Chapitre 7

CONTINUITÉ

Version du 8 novembre 2002

7.1 La notion de continuité

DEFINITION 1 On dit en général qu'une application d'un ensemble X dans $\mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est une *fonction* . Si $n = 1$, on dit que c'est une *fonction réelle* , respectivement *complexe* .

Intuitivement une fonction réelle continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ a un graphe que l'on peut dessiner sans lever le crayon. En d'autres termes les valeurs de cette fonction varie peu pour autant que la variable en fasse de même.

DEFINITION 2 Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Nous dirons que f est *continue en* $x \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que l'on ait pour tout $u \in X$,

$$d_X(u, x) \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(u), f(x)) \leqslant \varepsilon \ ,$$

i.e.

$$u \in B(x, \delta, d_X) \quad \Longrightarrow \quad f(u) \in B(f(x), \varepsilon, d_Y) \ ,$$

ou encore

$$f(B(x, \delta, d_X)) \subset B(f(x), \varepsilon, d_Y) \ .$$

THEOREME *Pour que* $f : X \longrightarrow Y$ *soit continue en* $x \in X$ *, il faut et il suffit que, pour toute suite* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de* X *convergente vers* x *, la suite* $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ *soit convergente et que l'on ait*

$$f(x) = \lim_k f(x_k) \quad , \textit{ i.e.} \quad f(\lim_k x_k) = \lim_k f(x_k) \ .$$

La condition est nécessaire. En effet, si f est continue en x , étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(x, \delta, d_X)) \subset B(f(x), \varepsilon, d_Y)$. Ainsi, si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ converge vers x , il existe $N \in N$ tel que $d_X(x_k, x) \leqslant \delta$, i.e. $x_k \in B(x, \delta, d_X)$ pour tout $k \geqslant N$. On a alors $f(x_k) \in B(f(x), \varepsilon, d_Y)$, i.e. $d_Y(f(x_k), f(x)) \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant N$. Ceci prouve bien que la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et que $f(x) = \lim_k f(x_k)$.

Réciproquement, si f n'est pas continue en x , il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $f(B(x, \delta, d_X))$ ne soit pas contenu dans $B(f(x), \varepsilon, d_Y)$. En prenant $\delta := \frac{1}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, cela signifie qu'il existe $x_k \in B\left(x, \frac{1}{k}, d_X\right)$ tel que $f(x_k) \notin B(f(x), \varepsilon, d_Y)$. On a donc

$$d_X(x_k, x) \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad d_Y(f(x_k), f(x)) > \varepsilon \ ,$$

et par suite $x = \lim_k x_k$, mais $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$. ——— $\square$

EXERCICE 1 Soient X un espace métrique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x \in X$. Si $f(x) > 0$, alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tels que $f(u) \geqslant a$ pour tout $u \in B(x, \delta, d_X)$.

EXERCICE 2 On considère l'application affine

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto \left(\frac{3}{5} \cdot (x - y) + 2, \frac{3}{5} \cdot (x + y) + 1\right) .$$

Déterminer si les parties

$$T(B((0,0), 1, d_\infty)) \quad \text{et} \quad B(T(0,0), 1, d_\infty) ,$$

ainsi que

$$T(B((0,0), 1, d_2)) \quad \text{et} \quad B(T(0,0), 1, d_2) ,$$

sont en relation d'inclusion. Esquisser-les.

7.2 Exemples d'applications continues

DEFINITION Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Nous dirons que f est une *application continue (sur X)* si f est continue en tout les point de X .

EXEMPLE 1 Une application constante, i.e. $X \longrightarrow Y : x \longmapsto \widetilde{y}$ pour un $\widetilde{y} \in Y$, est continue.

En effet, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut par exemple prendre $\delta = 1$, car on a

$$f\left(B\left(x, 1, d_X\right)\right) = \{\widetilde{y}\} \subset B\left(\widetilde{y}, \varepsilon, d_Y\right) = B\left(f\left(x\right), \varepsilon, d_Y\right) \ .$$

□

EXEMPLE 2 L'application $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$ est continue.

En effet, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut par exemple prendre $\delta = \varepsilon$, car on a

$$\mathrm{id}_X\left(B\left(x, \varepsilon, d_X\right)\right) = B\left(x, \varepsilon, d_X\right) \ .$$

□

EXEMPLE 3 Soient X, Y des espace métriques. Les projections canoniques

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X : (x, y) \longmapsto x \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y : (x, y) \longmapsto y$$

sont continues.

Si $d_{X\times Y}$ désigne l'une des métriques d_1 , d_2 ou d_∞ sur $X \times Y$ (cf. exemple 5.1.4), le théorème 5.8, p. 116, montre que si une suite $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $X \times Y$ converge pour $d_{X\times Y}$ vers $(x, y) \in X \times Y$, alors les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers x et y . On a donc

$$\mathrm{pr}_1\left(x, y\right) = x = \lim_k x_k = \lim_k \mathrm{pr}_1\left(x_k, y_k\right)$$

et le théorème 7.1, p. 172, montre que pr_1 est continue. On procède de même pour pr_2 .

Géométriquement il suffit de constater que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$B\left(\left(x, y\right), \varepsilon, d_{X\times Y}\right) \subset B\left(\left(x, y\right), \varepsilon, d_\infty\right) = B\left(x, \varepsilon, d_X\right) \times B\left(y, \varepsilon, d_Y\right) \ ,$$

donc

$$\mathrm{pr}_1\left(B\left(\left(x, y\right), \varepsilon, d_{X\times Y}\right)\right) \subset \mathrm{pr}_1\left(B\left(x, \varepsilon, d_X\right) \times B\left(y, \varepsilon, d_Y\right)\right) = B\left(x, \varepsilon, d_X\right) \ .$$

□

EXEMPLE 4 La fonction exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue.

Remarquons tout d'abord que par l'estimation du reste 6.16, pour tout $u \in \mathbb{C}$, on a

$$\left|\exp\left(u\right) - 1\right| = \left|r_1\left(u\right)\right| \leqslant 2 \cdot |u| \quad \text{si} \quad |u| \leqslant 1 \ .$$

Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $|w - z| \leqslant 1$, on a alors

$$|\exp(w) - \exp(z)| = |\exp(z) \cdot [\exp(w - z) - 1]| =$$

$$= |\exp(z)| \cdot |\exp(w - z) - 1| \leqslant 2 \cdot |\exp(z)| \cdot |w - z| \ .$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|\exp(w) - \exp(z)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si } |w - z| \leqslant \delta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2 \cdot |\exp(z)|}\right) \ ,$$

ce qui prouve la continuité de exp en z . $\square$

EXEMPLE 5 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\sqrt[p]{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \sqrt[p]{x}$ est continue.

La démonstration est laissé au lecteur. On peut montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\left|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}\right| \leqslant \sqrt[p]{|x - y|}$$

(cf. exercice 5.6.3, p. 112). $\square$

THEOREME *Les applications suivantes sont continues :*

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (z, w) \longmapsto z + w \quad , \quad |\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : z \longmapsto |z| \ ,$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (z, w) \longmapsto z \cdot w \quad , \quad \frac{\cdot}{\cdot} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} : (z, w) \longmapsto \frac{z}{w} \ ,$$

$$\overline{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \overline{z} \ ,$$

$$\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \mathrm{Re}\, z \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \mathrm{Im}\, z \ .$$

Il suffit d'utiliser la caractérisation de la continuité à l'aide des suite (théorème 7.1, p. 172), la caractérisation de la convergence d'une suite dans un produit (théorème 5.8, p. 116), ainsi que les règles de calcul avec les limites (théorème 5.5, p. 106, et corollaire 5.8, p. 116). Par exemple soient $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et $((z_k, w_k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers (z, w) . On a alors $z = \lim_k z_k$ et $w = \lim_k w_k$, donc $z + w = \lim_k (z_k + w_k)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

EXERCICE Les applications

$$\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \max(x, y) \quad \text{et} \quad \min : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \min(x, y)$$

sont continues.

7.3 Calcul avec les applications continues

THEOREME *(i) Soient X, Y des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application, Z une partie de X munie de la métrique induite et $x \in Z$. Si f est continue en x , alors $f_{|Z}$ est aussi continue en x .*
(ii) Soient X, Y, Z des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications. Si f est continue en $x \in X$ et g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x .
(iii) Soient X, Y, Z des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Z$ des applications et $x \in X$. Pour que

$$(f, g) : X \longrightarrow Y \times Z : u \longmapsto (f(u), g(u))$$

soit continue en x , il faut et il suffit que f et g soient continues en x .

Démonstration de (i) Si d_Z désigne la métrique induite par d_X sur Z , on a

$$B(x, \delta, d_Z) = B(x, \delta, d_X) \cap Z \ .$$

L'assertion est alors immédiate.

Démonstration de (ii) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme g est continue en $f(x)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$g(B(f(x), \delta, d_Y)) \subset B(g(f(x)), \varepsilon, d_Z)$$

et, puisque f est continue en x , il existe $\gamma > 0$ tel que

$$f(B(x, \gamma, d_X)) \subset B(f(x), \delta, d_Y) \ .$$

On a alors

$$g(f(B(x, \gamma, d_X))) \subset g(B(f(x), \delta, d_Y)) \subset B(g(f(x)), \varepsilon, d_Z) \ ,$$

d'où le résultat.

Démonstration de (iii) Démontrons ce point à l'aide du théorème 7.1, p. 172. Si les applications f et g sont continues en x et si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers x , le théorème 5.8, p. 116, montre que

$$(f, g)(x) = (f(x), g(x)) = (\lim_k f(x_k), \lim_k g(x_k)) = \lim_k (f(x_k), g(x_k)) = \lim_k (f, g)(x_k) \ .$$

Réciproquement si (f, g) est continue en x , alors (ii) et l'exemple 7.2.3, p. 174, montrent que

$$f = \mathrm{pr}_1 \circ (f, g) \quad \text{et} \quad g = \mathrm{pr}_2 \circ (f, g)$$

sont continues. □

REMARQUE Une démonstration géométrique de (iii) revient à utiliser le lemme 5.8, p. 116. On en déduit que

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}, d_X\right) \times B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}, d_Y\right) = B\left((x, y), \frac{\varepsilon}{2}, d_\infty\right) \subset B((x, y), \varepsilon, d_{X \times Y}) \ ,$$

$d_{X \times Y}$ désignant l'une des métriques d_1, d_2 ou d_∞ sur $X \times Y$.

COROLLAIRE *Soient X un espace métrique, $x \in X$, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions continues en x et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors*

(i) *Les fonctions $f + g$, $|f|$, $\alpha \cdot f$ et $f \cdot g$ sont continues en x .*

(ii) *La fonction*

$$\frac{f}{g} : X \smallsetminus \{g = 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

est continue en x .

(iii) *Les fonctions*

$$\overline{f} : X \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \overline{f(x)} \ ,$$

$$\operatorname{Re} f : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{Re} f(x) \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} f : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{Im} f(x)$$

sont continues en x .

C'est immédiat en utilisant le théorème 7.2, p. 175, et le théorème ci-dessus. Par exemple, la fonction $f + g$ est continue en x , car elle est la composition de l'application (f, g) continues en x et de l'application $+$ continue en chaque point :

$$\begin{array}{ccccccccc} u & \longmapsto & (f(u), g(u)) & & & & & & \\ X & \xrightarrow{(f,g)} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{+} & \mathbb{C} & : & u & \longmapsto & f(u) + g(u) \quad . \\ & & (z, w) & \longmapsto & z + w & & & & \end{array}$$

REMARQUE 1 On peut aussi démontrer le corollaire directement en utilisant les règles de calcul avec les limites : théorème 5.5, p. 106, et corollaire 5.8, p. 116.

REMARQUE 2 *Soit X un espace métrique. Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en $x \in X$ si, et seulement si, la* partie réelle $\operatorname{Re} f$ *et la* partie imaginaire $\operatorname{Im} f$ *de f sont continues en x .*

C'est immédiat, puisque $f = \operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f$. ☐

EXERCICE 1 Soient X un espace métrique et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues en $x \in X$. Alors

$$\max(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \max(f(x), g(x))$$

et

$$\min(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \min(f(x), g(x))$$

sont des fonctions continues en x .

EXERCICE 2 Soient X et Y des espaces métriques, Z une partie de Y munie de la métrique induite par Y , $f : X \longrightarrow Z$ une application et $x \in X$. Alors

(a) L'injection canonique $j : Z \hookrightarrow Y$ est continue.

(b) Pour que $f : X \longrightarrow Z$ soit continue en x , il faut et il suffit que $f : X \longrightarrow Y$ soit continue en x .

EXEMPLE 1 Les fonctions trigonométriques cos et sin sont continues.

En effet cos , resp. sin , est la composition des trois fonctions

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto i \cdot x \ , \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \exp(z)$$

et

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \operatorname{Re} z \quad \text{, resp.} \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \operatorname{Im} z \ .$$

□

EXEMPLE 2 On dit qu'une fonction de la forme

$$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \sum_{l=0}^{n} c_l \cdot z^l \quad \text{avec } c_l \in \mathbb{C} \text{ pour } l = 0, \ldots, n \ ,$$

est un *polynôme (complexe) de degré* n si $c_n \neq 0$. Si chaque $c_l \in \mathbb{R}$, on dit que $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un *polynôme réel* .

Tout polynôme est continu.

Il suffit d'utiliser le corollaire (i) et les exemples 1 et 2 de 7.2, p. 174. □

EXEMPLE 3 Si p et q sont des polynômes, alors on dit que la fonction

$$\frac{p}{q} : \mathbb{C} \setminus \{q = 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \frac{p(z)}{q(z)}$$

est *rationnelle* .

Toute fonction rationnelle est continue.

C'est immédiat par le corollaire (ii). □

EXEMPLE 4 La fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \\ & \text{si} \\ -1 & \end{cases} \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ \\ x < 0 \end{matrix}$$

n'est pas continue en 0 . Par contre $f_{|\mathbb{R}_+}$ est continue (sur $\mathbb{R}_+$).

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ pour montrer que f n'est pas continue en 0 . La seconde partie est évidente, puisque $f_{|\mathbb{R}_+}$ est constante (égale à 1) . □

EXEMPLE 5 La fonction de Dirichlet

Cette fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & & x \text{ est irrationnel} \\ & \text{si} & \\ \frac{1}{q} & & x = \frac{p}{q} \text{ tel que } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ et } p\text{étranger à } q \end{cases} .$$

La fonction de Dirichlet est continue en tous les points irrationels et discontinue en tous les points rationnels.

Si $x \in \mathbb{R}$ est irrationnel et $\varepsilon > 0$ donné, soit A l'ensemble des $y \in [x-1, x+1]$ tels que

$$|f(y) - f(x)| = |f(y)| > \varepsilon \ .$$

Si $y \in A$, on a $y = \frac{p}{q} \in [x-1, x+1]$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, p étranger à q et $\frac{1}{q} > \varepsilon$. Mais il existe un nombre fini de tels q , puisque $0 \leqslant q < \frac{1}{\varepsilon}$, et pour chacun de ces q un nombre fini de p , puisque $q(x-1) \leqslant p \leqslant q(x+1)$. Ceci montre que A est fini. Comme $x \notin A$, on peut définir

$$\delta := \frac{1}{2} \cdot \min\left(\{|y-x| \mid y \in A\} \cup \{2\}\right) > 0 \ .$$

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y-x| \leqslant \delta$, on a $y \notin A$, donc

$$|f(y) - f(x)| = |f(y)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qui finit de prouver la continuité de f en x .

Si maintenant $x \in \mathbb{R}$ est rationnel, posons $x_k := x + \frac{\sqrt{2}}{k}$. Ce nombre est irrationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel (cf. exemple 1.4.3, p. 9), et on a $x = \lim_k x_k$. Mais $f(x) > 0$ et $f(x_k) = 0$, donc $\lim_k f(x_k) = 0$, ce qui prouve la discontinuité de f en x . □

EXEMPLE 6 La fonction

$$d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \longmapsto d_X(x,y)$$

et, pour tout $x \in X$, la fonction

$$d_X(x,\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : y \longmapsto d_X(x,y) \ ,$$

sont continues.

La continuité de d_X en $(x,y) \in X \times X$ découle de l'inégalité

$$|d_X(u,v) - d_X(x,y)| \leqslant d_X(u,x) + d_X(v,y) = d_1((u,v),(x,y))$$

valable pour tout $u,v \in X$ (cf. exercice 5.1.3). Celle de $d_X(x,\cdot)$ est alors immédiate : si x désigne l'application constante $y \longmapsto x : X \longrightarrow X$, alors l'application

$$(x, \mathrm{id}_X) : y \longmapsto (x,y) : X \longrightarrow X \times X$$

est continue par (iii) et les exemples 1 et 2 de 7.2, p. 174. □

7.4 Continuité à gauche et à droite

DEFINITION Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, Y un espace métrique, $f : J \longrightarrow Y$ une fonction et $x \in J$. Nous dirons que f est *continue à gauche* , resp. *à droite* , en x si la restriction de f à $J \cap \left]-\infty, x\right]$, resp. à $J \cap \left[x, \infty\right[$, est continue en x . On écrit alors

$$f(x) = \lim_{u \to x-} f(u) \quad , \text{resp.} \quad f(x) = \lim_{u \to x+} f(u) \ .$$

PROPOSITION *Pour que f soit continue en x , il faut et il suffit que f soit continue à droite et à gauche en x , i.e. que*

$$\lim_{u \to x-} f(u) = f(x) = \lim_{u \to x+} f(u) \ .$$

La condition est évidemment nécessaire par le théorème 7.3.i, p. 176. Pour la suffisance, il suffit de constater que la boule de centre x et de rayon δ dans $J \cap \left]-\infty, x\right]$, resp. $J \cap \left[x, \infty\right[$, est $[x - \delta, x]$, resp. $[x, x + \delta]$. ———— □

EXERCICE La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et croissante.

7.5 Théorème de Bolzano

THEOREME *Soient $[a,b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Alors f possède un zéro $\xi \in \left]a,b\right[$, i.e. tel que $f(\xi) = 0$.*

Nous allons construire par récurrence une suite croissante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite décroissante $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$a_0 = a \quad , \quad b_0 = b \quad , \quad a_k \leqslant b_k \quad , \quad b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (b_k - a_k) \ ,$$

et

$$f(a_k) \geqslant 0 \quad , \quad f(b_k) \leqslant 0 \ .$$

Pour passer de k à $k+1$, posons $c_{k+1} := \frac{1}{2} \cdot (a_k + b_k)$. On définit alors

$$a_{k+1} := c_{k+1} \quad , \quad b_{k+1} := b_k \quad \text{si } f(c_{k+1}) \geqslant 0$$

et

$$a_{k+1} := a_k \quad , \quad b_{k+1} := c_{k+1} \quad \text{si } f(c_{k+1}) < 0 \ .$$

Comme $b_k - a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot (b-a)$, et puisque les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées, donc convergentes par le théorème 5.3, p. 102, on obtient

$$\lim_k b_k - \lim_k a_k = \lim_k (b_k - a_k) = \lim_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot (b-a) = 0 \ .$$

Soit alors $\xi := \lim_k a_k = \lim_k b_k$. Par la continuité de f et le corollaire 5.9, p. 118, on en déduit que

$$f(\xi) = \lim_k f(a_k) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(\xi) = \lim_k f(b_k) \leqslant 0 \ ,$$

donc que $f(\xi) = 0$. □

EXEMPLE 1 Montrons que la fonction

$$f : x \longmapsto \exp(x) + \frac{1}{x} - 5 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

possède un zéro dans l'intervalle $[1,2]$.

On a

$$f(1) = e - 4 \leqslant -1 \quad \text{et} \quad f(2) \geqslant \exp(2) + \frac{1}{2} - 5 \geqslant \frac{1}{2} \ ,$$

puisque $e \leqslant 3$ (cf. exercice 5.3.1, p. 102) et $\exp(2) \geqslant 1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} = 5$. □

COROLLAIRE (Théorème de la valeur intermédiaire) *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $x, y \in J$ tels que $x \neq y$ et tout η strictement entre $f(x)$ et $f(y)$, il existe ξ strictement entre x et y tel que $\eta = f(\xi)$.*

L'image $f(J)$ de f est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $\inf f(J)$ *et* $\sup f(J)$ *.*

On a $\eta \neq f(x), f(y)$ et nous pouvons supposer que $x < y$ et $f(x) > f(y)$, en remplaçant au besoin f par $-f$ et η par $-\eta$. Considérons la fonction $g : u \longmapsto f(u) - \eta$; on a

$$g(x) = f(x) - \eta > 0 \text{ et } g(y) = f(y) - \eta < 0 \ .$$

Il existe donc $\xi \in]x, y[$ tel que $f(\xi) - \eta = g(\xi) = 0$, i.e. $f(\xi) = \eta$.

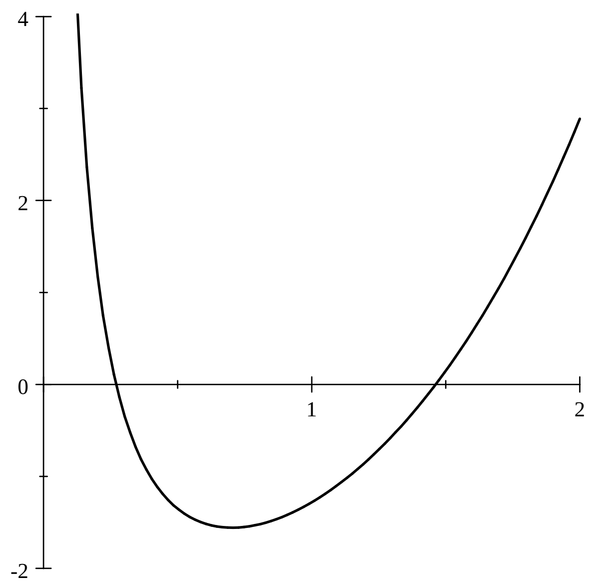
Pour tout $u \in J$, on a évidemment $\inf\ f(J) \leqslant f(u) \leqslant \sup\ f(J)$. Il nous reste à prouver que tout $\eta \in \mathbb{R}$ strictement entre $\inf\ f(J)$ et $\sup\ f(J)$ appartient à $f(J)$. Mais par la propriété d'approximation 4.8, p. 79, il existe $x, y \in J$ tels que $f(x) < \eta < f(y)$. On a donc $x \neq x$ et par ce qui précède il existe ξ strictement entre x et y , donc dans J , tel que $\eta = f(\xi) \in f(J)$.

□

EXEMPLE 2 Considérons la fonction

$$g : x \longmapsto \exp(x) + \frac{1}{x} - 5 :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Que peut-on dire de $g(]0, 1])$?



$x \longmapsto \exp(x) + \frac{1}{x} - 5$

Par la continuité de exp en 0 , il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait en particulier $\frac{1}{2} \leqslant \exp(x) \leqslant \frac{3}{2}$ pour tout $x \in]0, \delta]$. On en déduit que $\sup g(]0, 1]) = \infty$. Comme $g(1) \leqslant -1$, on voit que

$$g(]0, 1]) \supset [-1, \infty[\ .$$

Peut-on déterminer $\inf g(]0, 1])$? Nous essayerons de répondre à ce genre de questions dans le chapitre qui suit. Nous savons en tout cas que g possède un zéro dans l'intervalle $]0, 1]$, puisque $0 \in [-1, \infty[$.

Ce type d'argument peut être simplifier dans ce cas car la fonction f est bien connue. On a

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \exp\left(\frac{1}{5}\right) + 5 - 5 > 0 \ ,$$

et le théorème de Bolzano montre que f possède un zéro dans $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$. □

DEFINITION Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

On dit que f est *croissante* , respectivement *décroissante* , si pour tout $x, y \in J$ tels que $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$, respectivement $f(x) \geqslant f(y)$.

On dit que f est *strictement croissante* , respectivement *strictement décroissante* , si pour tout $x, y \in J$ tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$, respectivement $f(x) > f(y)$.

REMARQUE Une fonction strictement monotone , i.e. strictement croissante ou strictement décroissante, est évidemment injective.

EXERCICE On considère les fonctions

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$$

et

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x}{1+x} .$$

Que peut-on dire de ces fonctions et de leur image $f(\mathbb{R}_+)$ et $g(\mathbb{R}_+)$?

7.6 Le nombre π

PROPOSITION *Sur l'intervalle* $[0,2]$ *la fonction* cos *est strictement décroissante et s'y annule une seule fois, tandis que la fonction* sin *est* > 0 .

On a $\cos 0 = \operatorname{Re}\exp(i \cdot 0) = 1$. On montre à l'aide du critère de Leibniz 6.7, p. 142, (cf. exercice 6.19, p. 168) que

$$\cos\ x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{sur } \left[-\sqrt{56}, \sqrt{56}\right] \tag{$*$}$$

et

$$\sin\ x \geqslant x - \frac{x^3}{6} \quad \text{sur } \left[0, \sqrt{42}\right] \ . \tag{$**$}$$

On a alors

$$\cos\ 2 \leqslant 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} \ .$$

Par le théorème de Bolzano 7.5, p. 181, la fonction cos possède au moins un zéro dans $[0,2]$.

Pour tout $u, v \in [0,2]$ tels que $u < v$, par la proposition 6.18.v, p. 166, on a

$$\cos\ u - \cos\ v = -2 \cdot \sin \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{u-v}{2} = 2 \cdot \sin \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{v-u}{2} > 0 \ ,$$

car $\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \in \left]0,2\right]$ et

$$\sin\ x \geqslant x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \geqslant x \cdot \left(1 - \frac{4}{6}\right) = \frac{x}{3} > 0 \quad \text{pour tout } x \in \left]0,2\right] \ .$$

Ceci montre que cos est strictement décroissante, donc que cette fonction s'annule une seule fois dans $[0,2]$. □

DEFINITION On désigne par $\frac{\pi}{2}$ l'unique zéro de cos dans $[0,2]$.

LEMME *Si* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *est une suite de* $\mathbb{R}^*$ *convergente vers* 0 *, alors*

$$\lim_k \frac{\sin\ x_k}{x_k} = 1 \ .$$

Grâce à $(**)$ et $\sin x \leqslant x$ sur $\left[0, \sqrt{20}\right]$ (cf. exercice 6.19, p. 168), on a

$$-\frac{x^2}{6} \leqslant \frac{\sin x}{x} - 1 \leqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in \left]0, \sqrt{20}\right] \ ,$$

donc

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leqslant \frac{x^2}{6} \quad \text{si } 0 < |x| \leqslant \sqrt{20} \ ,$$

et par suite le résultat. □

THEOREME *Les fonctions* cos *et* sin *sont respectivement une bijection décroissante et une bijection croissante de* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[0,1]$ *. La fonction*

$$\exp(i\cdot) : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \{z \in \mathbb{U} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$$

est une bijection. En particulier on a

$$\cos 0 = 1 \quad , \quad \sin 0 = 0 \quad , \quad \exp(i \cdot 0) = 1$$

et

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \textit{et} \quad \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = i \ .$$

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *, la "longueur de l'arc" sur* $\mathbb{U}$ *entre* 1 *et* $\exp(ix)$ *, i.e. de la "courbe"* $\{\exp(iu) \mid 0 \leqslant u \leqslant x\}$ *, est* x *.*

REMARQUE 1 Les notions de "longueur de l'arc" et de "courbe" seront définies en cours de démonstration. Nous en donnerons une définition générale plus tard (cf. 11.2, p. 374).

Démontrons tout d'abord les formules. Les trois premières sont évidentes. On a

$$1 = \cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} \ ,$$

donc $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, puisque la fonction sin est strictement positive sur $]0,2]$. Il vient alors

$$\exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i \ .$$

D'après le théorème de la valeur intermédiaire 7.5, p. 181, la fonction cos prend toutes les valeurs entre $\cos 0 = 1$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, et la première assertion découle de la proposition. La deuxième concernant sin découle alors de la formule

$$\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} \quad \text{pour tout } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

et du lemme 5.6, p. 111, (cf. exercice 5.6.1, p. 112).

Quant à la troisième, on a tout d'abord

$$\exp\left(i \cdot \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \{z \in \mathbb{U} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \ .$$

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geqslant 0$. Par ce qui précède, il existe un et un seul $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\operatorname{Re} z = \cos x$, donc

$$\operatorname{Im} z = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x \ ,$$

puisque $\sin x > 0$ par la proposition. Ceci montre que

$$z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z = \cos x + i \cdot \sin x = \exp(ix) \ ,$$

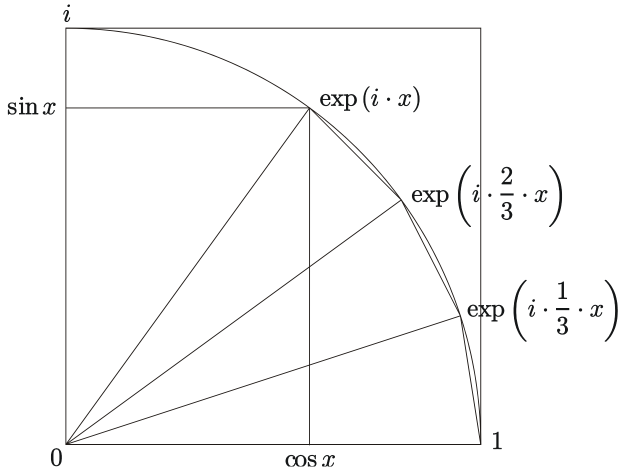
et finit de prouver la bijectivité.

Remarquons que $\cos u = \operatorname{Re}[\exp(iu)]$ parcourt en décroissant l'intervalle $[0,1]$ lorsque u parcourt en croissant l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Etant donné $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ceci nous permet de dire que l'ensemble

$$\{\exp(iu) \mid 0 \leqslant u \leqslant x\} \ ,$$

est l'arc sur $\mathbb{U}$ entre 1 et $\exp(ix)$. On dit aussi que c'est une courbe (cf. 11.1, p. 368).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons les points $\exp\left(i \cdot \frac{k}{n} \cdot x\right) \in \mathbb{U}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$.



La ligne polygonale définie par ces points est de longueur

$$l_n := \sum_{k=0}^{n-1} \left| \exp\left(i \cdot \frac{k+1}{n} \cdot x\right) - \exp\left(i \cdot \frac{k}{n} \cdot x\right) \right| .$$

Nous allons montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, ce qui nous permet de définir la *longueur de l'arc* sur le cercle unité entre 1 et $\exp(ix)$ par

$$l := \lim_n l_n .$$

On a

$$\left| \exp\left(i \cdot \frac{k+1}{n} \cdot x\right) - \exp\left(i \cdot \frac{k}{n} \cdot x\right) \right| = \left| \exp\left(i \cdot \frac{k}{n} \cdot x\right) \cdot \left[\exp\left(i \cdot \frac{x}{n}\right) - 1\right] \right| =$$

$$= \left| \exp\left(i \cdot \frac{x}{n}\right) - 1 \right| = \sqrt{\left(\cos \frac{x}{n} - 1\right)^2 + \sin^2 \frac{x}{n}} =$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cdot \cos \frac{x}{n}} = 2 \cdot \sin \frac{x}{2n} ,$$

en ayant utilisé la proposition 6.18.vi, p. 166. Ainsi

$$l_n = 2n \cdot \sin \frac{x}{2n} = x \cdot \frac{1}{y_n} \cdot \sin y_n ,$$

en ayant poser $y_n := \frac{x}{2n}$. On a $\lim_n y_n = 0$, et le lemme montre que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que

$$l = \lim_n l_n = x \cdot \lim_n \frac{1}{y_n} \cdot \sin y_n = x .$$

□

REMARQUE 2 Nous avons ainsi montré que les fonctions cos et sin introduites à l'aide de la formule d'Euler

$$\exp(ix) = \cos x + i \cdot \sin x$$

sont bien les fonctions trigonométriques classiques, la variable x étant l'angle que fait le point sur le cercle unité avec le premier axe de coordonnées. Cet angle est mesuré en radian, qui est l'unité de longueur d'un arc.

EXERCICE Montrer qu'il existe un $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que

$$\sin x = \cos 2x \ .$$

7.7 Périodicité des fonctions trigonométriques

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\exp\left(in \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right)^n = i^n \ ,$$

en particulier

$$\exp(i \cdot \pi) = -1 \quad \text{et} \quad \exp(2\pi i) = 1 \ .$$

Utilisant l'équation fonctionnelle, on en déduit facilement les propriétés suivantes :

(1) $2\pi i-$**périodicité de** $\exp$ **.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\exp(z + 2\pi i \cdot n) = \exp(z) \ .$$

(2) $2\pi-$**périodicité de** $\cos$ **et** $\sin$ **.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos(x + 2\pi \cdot n) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi \cdot n) = \sin x \ .$$

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x \quad , \quad \sin(x \pm \pi) = -\sin x \ ,$$

et

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\ x \quad , \quad \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \ .$$

PROPOSITION

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$ *. Pour que l'on ait* $\cos x = 0$ *, respectivement* $\sin x = 0$ *ou* $\exp(ix) = 1$ *, il faut et il suffit que* $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$ *, respectivement* $x = \pi \cdot n$ *ou* $x = 2\pi \cdot n$ *, pour un certain* $n \in \mathbb{Z}$ *.*

(ii) La fonction $\cos$ *est une bijection décroissante, respectivement croissante de* $[0, \pi]$ *, respectivement* $[-\pi, 0]$ *ou* $[\pi, 2\pi]$ *, sur* $[-1, 1]$ *.*

La fonction $\sin$ *est une bijection croissante, respectivement décroissante de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *, respectivement* $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ *, sur* $[-1, 1]$ *.*

(iii) L'application $x \longmapsto \exp(ix) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ *est surjective. Pour tout* $z \in \mathbb{U}$ *, les solutions de* $\exp(ix) = z$ *sont de la forme* $x = u + 2\pi \cdot n$ *pour un* $u \in \left]-\pi, \pi\right]$ *univoquement déterminé et tout* $n \in \mathbb{Z}$ *. On peut aussi prendre* $u \in \left[0, 2\pi\right[$ *.*

Démonstration de (i) On a $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc aussi sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puisque $\cos x = \cos(-x)$. On a alors $\cos x < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, car $\cos x = -\cos(x - \pi)$. Ceci montre que $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ sont les seuls zéros de $\cos$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Par la 2π-périodicité de $\cos$ on en déduit la première partie. L'assertion relative à $\sin$ en découle, puisque $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Finalement, on a

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2i} \cdot \left[\exp\left(i \cdot \frac{x}{2}\right) - \exp\left(-i \cdot \frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2i} \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot [\exp(ix) - 1] \ ,$$

donc $\exp(ix) = 0$ si, et seulement si, $\sin \frac{x}{2} = 0$.

Démonstration de (ii) Pour tout $x, y \in [0, \pi]$ tels que $x < y$, on a

$$\cos x - \cos y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2} > 0 \ .$$

En effet $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in \left]0, \pi\right[$ et sin est > 0 sur $\left]0, \pi\right[$, puisque $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ et cos est > 0 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Le reste en découle grâce aux formules (3) ci-dessus.

Démonstration de (iii) Soit $z \in \mathbb{U}$. D'après (ii), si $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, resp. $\operatorname{Im} z < 0$, on choisit $u \in [0, \pi]$, resp. $u \in \left]-\pi, 0\right[$, tel que $\operatorname{Re} z = \cos u$. Remarquons que u est univoquement déterminé. Comme

$$|\operatorname{Im} z| = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u|$$

et, puisque par le choix ci-dessus $\operatorname{Im} z$ et $\sin u$ ont même signe, on obtient $\operatorname{Im} z = \sin u$, donc $z = \exp(iu)$. Ceci prouve la surjectivité de l'application.

Si maintenant $x \in \mathbb{R}$ est une solution de $\exp(ix) = z$, on a

$$1 = \frac{\exp(ix)}{\exp(iu)} = \exp(i \cdot [x - u]) \ ,$$

donc $x - u = 2\pi \cdot n$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ d'après (i). □

DEFINITION Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on pose

$$\arg z := x \quad \text{si } x \in \left]-\pi, \pi\right] \text{ et } z = \exp(ix) \ ,$$

i.e. $\arg = \overset{-1}{\exp}(i \cdot \diamond)$.

Plus généralement, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$\arg z := \arg \frac{z}{|z|} \quad \text{, ainsi que} \quad \arg 0 := 0 \ .$$

On dit que c'est l' *argument* du nombre complexe z .

On a alors

$$z = |z| \cdot \exp(i \cdot \arg z) \ ,$$

et ceci est équivalent à

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \ .$$

On peut aussi choisir $\arg z \in \left[0, 2\pi\right[$, mais attention il faut toujours préciser le choix, et surtout ne pas changer en cours de route !

REMARQUE 1 Nous avons en particulier montré que

$$\exp(i\cdot) : \left]-\pi, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{U}$$

est bijective. On en déduit immédiatement que

$$(r, \varphi) \longmapsto r \cdot (\cos\ \varphi + i \cdot \sin\ \varphi) : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

est une bijection, dont l'application réciproque est

$$z \longmapsto \left(\frac{z}{|z|}, \arg z\right) : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right] \ .$$

On dit que (r, φ) sont les *coordonnées polaires* de $\mathbb{C}^*$ ou de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

REMARQUE 2 La fonction

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} : x \longmapsto \exp(i \cdot x)$$

décrit le déplacement d'un point sur $\mathbb{U}$; on dit qu'il se déplace dans le sens positif lorsque x croît et dans le sens négatif lorsque x décroît. On dit que c'est une courbe paramétrée (cf. 11.1, p. 368). Le même calcul, que celui fait dans la démonstration du théorème 7.6, p. 184, montre que la longueur de l'arc parcouru sur $\mathbb{U}$ entre 1 et $\exp(ix)$ est $|x|$.

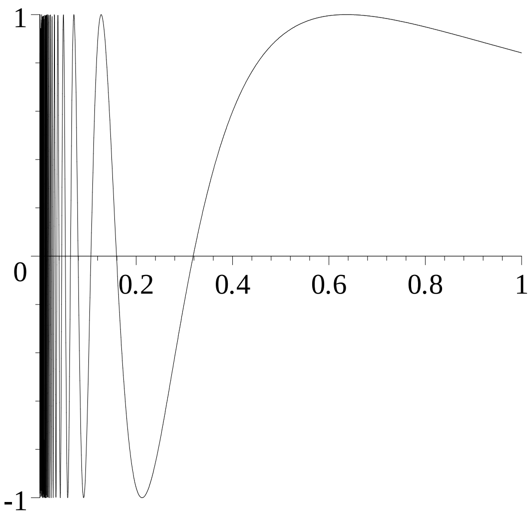
REMARQUE 3 La fonction arg est continue en tous les points de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Elle n'est pas continue en tous les points de $\mathbb{R}_-$, en particulier en 0 et -1 .

EXERCICE 1 Déterminer l'ensemble des points où les fonctions suivantes sont continues :

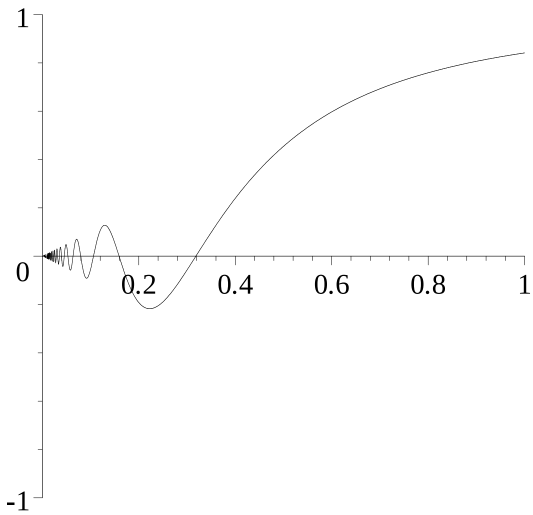
$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$



$\sin \frac{1}{\mathrm{id}}$



$\mathrm{id} \cdot \sin \frac{1}{\mathrm{id}}$

EXERCICE 2 On munit le cercle $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$ et soit $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f possède un point *antipodal* $z \in \mathbb{U}$, i.e. tel que $f(z) = f(-z)$.

7.8 Valeurs limites d'une fonction

Soient X, Y des espaces métriques, $x \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Nous savons (théorème 7.1, p. 172) que f est continue en x si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X convergente vers x , la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et $f(x) = \lim_k f(x_k)$. Dans ce cas nous écrirons

$$f(x) = \lim_{u\to x} f(u)$$

pour simplifier.

Considérons maintenant la situation où f n'est pas définie en x , i.e.

$$f : X \setminus \{x\} \longrightarrow Y \ .$$

DEFINITION Nous dirons que $\widetilde{y} \in Y$ est *valeur limite* de f en x si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$d_Y(f(u), \widetilde{y}) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in X \setminus \{x\} \text{ tel que } d_X(u, x) \leqslant \delta \ .$$

Nous écrirons

$$\widetilde{y} = \lim_{x\neq u\to x} f(u) \ ,$$

car on a la

PROPOSITION *Pour que $\widetilde{y} \in Y$ soit une valeur limite de f en x , il faut et il suffit que, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $X \setminus \{x\}$ convergente vers x , on ait $\widetilde{y} = \lim_k f(x_k)$.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 7.1, p. 172. ☐

REMARQUE Si $\widetilde{y} \in Y$ est valeur limite de f en x , alors la fonction $\widetilde{f}$ définie sur X par

$$\widetilde{f} : X \longrightarrow Y : u \longmapsto \begin{cases} f(u) & u \neq x \\ & \text{si} \\ \widetilde{y} & u = x \end{cases}$$

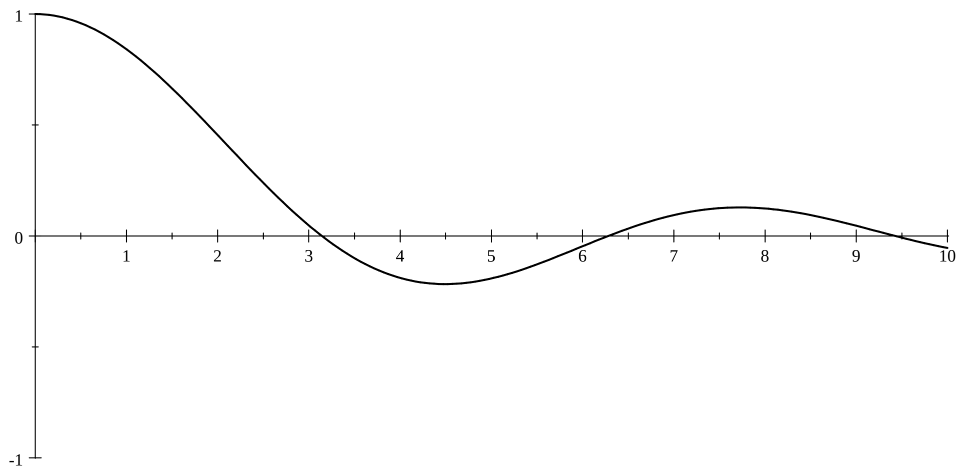
est continue en x . Nous dirons que $\widetilde{f}$ est le *prolongement de f par continuité en x* .

EXEMPLE 1 La fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et on peut la prolonger par continuité en 0 par 1 . Son prolongement continu est désigné par sinc et s'appelle *sinus cardinal* .

On a

$$\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

d'après le lemme 7.6, p. 184. ☐



sinc

EXEMPLE 2 La fonction $z \longmapsto \frac{\exp(z)-1}{z} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et on peut la prolonger par continuité en 0 par 1 , car on a

$$\lim_{0\neq z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1 \ .$$

En effet, on a $\exp(z) = 1 + z + r_2(z)$ et

$$|r_2(z)| \leqslant |z|^2 \quad \text{si } \ |z| \leqslant \frac{3}{2}$$

par l'estimation du reste 6.16, p. 160. Ainsi

$$\left|\frac{\exp(z)-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{\exp(z)-(1+z)}{z}\right| \leqslant \frac{|r_2(z)|}{|z|} \leqslant |z|$$

si $z \neq 0$ et $|z| \leqslant \frac{3}{2}$, d'où notre assertion. $\square$

EXERCICE 1 Calculer la valeur limite

$$\lim_{0\neq x\to 0} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-\exp(x)}\right] \ ,$$

en utilisant l'estimation du reste r_3 (cf. 6.16, p. 160).

EXERCICE 2 Calculer la valeur limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\exp(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{x}}{x} \ .$$

EXERCICE 3 Montrer que toute fonction monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$ possède une valeur limite à gauche et droite en chaque point de l'intervalle.

7.9 Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers $+\infty$, resp. $-\infty$, si pour tout $M \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $x_k \geqslant M$, resp. $x_k \leqslant -M$, pour tout $k \geqslant N$. On écrit alors $\lim_k x_k = \infty$, resp. $\lim_k x_k = -\infty$.

LEMME *Soit* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *. Pour que* $\lim_k x_k = \infty$ *, il faut et il suffit que l'on ait* $\lim_k \frac{1}{x_k} = 0$ *.*

C'est immédiat en prenant $M := \frac{1}{\varepsilon}$ pour la nécessité, puis $\varepsilon := \frac{1}{M}$ pour la suffisance . $\square$

EXERCICE Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors $\lim_k x_k = \infty$, resp. $\lim_k x_k = -\infty$, si, et seulement si, on a $\liminf_k x_k = \infty$, resp. $\limsup_k x_k = -\infty$.

Nous allons généraliser les notations et définitions de 7.8 en utilisant les suites, car $\overline{\mathbb{R}}$ n'a pas encore été muni d'une métrique. Nous y reviendrons plus tard.

DEFINITION 2 Soient X un espace métrique, $x \in X$ et

$$f : X \smallsetminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Nous écrirons

$$\lim_{x\neq u\to x} f(u) = \pm\infty ,$$

si l'on a

$$\lim_k f(x_k) = \pm\infty$$

pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $X \smallsetminus \{x\}$ convergente vers x .

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\sup J = \infty$, resp. $\inf J = -\infty$, et

$$f : J \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Nous écrirons

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{, resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c \in \overline{\mathbb{R}}$$

si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de J telle que $\lim_k x_k = \infty$, resp. $\lim_k x_k = -\infty$, on a

$$\lim_k f(x_k) = c .$$

REMARQUE 1 On a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si, et seulement si, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, il existe $b \in J$ tel que l'on ait

$$f(x) \geqslant M \quad \text{pour tout } x \geqslant b .$$

Comme pour la proposition 7.8, la démonstration est analogue à celle du théorème 7.1, p. 172. Voici les détails. La condition est suffisante, car si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim_k x_k =$

∞ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \geqslant b$ pour tout $k \geqslant N$, donc $f(x_k) \geqslant M$. Réciproquement par contraposition, si $M \in \mathbb{R}_+$ est tel que pour tout $b \in J$, il existe $x \geqslant b$ tel que $f(x) < M$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \geqslant k$ tel que $f(x_k) < M$. Mais $\lim_k x_k = \infty$ et $f(x_k)$ est majorée, donc ne converge pas vers ∞ . □

REMARQUE 2 On a $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in J$ tel que l'on ait

$$|f(x) - c| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } x \geqslant b .$$

La démonstration est analogue à celle qui précède. □

EXEMPLE 1 Soit p un polynôme réel de degré n , i.e. $p(x) = \sum_{l=0}^n c_l \cdot x^l$ avec $c_l \in \mathbb{R}$ pour tout $l = 0, \ldots, n$ et $c_n \neq 0$.

Si $c_n > 0$, alors

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = (-1)^n \cdot \infty .$$

Pour tout $x \neq 0$, on peut écrire

$$p(x) = x^n \cdot \sum_{l=0}^n c_l \cdot x^{l-n} = x^n \cdot \sum_{l=0}^n c_l \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-l} .$$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_k x_k = \infty$. D'après le lemme on a $\lim_k \frac{1}{x_k} = 0$,

$$\lim_k \sum_{l=0}^n c_l \cdot \left(\frac{1}{x_k}\right)^{n-l} = c_n$$

puisque $\lim_k \left(\frac{1}{x_k}\right)^{n-l} = 0$ si $l \neq n$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant N$, on ait $x_k > 0$ et

$$\sum_{l=0}^n c_l \cdot \left(\frac{1}{x_k}\right)^{n-l} \geqslant \frac{c_n}{2} ,$$

par suite

$$p(x_k) = x_k^n \cdot \sum_{l=0}^n c_l \cdot \left(\frac{1}{x_k}\right)^{n-l} \geqslant \frac{c_n}{2} \cdot x_k^n .$$

On en déduit que $\lim_k p(x_k) = \infty$.

Pour la seconde assertion, si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_k x_k = -\infty$, alors $\lim_k (-x_k) = \infty$. D'autre part, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$p(-y) = \sum_{l=0}^n c_l \cdot (-y)^l = (-1)^n \cdot \sum_{l=0}^n (-1)^{l-n} \cdot c_l \cdot y^l =: (-1)^n \cdot q(y) ,$$

donc

$$\lim_k p(x_k) = \lim_k p(-(-x_k)) = \lim_k (-1)^n \cdot q(-x_k) = (-1)^n \cdot \infty$$

par ce qui précède. □

COROLLAIRE *Tout polynôme réel p de degré impair possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}$. Plus généralement on a $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.*

On peut supposer, en remplaçant p par $-p$ au besoin, que le coefficient principal $c_n > 0$. Comme $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$, on a évidemment $\inf p(\mathbb{R}) = -\infty$ et $\sup p(\mathbb{R}) = \infty$ .Le théorème de la valeur intermédiaire 7.5, p. 181, montre alors que $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, d'où le résultat. □

REMARQUE 3 On peut montrer (théorème fondamental de l'algèbre) que tout polynôme complexe s'annule au moins une fois dans $\mathbb{C}$.

EXEMPLE 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$.

Pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\exp(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

donc

$$\frac{\exp(x)}{x^n} \geqslant \frac{x}{(n+1)!} ,$$

d'où le résultat. □

EXEMPLE 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x\to\infty} x^n \cdot \exp(-x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \exp(x) = 0$$

et

$$\lim_{x>0,x\to0} x^n \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \infty .$$

La première formule découle immédiatement du lemme et de l'exemple 2, puisque

$$x^n \cdot \exp(-x) = \frac{1}{\frac{\exp(x)}{x^n}} .$$

La deuxième se ramène immédiatement à la première. La troisième se démontre comme la première car

$$x^n \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} .$$

En effet si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}_+^*$ convergente vers 0 , alors $\lim_k \frac{1}{x_k} = \infty$ par le lemme, donc

$$\lim_k x_k^n \cdot \exp\left(\frac{1}{x_k}\right) = \lim_k \frac{\exp\left(\frac{1}{x_k}\right)}{\left(\frac{1}{x_k}\right)^n} = \infty$$

par l'exemple 2. □

EXEMPLE 4 On a $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* =]0,\infty[$.

C'est immédiat par le théorème de la valeur intermédiaire 7.5, p. 181, et les exemples 2 et 3 ci-dessus en prenant $n = 0$, car $\inf[\exp(\mathbb{R})] = 0$ et $\sup[\exp(\mathbb{R})] = \infty$. □

EXERCICE 1 Déterminer les valeurs limites suivantes :

(a)
$$\lim_{x\to 0+} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) .$$

(b)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sinh(x)}{\exp(-x)} .$$

(c)
$$\lim_{0\neq x\to 0} \frac{1-\cos\ x}{x^2} .$$

(d)
$$\lim_{\pi\neq x\to \pi} \frac{\sin\ x}{\pi - x} .$$

(e)
$$\lim_{1\neq x\to 1} \frac{\exp(x)-\exp(1)}{x-1} .$$

(f)
$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cdot\cos\frac{1}{x} .$$

EXERCICE 2 Montrer que la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 := 1 \quad \text{et} \quad x_{k+1} := x_k \cdot e^{-x_k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} ,$$

est positive et décroissante. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

On pose $s_k := \sum_{l=0}^{k} x_l$. Montrer que $x_{k+1} = e^{-s_k}$ et en déduire que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

EXERCICE 3 La fonction

$$\cosh : [0,\infty[\longrightarrow [1,\infty[$$

est bijective.

Utiliser l'exercice 4.5.3.

EXERCICE 4 Montrer que la fonction

$$\tanh := \frac{\sinh}{\cosh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est strictement croissante et une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

EXERCICE 5 Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\sup J \notin J$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors $\lim_{x\to\sup J} f(x)$ et $\sup f(J)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sont égaux.

7.10 Théorème de Weierstraß

DEFINITION Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nous dirons que f atteint son *maximum* , resp. son *minimum (sur J) en ξ* , si l'on a

$$f(\xi) = \max f(J) \quad , \text{resp.} \quad f(\xi) = \min f(J) \ .$$

Pour simplifier on parle d'un *extremum* si l'on ne veut pas préciser.

REMARQUE 1 Si f est une fonction continue, alors f atteint son maximum, resp. son minimum, dans J si, et seulement si, l'extrémité supérieure, resp. inférieure, de l'intervalle $f(J)$ appartient à $f(J)$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire 7.5, p. 181, nous savons que les extrémités de $f(J)$ sont $\inf f(J)$ et $\sup f(J)$. □

LEMME *Soit A une partie non-vide de $\overline{\mathbb{R}}$. Il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante, resp. décroissante, de A telle que*

$$\sup A = \sup_k x_k = \lim_k x_k \quad , \textit{resp.} \quad \inf A = \inf_k x_k = \lim_k x_k \ .$$

Par la propriété d'approximation 4.8, p. 79, il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A telle que $\sup_k x_k = \sup A$. Par exemple si $\sup A = -\infty$, on a $A = \{-\infty\}$ et il suffit de poser $x_k := -\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $\sup A \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in A$ tel que

$$\sup A - \frac{1}{k} < x_k \leqslant \sup A$$

et, si $\sup A = \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, .il existe $x_k \in A$ tel que

$$k < x_k \leqslant \infty \ .$$

Il suffit alors de remplaçer x_k par

$$\max_{j=0,\ldots,k} x_j$$

pour que la suite soit croissante. On procède de même avec $\inf A$. □

THEOREME *Une fonction réelle continue f sur un intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, est bornée et atteint son maximum, ainsi que son minimum sur $[a,b]$.*

Soit $M := \sup f([a,b]) \in \overline{\mathbb{R}}$. Par le lemme il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ telle que la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $M = \sup_k f(x_k)$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass 5.11, p. 122, il existe une sous-suite $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente. Posons

$$\xi := \lim_l x_{\alpha(l)} \ ;$$

on a $\xi \in [a,b]$ par le corollaire 5.9.ii, p. 118. Grâce à la continuité de f et au théorème 5.3, p. 102, on obtient

$$f(\xi) = \lim_l f\left(x_{\alpha(l)}\right) = \sup_l f\left(x_{\alpha(l)}\right) = \sup_k f(x_k) = M \ .$$

Ceci montre que f atteint son maximum sur $[a, b]$ en ξ . Appliquant ce résultat à $-f$ on en déduit que f atteint son minimum sur $[a, b]$. Finalement, ces deux assertions montrent que f est bornée. $\square$

REMARQUE 2 L'affirmation de ce théorème est en général fausse si l'intervalle n'est pas borné ou s'il n'est pas fermé, comme le montrent les exemples

$$\mathrm{id}_{[0,\infty[} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{id}_{]0,1]}} \ .$$

EXERCICE 1 Si p est un polynôme réel de degré pair et de coefficient principal > 0 , alors

$$p(\mathbb{R}) = [\min p(\mathbb{R}), \infty[\ .$$

Montrer tout d'abord que, pour un $\eta \in p(\mathbb{R})$ il existe un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \notin [a, b]$, on ait $p(x) > \eta$.

EXERCICE 2 Montrer que la fonction

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 5}$$

possède un minimum.

EXERCICE 3 Montrer que la fonction

$$f :]0, 1] \longrightarrow x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

possède un maximum.

7.11 Fonctions réciproques

THEOREME *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante, resp. décroissante. Alors f est une bijection de J sur $f(J)$, qui est un intervalle d'extrémités* $\inf f(J)$ *et* $\sup f(J)$ *, et la fonction réciproque*

$$\overset{-1}{f} : f(J) \longrightarrow J$$

est une fonction continue strictement croissante, resp. décroissante.

On peut supposer, en remplaçant au besoin f par $-f$, que f est strictement croissante. La première assertion découle du théorème de la valeur intermédiaire 7.5, p. 181.

Montrons que $\overset{-1}{f}$ est aussi strictement croissante. Pour tout $u, v \in f(J)$, il existe $x, y \in J$ uniques tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$. Comme

$$x \geqslant y \quad \Longrightarrow \quad u = f(x) \geqslant f(y) = v \ ,$$

par contraposition on obtient

$$u < v \quad \Longrightarrow \quad \overset{-1}{f}(u) = x < y = \overset{-1}{f}(v) \ .$$

Nous allons montrer par l'absurde que $\overset{-1}{f}$ est continue en $u \in f(J)$. Si tel n'est pas le cas, il existerait une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $f(J)$ telle que $\lim_k u_k = u$ et telle que $\left(\overset{-1}{f}(u_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\overset{-1}{f}(u)$. Mais cela signifie qu'il existerait un $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\left(\overset{-1}{f}\left(u_{\alpha(l)}\right)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $\left|\overset{-1}{f}\left(u_{\alpha(l)}\right) - \overset{-1}{f}(u)\right| > \varepsilon$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

On peut construire une boule de centre u et de rayon $\neq 0$ contenue dans $f(J)$ et de la forme $[a, b]$, en choisissant le rayon suffisamment petit. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\alpha(l)} \in [a, b]$ pour tout $l \geqslant N$. On en déduit, puisque f est une bijection croissante de J sur $f(J)$ et que $\overset{-1}{f}$ est croissante, que

$$\overset{-1}{f}\left(u_{\alpha(l)}\right) \in \overset{-1}{f}([a, b]) = \left[\overset{-1}{f}(a), \overset{-1}{f}(b)\right] \quad \text{pour tout } l \geqslant N \ .$$

Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous permet donc, en extrayant à nouveau au besoin une sous-suite, de supposer que $\left(\overset{-1}{f}\left(u_{\alpha(l)}\right)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est convergente. En posant

$$x := \lim_l \overset{-1}{f}\left(u_{\alpha(l)}\right) \ ,$$

on obtient finalement

$$f(x) = \lim_l f\left(\overset{-1}{f}\left(u_{\alpha(l)}\right)\right) = \lim_l u_{\alpha(l)} = u$$

par la proposition 5.10, i.e. $\overset{-1}{f}(u) = x = \lim_l \overset{-1}{f}\left(u_{\alpha(l)}\right)$, ce qui est contradictoire. ——— □

REMARQUE 1 L'hypothèse de monotonie stricte est nécessaire comme le montre le résultat suivant :

LEMME *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour que f soit injective, il faut et il suffit que f soit strictement monotone.*

La démonstration est laissée au lecteur. ———— □

REMARQUE 2 Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue strictement croissante et si $\inf J \in J$, resp. $\sup J \in J$, alors

$$f(\inf J) = \inf f(J) = \min f(J) \quad , \text{resp.} \quad f(\sup J) = \sup f(J) = \max f(J) \ .$$

REMARQUE 3 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si l'on veut étudier le comportement d'une fonction

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto g(y)$$

au voisinage de $\eta \in I$, par exemple sa continuité, il est parfois utile de faire un *changement de variable* , i.e. de poser $y = f(x)$, où $f : J \longrightarrow I$ est une fonction continue strictement monotone surjective. Ceci revient à considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ J \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

et il est équivalent d'étudier la foncrion g ou la fonction $g \circ f$, puisque f et $\overset{-1}{f}$ sont bijectives continues et que

$$g = (g \circ f) \circ \overset{-1}{f} \ .$$

Plus précisément on obtient immédiatement la première partie du

COROLLAIRE *Il y a correspondance biunivoque entre les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de J et les suites $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $I = f(J)$ en posant $y_k := f(x_k)$ ou $x_k = \overset{-1}{f}(y_k)$. Pour que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers $\eta \in I$, il faut et il suffit que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers $\xi := \overset{-1}{f}(\eta)$. En particulier*

$$\lim\nolimits_{y\to\eta} g(y) = \lim\nolimits_{x\to\xi} g \circ f(x) \ ,$$

plus précisément si l'une de ces limites existe, alors l'autre existe aussi et elles sont égales.

En outre, si f est strictement croissante, on a

$$\lim\nolimits_k x_k = \inf J \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\nolimits_k y_k = \inf f(J)$$

et

$$\lim\nolimits_k x_k = \sup J \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\nolimits_k y_k = \sup f(J) \ .$$

Pour la seconde partie, il suffit de remarquer, par exemple que $\lim_k x_k = \sup J$ si, et seulement si, pour tout $M \in J$ tel que $M < \sup\ J$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \geqslant M$ pour tout $k \geqslant N$. □

EXEMPLE (Racine p-ième) Si $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$x \longmapsto x^p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est évidemment continue et strictement croissante. Comme

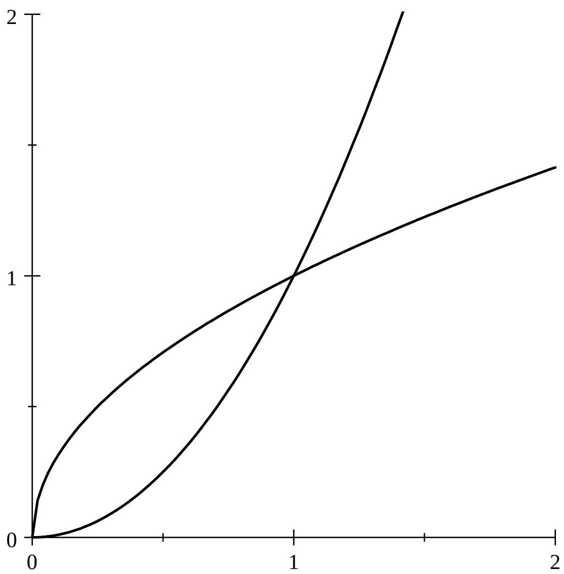
$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} x^p = \infty \ ,$$

c'est une bijection. Sa fonction réciproque coïncide évidemment avec la racine p-ième définie en 5.6, p. 111 :

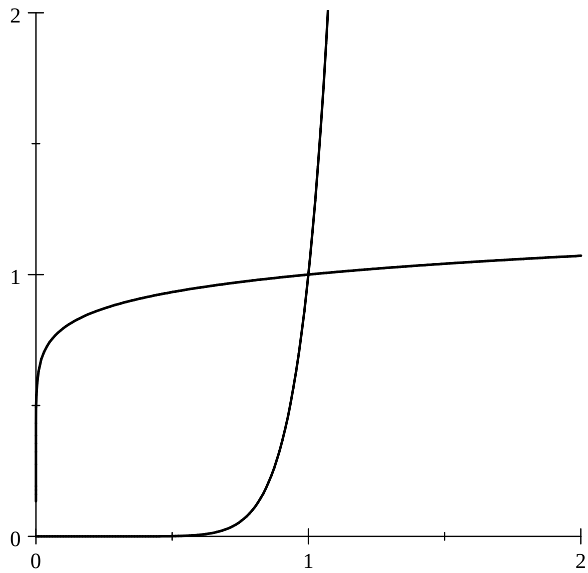
$$\sqrt[p]{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ceci nous fournit une nouvelle preuve de l'existence de la racine p-ième, ainsi que sa continuité, mais ne nous donne pas un algorithme pour la calculer.



$\mathrm{id}^2 : x \longmapsto x^2$ et $\sqrt{\mathrm{id}} : x \longmapsto \sqrt{x}$



$\mathrm{id}^{10} : x \longmapsto x^{10}$ et $\sqrt[10]{\mathrm{id}} : x \longmapsto \sqrt[10]{x}$

EXERCICE Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\left(\frac{1}{1+x_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, ou bien $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$ ou bien $\lim_k x_k = +\infty$.

On a la même assertion pour la suite $\left(\frac{x_k}{1+x_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

7.12 Le logarithme naturel

PROPOSITION *La fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *est une bijection continue strictement croissante. Il en est de même de sa fonction réciproque*

$$\ln := \overset{-1}{\exp} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

On a

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty \ .$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on a

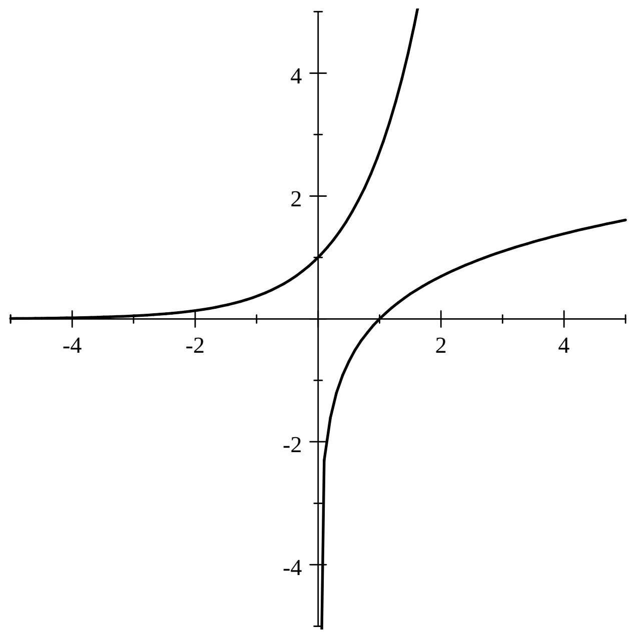
$$\exp(y) = \exp(y - x + x) = \exp(y - x) \cdot \exp(x) > \exp(x) \ ,$$

car $y - x > 0$ et

$$\exp(y - x) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(y-x)^l}{l!} > 1 \ .$$

C'est alors immédiat par l'exemple 7.9.4. □

DEFINITION On dit que ln est la *fonction logarithmique naturelle* et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x$ est le *logarithme naturel* (ou *népérien*) de x .



exp et ln

REMARQUE Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$y = \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad \exp(y) = x \ .$$

En particulier

$$\exp(\ln x) = x \quad \text{et} \quad \ln(\exp(y)) = y$$

et

$$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1 \ .$$

Nous verrons plus tard que la croissance de ln est très faible. Remarquons que

$$\ln\left(2,68\ldots\cdot 10^{43}\right) = 100 \ .$$

Nous pourrons calculer des valeurs explicites de ln lorsque nous aurons développer cette fonction en série de puissance, valable seulemnt dans l'intervalle $]0,2]$ (cf. exemple 8.13.3) et en utilisant l'équation fonctionnelle qui suit.

THEOREME (Equation fonctionnelle du logarithme naturel) *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, *on a*

$$\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y \ .$$

C'est immédiat, puisque

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\cdot\exp(\ln y) = x\cdot y \ .$$

□

EXERCICE 1 Calculer

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ ,$$

en remarquant que la fonction

$$x \longmapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) :]0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$$

est une bijection strictement décroissante.

EXERCICE 2 Montrer que la fonction

$$f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

est strictement croissante et bijective.

EXERCICE 3 Montrer qu'il existe un $x \in]0,1]$ tel que

$$\exp x + \ln x = 0 \ .$$

7.13 Puissances réelles

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\exp(n \cdot \ln a) = \exp(\ln a)^n = a^n$$

d'après le corollaire 6.17.(iii). Par suite, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$a^p = \exp(p \cdot \ln a) = \exp\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot \ln a\right) = \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right)^q \ ,$$

donc

$$\sqrt[q]{a^p} = \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) \ .$$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[k \cdot q]{a^{k \cdot p}} \ .$$

Ceci montre que la fonction

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : \frac{p}{q} \longmapsto \sqrt[q]{a^p} \ ,$$

est bien définie et qu'elle est prolongée par

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto \exp(x \cdot \ln\ a) \ .$$

Mais cette dernière fonction est continue, comme composition de fonctions continues.

En particulier, si $x = \lim_k \frac{p_k}{q_k}$ avec $p_k \in \mathbb{Z}$ et $q_k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\exp(x \cdot \ln a) = \lim_k \exp\left(\frac{p_k}{q_k} \cdot \ln a\right) = \lim_k \sqrt[q_k]{a^{p_k}} \ .$$

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit la *x-ième puissance de a* par

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a) \ .$$

En particulier

$$e^x = \exp(x) \quad , \quad a^x = e^{(\ln a) \cdot x} \quad \text{et} \quad \ln(a^x) = x \cdot \ln\ a \ .$$

PROPOSITION *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad , \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad , \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} \ ,$$

ainsi que

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \ .$$

La fonction

$$x \longmapsto a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est une bijection continue strictement croissante si $a > 1$ *et strictement décroissante si* $0 < a < 1$ *. Il en est de même de sa fonction réciproque notée* $\log_a$ *.*

La première partie est immédiate en utilisant les équations fonctionnelles de exp et ln . Pour la seconde, remarquons que les assertions de monotonie découlent de la proposition 7.12, puisque

$$\ln a > \ln 1 = 0 \text{ si } a > 1 \quad \text{et} \quad \ln a < \ln 1 = 0 \text{ si } 0 < a < 1 \ .$$

Le reste découle du théorème 7.12 car

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln a} = \lim_{y\to\pm\infty} e^y = \left\{ \begin{array}{ccc} \infty & & a > 1 \\ & \text{si} & \\ 0 & & 0 < a < 1 \end{array} \right. ,$$

en faisant le changement de variable $y = (\ln a)\cdot x$, et

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to\infty} a^{-y} = \frac{1}{\lim_{y\to\infty} a^y} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & a > 1 \\ & \text{si} & \\ \infty & & 0 < a < 1 \end{array} \right. ,$$

en faisant le changement de variable $y = -x$. $\square$

REMARQUE Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x \ .$$

On en déduit $x = a^y = e^{(\ln a)\cdot y}$, donc $\ln x = y \cdot \ln a$, et par suite

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{et} \quad \ln = \log_e \ .$$

En pratique on utilise

$$\log := \log_{10} = \frac{\ln}{\ln 10} \ .$$

On a

$$\ln 10 = 2,30259\ldots \ .$$

EXERCICE Montrer que la fonction

$$f := \mathrm{id}\cdot\exp : x \longmapsto x \cdot e^x : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est une bijection strictement croissante. En déduire que les équations

$$v = x \cdot e^{x\cdot u} \quad \text{et} \quad u \cdot v = y$$

définissent une bijection

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : (x, y) \longmapsto (u, v) \ .$$

Formuler tout d'abord ce problème de manière plus précise !

7.14 Les fonctions arccos et arcsin

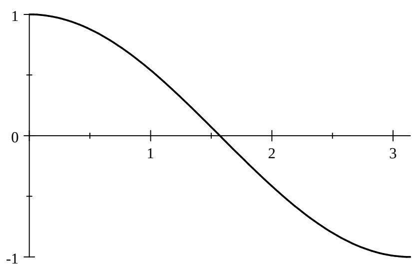
D'après la proposition 7.7.(ii), on obtient immédiatement :

PROPOSITION *La fonction* $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ *est continue, bijective et strictement décroissante. Il en est de même de sa fonction réciproque*

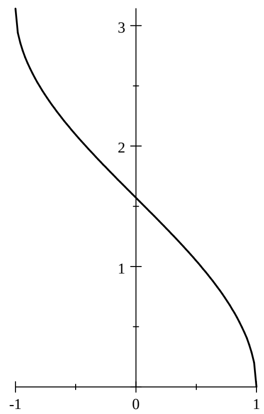
$$\arccos := \overset{-1}{\cos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \ \ .$$

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ *est continue, bijective et strictement croissante. Il en est de même de sa fonction réciproque*

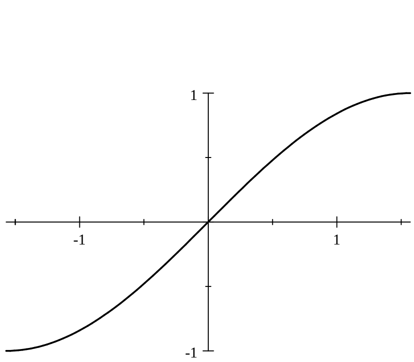
$$\arcsin := \overset{-1}{\sin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ \ .$$



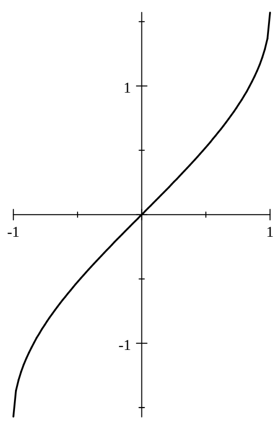
cos



arccos



sin



arcsin

Une application importante de la fonction arccos sera donnée en 7.17. Elle permet de calculer l'argument $\arg z$ d'un nombre complexe z .

Pour le calcul explicite d'une valeur de arccos et arcsin ont peut utiliser leur développement en série de Taylor (cf. exercice 10.8.2).

7.15 Les fonctions tan et arctan

DEFINITION On définit la fonction

$$\tan := \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \smallsetminus \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

et on dit que c'est la *fonction tangente* et que $\tan x$, pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi$, est la *tangente* de x .

REMARQUE 1 Utilisant les théorèmes d'addition 6.18, p. 166, on voit immédiatement que la fonction tangente satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\tan (x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

pour tout $x, y, x+y \in \mathbb{R} \smallsetminus \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi$. En outre

$$\tan (-x) = - \tan x \ .$$

PROPOSITION *La fonction* $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est une bijection continue strictement croissante et on a*

$$\sup\nolimits_{x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} \tan x = \lim\nolimits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty$$

et

$$\inf\nolimits_{x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} \tan x = \lim\nolimits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty \ .$$

La fonction réciproque

$$\arctan := \overset{-1}{\tan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

est également une bijection continue strictement croissante.

En effet, pour tout $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $x < y$, de la proposition 7.7.(ii) on tire

$$0 \leqslant \sin x < \sin y \quad \text{et} \quad \cos x > \cos y > 0 \ ,$$

donc

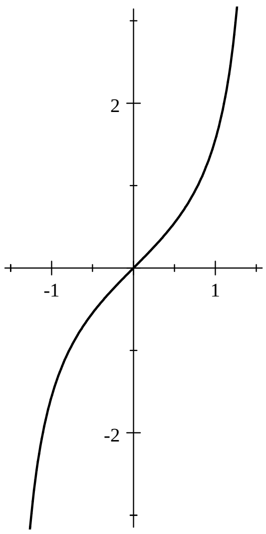
$$0 \leqslant \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y \ .$$

Pour la première formule formules il vient

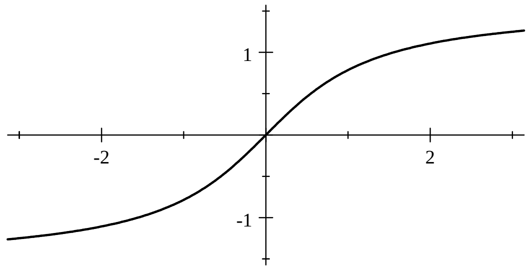
$$\lim\nolimits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{1}{\tan x} = \frac{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \cos x}{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \sin x} = 0 \ ,$$

d'où le résultat par le lemme 7.9. On complète l'argumentation grâce à la formule $\tan (-x) = - \tan x$.

Finalement il suffit d'appliquer le théorème de la valeur intermédiaire 7.5, p. 181, et celui de la fonction réciproque 7.11. □



tan



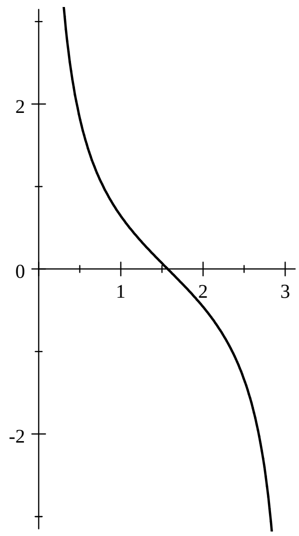
arctan

REMARQUE 2 On a un résultat analogue pour la fonction *cotangente*

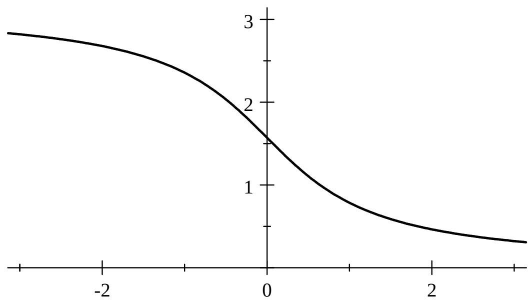
$$\cot := \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cdot \pi \longrightarrow \mathbb{R}$$

et sa fonction réciproque

$$\operatorname{arccot} := \overset{-1}{\cot} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]0, \pi\right[\ .$$



cot



arccot

Pour le calcul explicite d'une valeur de arctan et arccot ont peut utiliser leur développement en série de Taylor (cf. 10.11).

7.16 Quelques applications

(1) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_k \sqrt[k]{a} = 1$.
En effet
$$\lim_k \sqrt[k]{a} = \lim_k a^{\frac{1}{k}} = a^0 = 1 \ ,$$
puisque $x \longmapsto a^x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue. $\square$

(2) Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction
$$x \longmapsto x^s : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
est une bijection continue strictement croissante. On a
$$\lim_{x\to\infty} x^s = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0+} x^s = 0 \ .$$
En effet
$$x^s = e^{s\cdot\ln x} = e^y \ ,$$
en faisant le changement de variable $y = s \cdot \ln x$. On a alors
$$\lim_{x\to\infty} x^s = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty$$
et
$$\lim_{x\to 0+} x^s = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0 \ .$$
$\square$

Ceci montre également que l'on peut prolonger cette fonction par continuité en 0 en posant
$$0^s := 0 \quad \text{pour tout } s > 0 \ .$$

(3) Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0+} x^s \cdot \ln x = 0 \ .$$
En effet
$$\frac{\ln x}{x^s} = \frac{\ln x}{e^{s\cdot\ln x}} = \frac{y}{s} \cdot e^{-y} \quad \text{et} \quad x^s \cdot \ln x = \frac{y}{s} \cdot e^y \ ,$$
en faisant le changement de variable $y = s \cdot \ln x$, donc
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^s} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{s} \cdot e^{-y} = 0$$
et
$$\lim_{x\to 0+} x^s \cdot \ln x = \lim_{y\to -\infty} \frac{y}{s} \cdot e^y = 0 \ .$$
$\square$

(4) Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\lim_k \sqrt[k]{k^s} = 1 \ .$$
En effet
$$\sqrt[k]{k^s} = (k^s)^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\frac{s}{k} \cdot \ln k\right) \quad \text{et} \quad \lim_k \frac{\ln k}{k} = 0 \ ,$$

d'où le résultat par la continuité de exp en 0 . □

EXERCICE Calculer

(a)
$$\lim_{1<x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln 2x} \ .$$

(b)
$$\lim_{1\neq x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \ .$$

(c)
$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln^2 x \ .$$

7.17 Puissances complexes

DEFINITION Par analogie avec les puissances réelles, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on écrit

$$e^z := \exp(z)$$

et, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit

$$a^z := e^{z \cdot \ln a} \ .$$

REMARQUE 1 Nous ne définissons pas w^z pour $w \in \mathbb{C}$ car il nous faudrait définir $\ln w$, ce qui pose certains problèmes liés à la fonction arg , qui n'est pas partout continue (cf. remarque 7.7.3). Ils sont discutés dans le cours "Théorie des fonctions" .

Si $z = x + i \cdot y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \ .$$

En particulier

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad , \quad e^{i\pi} = -1 \quad \text{et} \quad e^i = \cos 1 + i \cdot \sin 1 \ .$$

Rappelons (cf. définition 7.7) que

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \arg z} \quad \text{avec } \arg z \in \left]-\pi, \pi\right] \ .$$

PROPOSITION *Pour tout* $z, w \in \mathbb{C}$ *, on a*

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\arg z + \arg w)} \ ,$$

avec

$$\arg z = \left\{ \begin{array}{ll} \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} & \\ & si \\ -\arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} & \end{array} \right. \begin{array}{l} \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{array}$$

si $z \neq 0$ *.*

En effet on a $\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \in [-1, 1]$, donc $|\arg z| = \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \in [0, \pi]$, d'où le résultat.

□

REMARQUE 2 Attention on a seulement

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w \quad \mod 2\pi \ .$$

REMARQUE 3 Si l'on choisit arg $z \in [0, 2\pi[$, on a

$$\arg z = \left\{ \begin{array}{ll} \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} & \\ & \text{si} \\ 2\pi - \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} & \end{array} \right. \begin{array}{l} \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{array} \ .$$

EXEMPLE La série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^z}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 1$.

En effet

$$\left|\frac{1}{l^z}\right| = \left|e^{-(\operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z) \cdot \ln l}\right| = e^{-\operatorname{Re} z \cdot \ln l} = \frac{1}{l^{\operatorname{Re} z}}$$

et la série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{\operatorname{Re} z}}$ est convergente par l'exemple 6.2.2.

Ceci définit un prolongement de la fonction zéta de Riemann dans le domaine complexe :

$$\zeta : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^z} .$$

EXERCICE Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer

(a) En choisissant $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right]$, on a

$$\arg z = \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} & & \operatorname{Re} z \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} & \text{si} & \operatorname{Re} z < 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi + \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} & & \operatorname{Re} z < 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} .$$

(b) Si l'on choisit $\arg z \in \left[0, 2\pi\right[$, alors

$$\arg z = \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} & & \operatorname{Re} z \geqslant 0 \text{ et } \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} & \text{si} & \operatorname{Re} z < 0 \\ 2\pi + \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} & & \operatorname{Re} z \geqslant 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} .$$

7.18 Racines n-ièmes de l'unité

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n = 1 \ .$$

Si $z = |z| \cdot e^{ix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, alors $z^n = |z|^n \cdot e^{inx}$, donc

$$z^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = 1 \text{ et } e^{inx} = 1 \ .$$

Mais par la proposition 7.7.i , on a $e^{inx} = 1$ si, et seulement si, $n \cdot x = 2\pi \cdot k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $e^{2\pi i} = 1$, on en déduit :

PROPOSITION *Les solutions de $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes*

$$e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n}} \quad \textit{pour } k = 0, \ldots, n-1 \ .$$

DEFINITION On dit que ces nombres sont les *racines n-ièmes de l'unité* .

REMARQUE Ce sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets, l'un étant 1 .

Plus généralement, si $w \in \mathbb{C}^*$, l'équation

$$z^n = w$$

s'écrit

$$|z|^n \cdot e^{inx} = |w| \cdot e^{i \cdot \arg w} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \ ,$$

i.e.

$$|z|^n = |w| \quad \text{et} \quad e^{inx} = e^{i \cdot \arg w} \ ,$$

donc

$$|z| = |w|^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad n \cdot x - \arg w = 2\pi \cdot k \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z} \ .$$

COROLLAIRE *Pour tout $w \in \mathbb{C}$, les solutions de $z^n = w$ sont donc*

$$|w|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \cdot \frac{(\arg w + 2\pi \cdot k)}{n}} \quad \textit{pour } k = 0, \ldots, n-1 \ .$$

En particulier celles de $z^2 = w$ sont

$$\pm\sqrt{w} \ ,$$

où

$$\sqrt{w} := |w|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg w}{2}} \ .$$

Il faut remarquer que cette définition dépend du choix de la fonction arg ! Toutefois, que l'on choisisse arg à valeurs dans $]-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$, on a

$$i = \sqrt{-1} \ .$$

Mais attention à l'emploi de $\sqrt{\cdot}$:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

La faute provient du fait que

$$\arg\left((-1)^2\right) = \arg(1) = 0 \neq 2\pi = \arg(-1) + \arg(-1) \ ,$$

donc que

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)^2} \ .$$

Résolution de l'équation du second degré Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$, l'équation

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

est équivalente à

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \cdot \left(b^2 - 4ac\right) \ .$$

Les solutions sont donc

$$\frac{1}{2a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \ .$$

EXERCICE 1 Mettre les solutions des équations suivantes sous la forme $z = x + i \cdot y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

(a)
$$z^3 = 1 \ .$$

(b)
$$z^3 = i - 1 \ .$$

(c)
$$z^2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

(d)
$$z^2 + 2i \cdot z - i = 0 \ .$$

Utiliser les théorèmes d'addition pour déterminer les valeurs de cos et sin qui interviennent.

EXERCICE 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $j = 0, \ldots, 2^n - 2$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \exp\left(2\pi i \cdot \frac{j \cdot 2^k}{2^n - 1}\right)\right) = 1 \ .$$

Utiliser l'exercice 3.12.2.

EXERCICE 3 Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$|z| = 2c \cdot \sin(\arg z)$$

est un cercle.