot, x)} : X \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma).$$

En particulier l'orthoprojecteur $P_{\mathcal{H}}$ de $\mathbf{L}^2(\sigma)$ sur \mathcal{H} , i.e. le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$, est un opérateur intégral de noyau h :

$$P_{\mathcal{H}}\theta(x) = (h(\cdot, x) | \theta)_{\mathcal{H}} = \int h(x, \cdot) \cdot \theta d\sigma \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } \theta \in \mathbf{L}^2(\sigma).$$

(iii) On a

$$\mathcal{H} = \int \mathbb{K} \cdot h(\cdot, y) d\sigma(y) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma),$$

i.e.

$$\text{Id}_{\mathcal{H}} = \int |h(\cdot, x)| (h(\cdot, x) | \cdot) d\sigma(x) \quad \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Démonstration de (i) C'est immédiat par la propriété de reproduction.

Démonstration de (ii) Pour tout $\theta \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ et $\xi \in \mathcal{H}$, la propriété de reproduction appliquée à $T\theta$ montre que

$$T\theta(x) = (h(\cdot, x) | T\theta)_{\mathcal{H}} = (T^*h(\cdot, x) | \theta)_{\mathbf{L}^2(\sigma)} = \int \overline{T^*h(\cdot, x)} \cdot \theta d\sigma.$$

Le cas particulier de l'orthoprojecteur $P_{\mathcal{H}}$ s'obtient immédiatement en remarquant que $P_{\mathcal{H}}^*$ est l'injection canonique $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$.

Démonstration de (iii) Le noyau de $\mathbb{K} \cdot h(\cdot, x) \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$ est $|h(\cdot, x)| (h(\cdot, x))$ et, pour tout $\theta, \vartheta \in \mathbf{L}^2(\sigma)$, grâce à (ii), on obtient

$$\begin{aligned} \int (\theta |h(\cdot, x)|) \cdot (h(\cdot, x) | \vartheta) d\sigma(x) &= \int \overline{P_{\mathcal{H}}\theta}(x) \cdot P_{\mathcal{H}}\vartheta(x) d\sigma(x) = \\ &= (P_{\mathcal{H}}\theta | P_{\mathcal{H}}\vartheta)_{\mathbf{L}^2(\sigma)} = (\theta | P_{\mathcal{H}}\vartheta)_{\mathbf{L}^2(\sigma)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

REMARQUE 1 Si X est localement compact, le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ est

$$\varphi \longmapsto \int h(\cdot, y) \cdot \varphi(y) d\sigma(y) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Par la proposition 5.5 et l'exemple 5.2.5, ce noyau est égal à

$$\varphi \longmapsto P_{\mathcal{H}}[\varphi],$$

d'où le résultat par (ii). □

REMARQUE 2 Attention, en voulant une démonstration simple du résultat de la remarque précédente, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on pourrait écrire

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \xi \rangle &= \int \overline{\varphi} \cdot \xi d\sigma = \int \overline{\varphi(x)} \left(\int h(x, y) \cdot \xi(y) d\sigma(y) \right) d\sigma(x) = \\ &= \int \overline{\left(\int h(y, x) \cdot \varphi(x) d\sigma(x) \right)} \cdot \xi(y) d\sigma(y) \end{aligned}$$

en ayant utilisé la propriété de reproduction et le théorème de Fubini. Mais ceci n'est possible, grâce au théorème de Tonelli, que si par exemple $x \longmapsto h(x, x)^{\frac{1}{2}}$ est localement σ -intégrable : en effet dans ce cas on obtient

$$\begin{aligned} &\int^* |\varphi(x)| \left(\int^* |h(x, y)| \cdot |\xi(y)| d\sigma(y) \right) d\sigma(x) \leq \\ &\leq \int^* |\varphi(x)| \left(\int^* |h(x, y)|^2 d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int^* |\xi(y)|^2 d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{2}} d\sigma(x) = \\ &= \|\xi\| \cdot \int^* |\varphi(x)| \cdot h(x, x)^{\frac{1}{2}} d\sigma(x) < \infty \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème (i) ci-dessus :

$$\int |h(x, y)|^2 d\sigma(y) = \int h(x, y) \cdot h(y, x) d\sigma(y) = h(x, x).$$

EXEMPLE 1 La fonction-noyau de $\ell^2(X)$ est 1_{Δ} , la fonction caractéristique de la diagonale de $X \times X$. Le produit scalaire est défini par l'intégrale de comptage $\# = \sum_{y \in X} \epsilon_y$ sur l'espace topologique discret X et la propriété de moyenne est triviale, puisque $1_{\Delta}(x, \cdot) \cdot \# = \epsilon_x$.

EXEMPLE 2 O. Lehto [13] a construit un exemple d'espace de Hilbert à noyau reproduisant h formé de fonctions continues, mais tel que la fonction $x \longmapsto h(x, x)$ ne soit pas continue. Cet exemple est décrit dans le livre de Meschkowski [14], p. 46-47.

EXEMPLE 3 (Noyau de Bergman) Cet exemple est en fait à l'origine de la théorie des noyaux reproduisants de Aronszajn.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Nous désignerons par $\mathcal{O}^2(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes ξ sur Ω qui sont de carré intégrables par rapport à l'intégrale de Lebesgue λ_Ω sur Ω , i.e. telles que

$$\|\xi\|_2^2 = \int^* |\xi(z)|^2 d\lambda_\Omega(z) < \infty .$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{O}^2(\Omega)$, $z \in \Omega$ et $0 < \rho < d(z, \text{Fr } \Omega)$, la formule de Cauchy nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \frac{2}{\rho^2} \cdot \int_0^\rho \xi(z) \cdot r dr = \frac{1}{\pi\rho^2} \cdot \int_0^\rho \left(\int_0^{2\pi} \xi(z + r \cdot e^{i\alpha}) d\alpha \right) \cdot r dr = \\ &= \frac{1}{\pi\rho^2} \cdot \int_{|w-z| \leq \rho} \xi(w) d\lambda_\Omega(w) . \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\xi(z)| \leq \frac{1}{\pi\rho^2} \cdot \|\xi\|_2 \cdot \left(\int_{|w-z| \leq \rho} d\lambda_\Omega(w) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \rho} \cdot \|\xi\|_2 ,$$

donc

$$\sup_{z \in K} |\xi(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \rho} \cdot \|\xi\|_2$$

pour tout compact $K \subset \Omega$ tel que $d(K, \text{Fr } \Omega) > \rho > 0$. Par le théorème de Montel, on en déduit que $\mathcal{O}^2(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc un espace de Hilbert, et en outre qu'il est à noyau reproduisant. Sa fonction-noyau s'appelle le *noyau de Bergman* de Ω .

Nous allons maintenant calculer le noyau de $\mathcal{O}^2(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathbb{C}^\mathbb{D}$, où \mathbb{D} est le disque unité de \mathbb{C} . Remarquons tout d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$e_k := \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \cdot \text{id}^k$$

forment une base hilbertienne de $\mathcal{O}^2(\mathbb{D})$.

En effet, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} (e_k | e_l) &= \frac{\sqrt{(k+1)(l+1)}}{\pi} \cdot \int \bar{z}^k \cdot z^l d\lambda_\mathbb{D}(z) = \\ &= \frac{\sqrt{(k+1)(l+1)}}{\pi} \cdot \int_0^1 r^{k+l+1} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\cdot\sigma} d\sigma \right) dr = \\ &= \frac{\sqrt{(k+1)(l+1)}}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k+l+2} \cdot \delta_{k,l} = \delta_{k,l} . \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\xi \in \mathcal{O}^2(\mathbb{D})$ et $0 < \rho < 1$, la série de Taylor $\xi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot z^l$ converge uniformément sur $|z| \leq \rho$, donc

$$\int_{|z| \leq \rho} \bar{z}^k \cdot \xi(z) d\lambda_\mathbb{D}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \int_{|z| \leq \rho} \bar{z}^k \cdot z^l d\lambda_\mathbb{D}(z) = \frac{\pi \cdot \rho^{2(k+1)}}{k+1} \cdot a_k .$$

Puisque $|\text{id}|^k \cdot |\xi|$ est intégrable sur \mathbb{D} , le théorème de Lebesgue montre alors que

$$(e_k | \xi) = \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \cdot \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_{|z| \leq \rho} \bar{z}^k \cdot \xi(z) d\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \cdot a_k.$$

Ainsi $(e_k | \xi) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, entraîne $\xi = 0$, ce qui prouve que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est total dans $\mathcal{O}^2(\mathbb{D})$.

Nous pouvons maintenant utiliser la proposition 5.15.4. Le noyau de $\mathcal{O}^2(\mathbb{D})$ est donc

$$h = \sum_{k \geq 0} |e_k\rangle \langle e_k| \in \mathbb{C}^{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}.$$

On dit que cette fonction-noyau est le noyau de Bergman de D et on a

$$\begin{aligned} h(z, w) &= \sum_{k \geq 0} |e_k\rangle \langle e_k|(z, w) = \sum_{k \geq 0} e_k(z) \cdot \overline{e_k(w)} = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k \geq 0} (k+1) \cdot z^k \cdot \bar{w}^k = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(- \sum_{k \geq 0} \text{id}^{k+1} \right)'(z\bar{w}) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2} \end{aligned}$$

pour tout $|z|, |w| < 1$.

La propriété de reproduction, ou de moyenne, s'écrit alors

$$\xi(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \int \frac{\xi(w)}{(1 - z\bar{w})^2} d\lambda_{\mathbb{D}}(w) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{O}^2(\mathbb{D}) \text{ et } z \in \mathbb{D}.$$

5.17 Les semi-dualités bien plongées

**Soient F un espace localement convexe séparé
et
 $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien.**

Nous avons déjà rencontré des semi-dualités que nous dirons bien plongées. La plus simple est $(\mathcal{H}|\mathcal{H})$, associée au sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$, donc au diagramme

$$F \xrightarrow{h} \mathcal{H}_\sigma \xrightarrow{h^\dagger} F^\dagger$$

et à la formule

$$\langle \varphi | \xi \rangle_F = (h\varphi | \xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H} .$$

Mais on a aussi

$$\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)'$$

et

$$\langle \varphi | \mu \rangle_{\mathcal{D}(X)} = \langle \varphi | \mu \rangle_{\mathcal{K}(X)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \text{ et } \mu \in \mathcal{M}(X) ,$$

lorsque X est un ouvert de \mathbb{R}^n , ou

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$$

(cf. 4.3), ainsi que

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

et

$$\langle \varphi | \xi \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi | \xi \rangle_\rho \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \xi \in \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) ,$$

si μ est un intégrale de Radon sur X et si ρ est μ -mesurable et telle que $0 < m \leq \rho \leq M < \infty$ (cf. exemple 5.4.3). Remarquons qu'un sous-espace hilbertien, $\mathbf{L}^2(\mu)$ ci-dessus, est au centre du diagramme, i.e. μ est l'intégrale pivot.

Mais que peut-on dire de la semi-dualité $\left\langle \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$, où $\rho, \frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mu)$, ou encore $\langle \mathbf{L}^1(\mu) | \mathbf{L}^\infty(\mu) \rangle$? On a seulement

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

ou

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^\infty(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) ,$$

ainsi que

$$\langle \varphi | \nu \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi | \nu \rangle_{\mu, \rho} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) ,$$

$$\langle \varphi | \gamma \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi | \gamma \rangle_{\mu, \frac{1}{\rho}} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \gamma \in \mathbf{L}^2(\mu, \rho) ,$$

ou

$$\langle \varphi | \nu \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi | \nu \rangle_{\mathbf{L}^1(\mu)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^\infty(\mu) ,$$

$$\langle \varphi | \gamma \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi | \gamma \rangle_{\mathbf{L}^\infty(\mu)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \gamma \in \mathbf{L}^1(\mu) ,$$

et encore

$$\langle \theta | \nu \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \langle \theta | \nu \rangle_{\mu, \rho} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$$

ou

$$\langle \theta | \nu \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \langle \theta | \nu \rangle_{\mathbf{L}^1(\mu)} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^\infty(\mu)$$

Les formules

$$\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2(\mu, \rho)} := \int \bar{\theta} \cdot (\xi + \nu) d\mu = (\theta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)} + \langle \theta | \nu \rangle_{\mu, \rho}$$

et

$$\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)} := \int \bar{\theta} \cdot (\xi + \nu) d\mu = (\theta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)} + \langle \theta | \nu \rangle_{\mathbf{L}^1(\mu)}$$

définissent des semi-dualités entre $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ et $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$ et respectivement $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$ et $\mathbf{L}^2(\mu) + \mathbf{L}^\infty(\mu)$.

Nous allons formuler un concept général englobant toutes ces situations. Soient G_+ et G_- des espaces localement convexes en semi-dualité (cf. définition 3.7.2), notée

$$G_+ \times G_- \longrightarrow \mathbb{K} : (\gamma, \nu) \longmapsto \langle \gamma | \nu \rangle_+ .$$

Rappelons que la semi-dualité $\langle G_- | G_+ \rangle$ est définie par

$$\langle \nu | \gamma \rangle_- := \overline{\langle \gamma | \nu \rangle_+} \quad \text{pour tout } \nu \in G_- \text{ et } \gamma \in G_+ .$$

DEFINITION 1 Nous dirons que la semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ est *bien plongeable* par rapport à \mathcal{H} , s'il existe des applications linéaires $j_\pm : G_\pm \hookrightarrow F^\dagger$ injectives telles que

$$h(F) \subset j_+(G_+) \cap j_-(G_-)$$

et

$$\langle \varphi | j_\mp \theta \rangle_F = \left\langle \begin{array}{c} -1 \\ j_\pm(h\varphi) \end{array} \middle| \theta \right\rangle_\pm \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \theta \in G_\mp . \quad (*)$$

THEOREME *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ est bien plongeable par rapport à \mathcal{H} .*

(ii) *Il existe une application linéaire $\Phi : F \longrightarrow G_+$ faiblement continue et d'image dense telle que $h(F)$ soit dense dans $\Phi^\dagger(G_-)$ et que*

$$\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow \Phi^\dagger(G_-)$$

soit faiblement continue.

(iii) *Il existe une application linéaire $\Phi : F \longrightarrow G_+$ faiblement continue d'image dense et une application linéaire $j_+ : G_+ \longrightarrow F^\dagger$ faiblement continue injective telles que*

$$h^\dagger h = j_+ \Phi .$$

Dans ce cas les applications j_{\pm} sont (faiblement) continues et $j_- = \Phi^\dagger$.

(i) \Rightarrow (ii) Les formules (*) montrent que les applications j_{\mp} sont continues et que leur adjointe sont

$$j_{\mp}^\dagger : F \longrightarrow G_{\pm} : \varphi \longmapsto j_{\pm}^{-1}(h\varphi) .$$

Il suffit donc de poser $\Phi := j_-^\dagger$, car $j_-^{-1}\Xi = j_+^\dagger$ et j_-^{-1} est un isomorphisme de $j_-(G_-)$ sur G_- .

(ii) \Rightarrow (iii) En vertu de l'hypothèse on a $h^\dagger h = \Phi^\dagger \Phi^\dagger \Xi$ et Φ^\dagger est un isomorphisme de $\Phi^\dagger(G_-)$ sur G_- . On a donc

$$h^\dagger h = (h^\dagger h)^\dagger = \Xi^\dagger \left(\begin{matrix} -1 \\ \Phi^\dagger \end{matrix} \right)^\dagger \Phi = j_+ \Phi ,$$

en posant $j_+ := \Xi^\dagger \left(\begin{matrix} -1 \\ \Phi^\dagger \end{matrix} \right)^\dagger : G_+ \longrightarrow \Phi^\dagger(G_-)^\dagger \longrightarrow F^\dagger$; cette application linéaire est évidemment (faiblement) continue injective.

(iii) \Rightarrow (i) Posons $j_- := \Phi^\dagger$. La formule $h^\dagger h = j_+ \Phi$ montre que

$$h(F) = h^\dagger h(F) = j_+ \Phi(F) \subset j_+(G_+)$$

et, pour tout $\varphi \in F$ et $\nu \in G_-$, que

$$\langle \varphi | j_- \nu \rangle_F = \langle \varphi | \Phi^\dagger \nu \rangle_F = \langle \Phi \varphi | \nu \rangle_+ = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ j_+ \Phi \varphi \end{matrix} \middle| \nu \right\rangle_+ = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ j_+ \end{matrix} (h\varphi) \middle| \nu \right\rangle_+ ,$$

c'est-à-dire la formule (*, +).

On a également

$$h^\dagger h = (h^\dagger h)^\dagger = (j_+ \Phi)^\dagger = j_- j_+^\dagger ,$$

ce qui montre que $h(F) \subset j_-(G_-)$, puis pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G_+$, que

$$\langle \varphi | j_+ \gamma \rangle_F = \langle \varphi | j_+ \gamma \rangle_F = \left\langle j_+^\dagger \varphi \middle| \gamma \right\rangle_- = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ j_- j_+^\dagger \varphi \end{matrix} \middle| \gamma \right\rangle_- = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ j_- \end{matrix} (h\varphi) \middle| \gamma \right\rangle_- ,$$

ce qui prouve la formule (*, -). □

Si la semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ est bien plongeable, nous identifierons les espaces G_{\pm} avec leur image $j_{\pm}(G_{\pm})$, donc les applications j_{\pm} avec les injections canoniques. On a alors

$$j_{\mp}^\dagger : F \longrightarrow G_{\pm} : \varphi \longmapsto h\varphi .$$

Nous n'écrivons pas les applications j_{\pm} lorsque cela n'est pas nécessaire!

Ceci nous conduit naturellement à poser la

DEFINITION 2 Si G_+ et G_- sont des sous-espaces vectoriels de F^\dagger , nous dirons que la semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ est *bien plongée* par rapport à \mathcal{H} si l'on a

$$h(F) \subset G_+ \cap G_- ,$$

ainsi que les *formules de dualité*

$$\langle \varphi | \nu \rangle_F = \langle h\varphi | \nu \rangle_+ \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \nu \in G_- \quad (*, +)$$

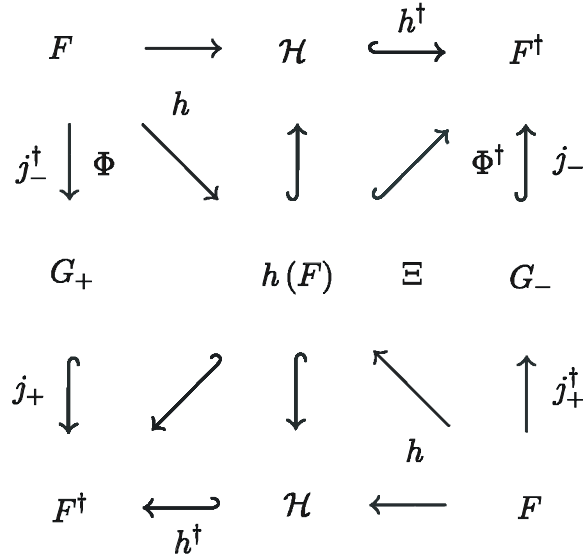
et

$$\langle \varphi | \gamma \rangle_F = \langle h\varphi | \gamma \rangle_- \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G_+ . \quad (*, -)$$

Nous dirons que \mathcal{H} est le *sous-espace hilbertien pivot* .

Attention, dans la formule $(*, +)$ on considère $h\varphi$ comme un élément de G_+ , tandis que dans la formule $(*, -)$ c'est un élément de G_- .

Voici le diagramme résumant la situation :



REMARQUE 1 La construction d'une semi-dualité bien-plongée se fait en général de manière asymétrique comme le suggère le théorème.

Il est souvent naturel de considéré G_- comme une partie de F^\dagger , par exemple s'il existe une application linéaire naturelle $\Phi : F \longrightarrow G_+$ faiblement continue et d'image dense qui permet d'identifier G_- , le semi-dual de G_+ , avec des formes semi-linéaires continues sur F grâce à l'adjointe $\Phi^\dagger : G_- \hookrightarrow F^\dagger$. Il suffit alors de vérifier que l'application linéaire $\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi$ est à valeurs dans G_- , faiblement continue et d'image dense, ou bien qu'il existe une application $j_+ : G_+ \longrightarrow F^\dagger$ faiblement continue injective telles que

$$j_+ \Phi \varphi = h\varphi .$$

REMARQUE 2 L'application linéaire

$$\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow G_-$$

est continue dans les cas suivants :

On considère une topologie localement convexe \mathfrak{X} sur G_- compatible avec la semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$. On peut alors appliqué le théorème du graphe fermé si F est tonnelé et $G_{-, \mathfrak{X}}$ est respectivement un espace de Hilbert (théorème de Ptak 3.14.i et l'exemple 3.14.1), ou un espace de Fréchet (théorème de Ptak 3.14.ii).

En effet le graphe de Ξ est celui de $h^\dagger h$; mais ce dernier est fermé dans $F \times F^\dagger$, donc aussi dans $F \times G_-$, puisque $G_- \hookrightarrow F^\dagger$ est continue. □

REMARQUE 3 Supposons que G_+ est un espace préhilbertien. Si nous voulons appliquer la remarque 2 précédente à la topologie forte sur G_- , nous sommes obligés de supposer que

G_+ est un espace de Hilbert, puisque

$$(G_{-, \beta})_{\beta}^{\dagger} \approx \left((G_+)_{\beta}^{\dagger} \right)_{\beta}^{\dagger} = \widehat{G}_+$$

(cf. exemple 3.8.1).

EXEMPLE 1 En revenant à l'exemple 5.4.3, si $\rho, \frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$, alors la semi-dualité

$$\left\langle \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$$

est bien plongée par rapport à $\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$. Par contre si $\frac{1}{\rho} \notin \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$, alors cette semi-dualité $\left\langle \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$ n'est pas plongeable par rapport à $\mathbf{L}^2(\mu)$, puisque $\mathcal{K}(X)$ n'est pas contenu dans $\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$.

En effet il existe $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$ tel que $\int^* \varphi \cdot \frac{1}{\rho} d\mu = \infty$, donc $\varphi^{\frac{1}{2}} \notin \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$. ——— \square

La semi-dualité $\langle \mathcal{H}_+ | \mathcal{H}_- \rangle$

Soit $\mathcal{H}_- \hookrightarrow F^{\dagger}$ un sous-espace hilbertien de noyau $h_- \in \mathcal{L}_+(F, F^{\dagger})$. La remarque 5.11.2 montre que \mathcal{H}_- peut être considéré comme le semi-dual fort de l'espace de Hilbert $\widehat{F_{h_-}}$ associé à h_- , l'injection canonique $j_- : \mathcal{H}_- \hookrightarrow F^{\dagger}$ étant l'adjointe de

$$\Phi : F \longrightarrow \widehat{F_{h_-}} : \varphi \longmapsto \varphi + \text{Ker } h_- .$$

Remarquons que $h(F)$ est un sous-espace vectoriel dense dans $\mathcal{H}_{-, \sigma}$ si, et seulement si, $h(F)$ est dense dans \mathcal{H}_- , qui est muni de sa norme; en outre l'application linéaire

$$\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow \mathcal{H}_{-, \sigma}$$

est continue si, et seulement si, il en est de même de $\Xi : F_{\tau} \longrightarrow \mathcal{H}_-$.

Cela découle du corollaire 3.10.i et du fait que la topologie de \mathcal{H}_- est égale à la topologie de Mackey puisque \mathcal{H}_- est tonnelé. ————— \square

COROLLAIRE Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La semi-dualité $\left\langle \widehat{F_{h_-}} \middle| \mathcal{H}_- \right\rangle$ est bien plongeable par rapport à \mathcal{H} .
- (ii) $h(F)$ est un sous-espace vectoriel dense de \mathcal{H}_- et $\varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow \mathcal{H}_{-, \sigma}$ est (faiblement) continue.
- (iii) Le noyau $h^{\dagger}h$ de \mathcal{H} se factorise par Φ en une application linéaire continue de F_{h_-} dans F^{\dagger} , i.e. pour tout $\psi \in F$, il existe $c_{\psi} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|\langle \psi | h\varphi \rangle|^2 \leq c_{\psi} \cdot \langle \varphi | h_- \varphi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in F ,$$

dont le prolongement canonique continu $\widehat{h} : \widehat{F_{h_-}} \longrightarrow F^{\dagger}$ est injectif.

Dans ce cas, soit $\mathcal{H}_+ := \widehat{h}\left(\widehat{F_{h_-}}\right)$. Si $Q : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ désigne l'application de Riesz, alors les noyaux h_+ et h_- des sous-espaces hilbertiens

$$\mathcal{H}_+ \hookrightarrow F^{\dagger} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_- \hookrightarrow F^{\dagger}$$

sont respectivement

$$Q_j^{\dagger -1} : F \longrightarrow \mathcal{H}_+ : \varphi \longmapsto Q^{-1}(h\varphi) \quad \text{et} \quad Q_j^{\dagger} : F \longrightarrow \mathcal{H}_- : \varphi \longmapsto Q(h\varphi) .$$

Les équivalences ne sont qu'une reformulation de celles du théorème. Le calcul des noyaux se fait à l'aide de la proposition et de la remarque 5.1.1, ce qui revient à écrire les formules de semi-dualité $(*, \pm)$ à l'aide des produits scalaires de \mathcal{H}_{\pm} et de l'application de Riesz correspondante, puis à utiliser le corollaire 5.1 : pour tout $\varphi \in F$, $\theta \in \mathcal{H}_+$ et $\mu \in \mathcal{H}_-$, on a

$$\langle \varphi | \theta \rangle_F = \langle h\varphi | \theta \rangle_- = \left(Q^{-1}(h\varphi) \middle| \theta \right)_{\mathcal{H}_+}$$

et

$$\langle \varphi | \mu \rangle_F = \langle h\varphi | \mu \rangle_+ = (Q(h\varphi) | \mu)_{\mathcal{H}_-} .$$

□

REMARQUE 4 Pour conclure cet exemple, la définition montre que \mathcal{H}_+ est le complété de $h(F)$ pour le produit scalaire

$$(h\varphi | h\psi)_{\mathcal{H}_+} = \langle \varphi | h_- \psi \rangle_F ,$$

tandis que \mathcal{H}_- est le complété de $h_-(F)$ pour le produit scalaire

$$(h_- \varphi | h_- \psi)_{\mathcal{H}_-} = \langle \varphi | h_- \psi \rangle_F$$

par la proposition 5.3.(i). C'est aussi le complété de $h(F)$, mais pour un produit scalaire plus compliqué :

$$(h\varphi | h\psi)_{\mathcal{H}_-} = \left\langle h\varphi \middle| Q^{-1}(h\psi) \right\rangle_- = \left\langle \varphi \middle| Q^{-1}(h\psi) \right\rangle_F = \left(h\varphi \middle| Q^{-1}(h\psi) \right)_{\mathcal{H}} .$$

EXEMPLE 2 Nous verrons lorsque nous étudierons les opérateurs non-bornés (cf. théorème 7.3) qu'une semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$, où G_+ est un espace préhilbertien, peut être bien plongée, sans que $\langle \widehat{G}_+ | G_- \rangle$ le soit. Ce sera le cas lorsque $h^\dagger h$ se factorise par G_+ en une application linéaire continue injective, mais dont le prolongement continu à \widehat{G}_+ n'est plus injectif.

La semi-dualité $\langle \mathcal{H} \cap G_+ | \mathcal{H} + G_- \rangle$

Soit $\langle G_+ | G_- \rangle$ une semi-dualité bien plongée par rapport à \mathcal{H} et considérons l'espace localement convexe intersection $\mathcal{H} \cap G_+ \hookrightarrow F^\dagger$ (cf. définition 2.4.2). D'après l'exercice 3.7 nous savons que $(\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger = \mathcal{H} + G_-$, car $h(F) \subset \mathcal{H} \cap G_+$ est dense dans \mathcal{H} comme dans G_+ . Cette semi-dualité

$$\left\langle \mathcal{H} \cap G_+ \middle| (\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger \right\rangle = \langle \mathcal{H} \cap G_+ | \mathcal{H} + G_- \rangle$$

est donnée par

$$\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathcal{H} \cap G_+} = (\theta | \xi)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | \nu \rangle_+ \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{H} \cap G_+, \xi \in \mathcal{H} \text{ et } \nu \in G_- .$$

Mais attention, la somme $\mathcal{H} + G_-$ est prise dans $(\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger$! Nous aimerions en fait que cette somme coïncide avec celle prise dans F^\dagger . Ceci revient, en considérant le diagramme commutatif suivant et son dual

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{H} & \mathcal{H} \\
 & \nearrow h & \downarrow \\
 F & \longrightarrow \mathcal{H} \cap G_+ & (\mathcal{H} \cap G_+)^{\dagger} \longrightarrow F^{\dagger} \\
 & \searrow j_-^{\dagger} & \downarrow \\
 & G_+ & G_-
 \end{array}$$

à ce que l'application $(\mathcal{H} \cap G_+)^{\dagger} \longrightarrow F^{\dagger}$ soit injective, donc que $h(F)$ soit dense dans $\mathcal{H} \cap G_+$. Plus précisément on a le

COROLLAIRE Soit $\langle G_+ | G_- \rangle$ une semi-dualité bien plongée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La semi-dualité $\langle \mathcal{H} \cap G_+ | (\mathcal{H} \cap G_+)^{\dagger} \rangle$ est bien plongée.
- (ii) $\mathcal{H} \cap G_+$ et $\mathcal{H} + G_-$, comme sous-espaces vectoriels de F^{\dagger} sont en semi-dualité grâce à $\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathcal{H} \cap G_+} := (\theta | \xi)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | \nu \rangle_+$ pour tout $\theta \in \mathcal{H} \cap G_+$, $\xi \in \mathcal{H}$ et $\nu \in G_-$.
- (iii) Pour tout $\theta \in \mathcal{H} \cap G_+$ et $\nu \in \mathcal{H} \cap G_- \hookrightarrow F^{\dagger}$, on a $(\theta | \nu)_{\mathcal{H}} = \langle \theta | \nu \rangle_+$.
- (iv) $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H} \cap G_+$.

Il nous reste à montrer que

(ii) \Rightarrow (iii) Il vient

$$(\theta | \nu)_{\mathcal{H}} = (\theta | \nu)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | 0 \rangle_+ = \langle \theta | \nu \rangle_{\mathcal{H} \cap G_+} = (\theta | 0)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | \nu \rangle_+ = \langle \theta | \nu \rangle_+ .$$

(iii) \Rightarrow (iv) Si $\xi + \nu \in (\mathcal{H} \cap G_+)^{\dagger}$ s'annule sur $h(F)$, on a $\xi = -\nu \in \mathcal{H} \cap G_- \hookrightarrow F^{\dagger}$, donc

$$(\theta | \xi)_{\mathcal{H}} = \langle \theta | \xi \rangle_+ = \langle \theta | -\nu \rangle_+ ,$$

et par suite $\xi + \nu = 0$ dans $(\mathcal{H} \cap G_+)^{\dagger}$. □

EXEMPLE 3 Un élément $\xi + \eta \neq 0$ dans $(\mathcal{H} \cap G_+)^{\dagger}$ peut être 0 dans F^{\dagger} .

Considérons une intégrale de Radon μ telle qu'il existe

$$\xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \setminus \mathbf{L}^{\infty}(\mu) \quad \text{et} \quad \eta \in \mathbf{L}^{\infty}(\mu) \setminus \mathbf{L}^2(\mu) .$$

Il est clair que $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ et $\mathbf{L}^1(\mu)$, donc

$$(\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu))^{\dagger} = \mathbf{L}^2(\mu) + \mathbf{L}^{\infty}(\mu)$$

(cf. exercice 3.7). Comme $\xi + \eta \notin \mathbf{L}^2(\mu)$, la forme semi-linéaire que cet élément définit sur $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas continue, donc $F := \{\xi + \eta = 0\}$ y est dense, et par suite aussi dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Pour la même raison, puisque $\xi + \eta \notin \mathbf{L}^{\infty}(\mu)$, F est dense dans $\mathbf{L}^1(\mu)$. Munissons F par exemple de la topologie induite par $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$. Les injections canoniques $F \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ et $F \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\mu)$ sont donc continues et d'image dense et par suite

$$\xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^{\dagger} \quad \text{et} \quad \eta \in \mathbf{L}^{\infty}(\mu) \hookrightarrow F^{\dagger} ,$$

mais $\xi + \eta = 0$ dans F^{\dagger} par construction.

Par exemple, on peut prendre pour μ l'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R} , $\xi := 1_{[-1,1]} \cdot \text{id}^{-\frac{1}{4}}$ et $\eta := 1$.

5.18 Les semi-dualités plongées

Ce paragraphe est inspiré de l'article de Xavier Mary, Denis De Brucq et Stéphane Canu [15].

Soient G_+ et G_- des espaces localement convexes en semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ séparante, notée

$$G_+ \times G_- \longrightarrow \mathbb{K} : (\gamma, \nu) \longmapsto \langle \gamma | \nu \rangle_+ .$$

Rappelons que la semi-dualité $\langle G_- | G_+ \rangle$ est définie par

$$\langle \nu | \gamma \rangle_- := \overline{\langle \gamma | \nu \rangle_+} \quad \text{pour tout } \nu \in G_- \text{ et } \gamma \in G_+ .$$

DEFINITION 1 On dit que $\langle G_+ | G_- \rangle$ est *plongée* dans $\langle F | F^\dagger \rangle$ s'il existe des applications linéaires $j_\pm : G_\pm \hookrightarrow F^\dagger$ injectives et faiblement continues.

On dit que $w := j_-^\dagger : F \longrightarrow G_+$, ou $w := j_+ j_-^\dagger : F \longrightarrow F^\dagger$ est le noyau de cette semi-dualité.

LEMME Si l'on identifie G_\pm à des sous-espaces vectoriels de F^\dagger , on a

$$\langle \varphi | \nu \rangle_F = \langle w\varphi | \nu \rangle_+ \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \nu \in G_- .$$

Le noyau de $\langle G_- | G_+ \rangle$ est w^\dagger .

C'est évident, puisque

$$\langle \varphi | \nu \rangle_F = \langle \varphi | j_- \nu \rangle_F = \left\langle j_-^\dagger \varphi \middle| \nu \right\rangle_+ = \langle w\varphi | \nu \rangle_+$$

et

$$w^\dagger = \left(j_+ j_-^\dagger \right)^\dagger = j_- j_+^\dagger .$$

□

EXEMPLE 1 La semi-dualité $\langle \mathcal{AC}_0([0, 1]) | \mathcal{AC}_1([0, 1]) \rangle$ définie par

$$\mathcal{AC}_0([0, 1]) := \{f \in \mathcal{AC}([0, 1]) \mid f(0) = 0\} \quad , \quad \mathcal{AC}_1([0, 1]) := \{g \in \mathcal{AC}([0, 1]) \mid g(1) = 0\}$$

et

$$\langle f | g \rangle_+ := - \int_0^1 \overline{f} \cdot \partial g = \int_0^1 \overline{\partial f} \cdot g$$

est séparante et plongée dans $\langle \mathcal{D}([0, 1]) | \mathcal{D}([0, 1])' \rangle$. Son noyau est

$$\varphi \longmapsto P_0 \varphi := \int_0^\diamond \varphi : \mathcal{D}([0, 1]) \longrightarrow \mathcal{AC}_0([0, 1]) .$$

En effet soit $j_1 : \mathcal{AC}_1([0, 1]) \hookrightarrow \mathcal{D}([0, 1])' : g \longmapsto g \cdot \lambda_{[0, 1]}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0, 1])$ et $g \in \mathcal{AC}_1([0, 1])$, on a alors

$$\left\langle j_1^\dagger \varphi \middle| g \right\rangle_+ = \langle \varphi | j_1 g \rangle = \int_0^1 \overline{\varphi} \cdot g = \int_0^1 \overline{\partial(P_0 \varphi)} \cdot g = \langle P_0 \varphi | g \rangle_+ .$$

□

EXEMPLE 2 Soit $\rho \in \mathbf{L}^\infty([0, 1])$ tel que $\lambda_{[0,1]}$ -presque partout on ait $\rho \neq 0$. La semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ définie par

$$G_+ := \left\{ f = \bar{\rho} \cdot \int_0^\diamond d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_\mathbb{C}([0, 1]) \right\}, \quad G_- = \left\{ g = \int_\diamond^1 \rho d\nu \mid \nu \in \mathcal{M}([0, 1]) \right\}$$

et

$$\langle f | g \rangle_+ := - \int_0^1 \bar{f} d\nu = \int_0^1 g d\bar{\mu}$$

est séparante et plongée dans $\langle \mathcal{D}([0, 1]) | \mathcal{D}([0, 1])' \rangle$. Son noyau est

$$\varphi \longmapsto \bar{\rho} \cdot P_0 \varphi : \mathcal{D}([0, 1]) \longrightarrow \mathcal{AC}_0([0, 1]).$$

En effet

$$- \int_0^1 \bar{f} d\nu = - \int_0^1 \frac{\bar{f}}{\rho} d(\rho \cdot \nu) = - \int_0^1 \frac{\bar{f}}{\rho} d\lambda_g = \int_0^1 g d\lambda_{\frac{\bar{f}}{\rho}} = \int_0^1 g d\bar{\mu}$$

et, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0, 1])$ et $g \in G_-$, on a

$$\langle j_-^\dagger \varphi | g \rangle_+ = \langle \varphi | j_- g \rangle = \int_0^1 \bar{\varphi} \cdot g = \int_0^1 \overline{\partial(P_0 \varphi)} \cdot g = \int_0^1 g d\overline{\lambda_{P_0 \varphi}} = \langle \bar{\rho} \cdot P_0 \varphi | g \rangle_+,$$

puisque $f = \bar{\rho} \cdot \int_0^\diamond d\mu = \bar{\rho} \cdot P_0 \varphi$. □

DEFINITION 2 On dit que des semi-normes p_+ sur G_+ et p_- sur G_- sont en dualité si

$$p_- = \text{sn}_{\{p_+ \leq 1\}} \quad \text{ou bien} \quad p_+ = \text{sn}_{\{p_- \leq 1\}}.$$

L'équivalence des deux conditions découle du théorème des bipolaires 3.10. En effet

$$p_+ = j_{\{p_+ \leq 1\}} = \text{sn}_{\{p_+ \leq 1\}}^\circ = \text{sn}_{\{\text{sn}_{\{p_+ \leq 1\}} \leq 1\}} = \text{sn}_{\{p_- \leq 1\}}.$$