Chapitre 5

CONVERGENCE

Nous allons formaliser dans ce paragraphe les notions d'approximation et d'erreur. Ce n'est que par cet intermédiaire que l'on peut traiter les nombres réels, la notion de coupure étant par trop abstraite et ne permettant pas de calculer simplement. En fait les seuls nombres explicites que nous pouvons écrire sont des nombres rationnels, et les nombres réels irrationnels seront pratiquement décrits comme limite d'une suite de nombres rationnels.

Version du 21 avril 2002

5.1 Espaces métriques

DEFINITION 1 Soit X un ensemble. Une application

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

s'appelle une *métrique* ou une *distance (sur X)* si, pour tout $x, y, z \in X$, on a

(a) Inégalité triangulaire

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

(b) Symétrie

$$d(x, y) = d(y, x)$$

(c) Séparation

$$d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \ .$$

On dit alors que le couple (X, d) , ou plus simplement X si la métrique d considérée ne prête pas à confusion, est un *espace métrique* .

EXEMPLE 1 L'application

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (z, w) \longmapsto |z - w|$$

est une métrique sur $\mathbb{C}$.

En effet, par l'inégalité triangulaire 4.14, on a

$$d(z, v) = |z - v| = |z - w + w - v| \leqslant |z - w| + |w - v| = d(z, w) + d(w, v) \ ,$$

$$d(z, w) = |z - w| = |w - z| = d(w, z)$$

et

$$d(z, w) = |z - w| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = w \ .$$

□

EXEMPLE 2 Si (X, d) est un espace métrique et Y est un partie de X , alors

$$d_Y := d_{|Y \times Y} : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (y, z) \longmapsto d(y, z)$$

est une métrique sur Y , dite la *métrique induite* par celle de X sur Y .

C'est trivial, puisqu'il suffit de restreindre les variable à Y . □

EXEMPLE 3 Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{Q}$, un intervalle $[a, b]$ ou $[a, b[$ par exemple, ou la réunion des deux intervalles disjoints de $\mathbb{R}$, munis de la métrique induite par celle de $\mathbb{C}$, sont des espaces métriques.

EXEMPLE 4 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. Sur $X \times Y$ on peut définir différentes métriques :

$$d_1 : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : ((x, y), (u, v)) \longmapsto d_X(x, u) + d_Y(y, v) \ ,$$

$$d_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : ((x, y), (u, v)) \longmapsto \sqrt{d_X(x, u)^2 + d_Y(y, v)^2}$$

ou

$$d_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : ((x, y), (u, v)) \longmapsto \max(d_X(x, u), d_Y(y, v)) \ .$$

Montrons que d_1 est une métrique. Pour tout $(x, y), (u, v), (s, t) \in X \times Y$, on a

$$d_1((x, y), (s, t)) = d_X(x, s) + d_Y(y, t) \leqslant d_X(x, u) + d_X(u, s) + d_Y(y, v) + d_Y(v, t) =$$

$$= d_X(x, u) + d_Y(y, v) + d_X(u, s) + d_Y(v, t) = d_1((x, y), (u, v)) + d_1((u, v), (s, t)) \ ,$$

ainsi que

$$d_1((x, y), (s, t)) = d_X(x, s) + d_Y(y, t) = d_X(s, x) + d_Y(t, y) = d_1((s, t), (x, y)) \ .$$

D'autre part

$$d_1((x, y), (s, t)) = d_X(x, s) + d_Y(y, t) = 0$$

est équivalent à

$$d_X(x, s) = d_Y(y, t) = 0 \ ,$$

puisque $d_X(x, s), d_Y(y, t) \geqslant 0$, donc à

$$x = s \text{ et } y = t \text{ , i.e. } (x, y) = (s, t) \ .$$

Pour montrer que d_2 est une métrique remarquons que l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme suivante : pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} = |(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d)| \leqslant$$

$$\leqslant |a + i \cdot b| + |c + i \cdot d| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \ .$$

Utilisant le lemme 4.11, il vient alors

$$d_2((x, y), (s, t)) = \sqrt{d_X(x, s)^2 + d_Y(y, t)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{[d_X(x, u) + d_X(u, s)]^2 + [d_Y(y, v) + d_Y(v, t)]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{d_X(x, u)^2 + d_Y(y, v)^2} + \sqrt{d_X(u, s)^2 + d_Y(v, t)^2} =$$

$$= d_2((x, y), (u, v)) + d_2((u, v), (s, t)) \ .$$

Le reste se démontre comme ci-dessus.

La démonstration pour d_∞ est laissée au lecteur. □

EXEMPLE 5 $\mathbb{R}^2$ est donc un espace métrique, lorsqu'on le munit de l'une des métriques

$$d_1 : ((x,y),(u,v)) \longmapsto |x-u| + |y-v| \ ,$$

$$d_2 : ((x,y),(u,v)) \longmapsto \sqrt{|x-u|^2 + |y-v|^2}$$

ou

$$d_\infty : ((x,y),(u,v)) \longmapsto \max(|x-u|,|y-v|) \ .$$

EXEMPLE 6 Nous allons maintenant utiliser la représentation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Etant donnés $x,y,u,v \in \mathbb{R}$ et $z := (x,y)$, $w := (u,v)$, on a

$$|z-w| = \sqrt{|x-u|^2 + |y-v|^2} = d_2((x,y),(u,v)) \ .$$

DEFINITION 2 Soient (X,d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On dit que

$$B(x,r,d) := \{y \in X \mid d(y,x) \leqslant r\}$$

est la *boule (fermée) de centre x et de rayon r* .

EXERCICE 1 On considère les métriques d_1 et d_∞ sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Esquisser les ensembles

$$B((2,2),1,d_1) \quad \text{et} \quad B((2,2),1,d_\infty) \ .$$

(b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $b,c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$B(x,b,d_1) \subset B(x,a,d_\infty) \quad \text{et} \quad B(x,c,d_\infty) \subset B(x,a,d_1) \ .$$

Peut-on choisir b et c maximaux avec cette propriété ?

(c) L'application $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto (x-y, x+y)$ est linéaire. Décrire l'image de $B((0,0),1,d_\infty)$ et $B((2,2),1,d_\infty)$ par T à l'aide de la métrique d_1 .

EXERCICE 2 On considère les métriques d_k sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour $k = 1,2,\infty$. Etant donné $r > 0$, esquisser les boules fermées $B(0,r,d_k)$ et montrer que

$$B(0,r,d_1) \subset B(0,r,d_2) \subset B(0,r,d_\infty) \subset B(0,2r,d_1) \ .$$

Déterminer le plus grand nombre réel $\rho = \rho(r)$ tel que l'on ait

$$B(0,\rho,d_2) \subset B(0,r,d_1) \ .$$

EXERCICE 3 Soit (X,d) un espace métrique. Montrer

(a) Pour tout $x,y,z \in X$, on a

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y) \ .$$

(b) Pour tout $x,y,z,w \in X$, on a l'inégalité

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leqslant d(x,z) + d(y,w) \ .$$

(c) L'application

$$\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \longmapsto \delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

définit une nouvelle métrique sur X . Que peut-on dire de cette métrique ?

5.2 Définition de la notion de convergence

Soit X un espace métrique. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de X et $x \in X$, alors $d(x_k, x)$ est l' *erreur* que l'on fait (par rapport à la métrique d) en approximant x par x_k . On s'intéresse aux suites telles que l'approximation s'améliore, i.e. telles que l'erreur diminue, lorsque k augmente.

DEFINITION 1 Une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ est dite une *zéro-suite* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant N(\varepsilon)$, on ait

$$0 \leqslant e_k \leqslant \varepsilon \ .$$

On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est *convergente vers* $x \in X$ si la suite des erreurs $(d(x_k, x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite, i.e. si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant N(\varepsilon)$, on ait

$$d(x_k, x) \leqslant \varepsilon \ .$$

Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X est dite *divergente* si elle ne converge vers aucun $x \in X$.

REMARQUE Une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ est une zéro-suite si, et seulement si, elle converge vers 0 dans l'espace métrique $\mathbb{R}_+$.

THEOREME *Si une suite* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* X *converge vers* $x \in X$ *et vers* $y \in X$ *, alors*

$$x = y \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe donc $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$d(x_k, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tout } k \geqslant N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et

$$d(x_k, y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tout } k \geqslant M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ .$$

On a alors

$$d(x, y) \leqslant d(x_k, y) + d(x_k, y) = d(x_k, x) + d(x_k, y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour tout $k \geqslant \max\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. Ceci montre que

$$d(x, y) \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \ ,$$

donc que $d(x, y) = 0$ (cf. exemple fondamental 4.9), et par suite que $x = y$. ——— $\square$

Ce théorème nous permet de poser la

DEFINITION 2 Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un espace métrique convergente vers $x \in X$, alors on dit que x est la *limite* de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans X et on la désigne par

$$\lim x_k \quad , \quad \lim_k x_k \quad \text{ou} \quad \lim_{k\to\infty} x_k \ .$$

Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N},k\geqslant n}$ de X indexée à partir de n , on écrit plus simplement $(x_k)_{k\geqslant n}$, est dite convergente si $(x_{l+n})_{l\in\mathbb{N}}$ est convergente. Ceci revient à exiger dans la définition de la convergence que $N(\varepsilon) \geqslant n$. On écrit alors

$$\lim\nolimits_{k\geqslant n} x_k \ ,$$

si c'est nécessaire.

PROPOSITION *Soient $(x_k)_{k\geqslant n}$ une suite dans X et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant n$. Pour que $(x_k)_{k\geqslant n}$ soit convergente, il faut et il suffit que $(x_k)_{k\geqslant m}$ soit convergente. Dans ce cas ces suites ont même limite.*

En particulier si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, $(x_{k+n})_{k\in\mathbb{N}} = (x_k)_{k\geqslant n}$ est convergente et

$$\lim\nolimits_k x_k = \lim\nolimits_k x_{k+n} = \lim\nolimits_{k\geqslant n} x_k \ .$$

C'est immédiat. □

EXEMPLE Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constante, i.e. telle que $x_k = x \in X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est évidemment convergente vers x .

EXERCICE 1 Soients $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique X , $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection et $y_l := x_{\sigma(l)}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, la suite $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas les limites coïncident.

EXERCICE 2 Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergente dans X vers x et y respectivement, alors

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \ .$$

Utiliser l'exercice 5.1.3.b.

5.3 Convergence d'une suite monotone

THEOREME *Soit* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante, resp. décroissante, de* $\mathbb{R}$. *Alors cette suite est convergente si, et seulement si, elle est majorée, resp. minorée. Dans ce cas on a*

$$\lim_k x_k = \sup_{l\in\mathbb{N}} x_l \quad , \textit{ resp.} \quad \lim_k x_k = \inf_{l\in\mathbb{N}} x_l \ .$$

Nous pouvons supposer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, l'autre cas s'en déduisant immédiatement par symétrie. Si cette suite est convergente vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \leqslant x+1$ pour tout $k \geqslant N$. Puisque elle est croissante, on obtient $x_k \leqslant x+1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui prouve la nécessité.

Réciproquement nous savons que $\sup_{l\in\mathbb{N}} x_l$ existe dans $\mathbb{R}$ par le théorème de Dedekind 4.8, p. 80. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Par la propriété d'approximation 4.8, p. 79, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{N(\varepsilon)} > \sup_{l\in\mathbb{N}} x_l - \varepsilon$. Mais pour tout $k \geqslant N(\varepsilon)$, il vient

$$\sup_{l\in\mathbb{N}} x_l - \varepsilon \leqslant x_{N(\varepsilon)} \leqslant x_k \leqslant \sup_{l\in\mathbb{N}} x_l \ ,$$

puisque $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ceci montre que

$$\left|x_k - \sup_{l\in\mathbb{N}} x_l\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant N(\varepsilon) \ .$$

□

EXEMPLE 1 La suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est une zéro-suite.

En effet $\inf_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} = 0$ par l'exemple fondamental 4.9. □

EXEMPLE 2 La suite $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente.

En effet, si elle était convergente vers $x \in \mathbb{R}$, on aurait $\left|(-1)^k - x\right| \leqslant \frac{1}{2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ (il suffit de prendre $n = N\left(\frac{1}{2}\right)$), donc

$$2 = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right| = \left|(-1)^{n+1} x + x - (-1)^n\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1} x\right| + \left|x - (-1)^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ ,$$

ce qui est absurde. □

EXEMPLE 3 La suite $\left(\frac{k}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 .

En effet, on a

$$\left|\frac{k}{k+1} - 1\right| = \left|\frac{k-k-1}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1}$$

et

$$\lim_k \frac{1}{k+1} = \lim_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} = 0$$

par l'exemple 1 . $\square$

EXEMPLE 4 Si $0 \leqslant y < 1$, alors $\left(y^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite.

C'est immédiat, puisque $\left(y^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} y^k = 0$$

par le corollaire 4.10.ii. $\square$

EXERCICE 1 Montrer que la suite $\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2 Montrer que la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par

$$x_0 := 2 \quad \text{et} \quad x_{k+1} := \frac{x_k}{2} + 2 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

est convergente et déterminer sa limite. Commencer par démontrer que cette suite est majorée par 4 .

EXERCICE 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer à l'aide de l'exercice 4.7 que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{n^k} \cdot \binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \ .$$

(b) En déduire que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3 \ .$$

(c) Montrer que la suite $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante, convergente et que

$$\frac{64}{27} < \lim_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3 \ .$$

Utiliser l'inégalité de Bernouilli.

EXERCICE 4 Soit A une partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite croissante $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans A telle que

$$\sup A = \lim_k x_k \ .$$

5.4 Calcul avec les zéro-suites

PROPOSITION *Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites de $\mathbb{R}_+$.*

(i) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite et

$$0 \leqslant y_k \leqslant x_k \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

alors $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite.

(ii) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des zéro-suites, alors $(x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\max(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont des zéro-suites.

(iii) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(x_k \cdot y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite.

(iv) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite, alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée. En particulier si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des zéro-suites, alors $(x_k \cdot y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite.

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des zéro-suites alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon), M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que

$$0 \leqslant x_k \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant N(\varepsilon)$$

et

$$0 \leqslant y_k \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant M(\varepsilon) \ .$$

Démonstration de (i) Grâce à l'hypothèse on obtient immédiatement

$$0 \leqslant y_k \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant N(\varepsilon) \ ,$$

ce qui montre que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite.

Démonstration de (ii) On a évidemment

$$0 \leqslant x_k + y_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant \max\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \ ,$$

et

$$0 \leqslant \max(x_k, y_k) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant \max(N(\varepsilon), M(\varepsilon)) \ .$$

Démonstration de (iii) Puisque $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée, il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 \leqslant y_k \leqslant m \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

On a alors

$$0 \leqslant x_k \cdot y_k \leqslant \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant N\left(\frac{\varepsilon}{m}\right) \ .$$

Démonstration de (iv) Puisque $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite, on a

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1 \quad \text{pour tout } k \geqslant N(1) \ ,$$

donc

$$0 \leqslant x_k \leqslant \max(\{y_l \mid 0 \leqslant l < N(1)\} \cup \{1\}) \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

ce qui montre que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée. La dernière assertion découle alors de (iii). □

EXEMPLE La suite $\left(\frac{k}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite.

En effet, on démontre par récurrence que, pour tout $k \geqslant 4$, on a $k^2 \leqslant 2^k$, donc

$$0 \leqslant \frac{k}{2^k} \leqslant \frac{1}{k} \ ;$$

le résultat découle donc de (i) et de l'exemple 5.3.1, p. 102. □

PROBLEME Est-ce que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\frac{k^l}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite ? Nous traiterons cette question dans l'exemple 5.5.3, p. 108, ci-dessous.

EXERCICE 1 Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite si, et seulement si, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe $M(l) \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$0 \leqslant e_k \leqslant \frac{1}{l} \quad \text{pour tout } k \geqslant M(l) \ .$$

EXERCICE 2 Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une zéro-suite de $\mathbb{R}_+^*$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui n'est pas une zéro-suite. Montrer que la suite $\left(\frac{y_k}{x_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

5.5 Calcul avec les limites dans $\mathbb{C}$

THEOREME *Soient* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *des suites convergentes dans* $\mathbb{C}$ *. Alors*

(i) $(z_k + w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est convergente et on a*

$$\lim_k (z_k + w_k) = \lim_k z_k + \lim_k w_k \ .$$

(ii) $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ *est convergente, majorée et*

$$\lim_k |z_k| = |\lim_k z_k| \ .$$

(iii) $(z_k \cdot w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est convergente et*

$$\lim_k (z_k \cdot w_k) = (\lim_k z_k) \cdot (\lim_k w_k) \ .$$

(iv) Si $\lim_k w_k \neq 0$ *, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $w_k \neq 0$ *pour tout* $k \geqslant n$ *, la suite* $\left(\frac{z_k}{w_k}\right)_{k\geqslant n}$ *soit convergente et*

$$\lim_k \frac{z_k}{w_k} = \frac{\lim_k z_k}{\lim_k w_k} \ .$$

(v) $(\overline{z_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *est convergente et*

$$\lim_k \overline{z_k} = \overline{\lim_k z_k} \ .$$

Si $z := \lim_k z_k$ et $w := \lim_k w_k$, alors les suites $(|z_k - z|)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(|w_k - w|)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des zéro-suites.

Démonstration de (i) On a

$$|z_k + w_k - (z + w)| = |z_k - z + w_k - w| \leqslant |z_k - z| + |w_k - w| \ ,$$

donc $(z_k + w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $z + w$ par la proposition 5.4, (ii) et (i).

Démonstration de (ii) D'après l'inégalité triangulaire 4.14, on a

$$||z_k| - |z|| \leqslant |z_k - z| \ ,$$

donc $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $|z|$ par la proposition 5.4.i. D'autre part, l'inégalité

$$|z_k| \leqslant |z_k - z| + |z|$$

montre que $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée, puisque $(|z_k - z|)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée par la proposition 5.4.iv.

Démonstration de (iii) On a

$$|z_k \cdot w_k - z \cdot w| \leqslant |z_k \cdot w_k - z \cdot w_k + z \cdot w_k - z \cdot w| \leqslant |z_k - z| \cdot |w_k| + |z| \cdot |w_k - w| \ ,$$

d'où le résultat par (ii) et la proposition 5.4, (iii), (ii) et (i).

Démonstration de (iv) Si $w \neq 0$, grâce à l'inégalité triangulaire 4.14 on a

$$|w_k| = |w - (w - w_k)| \geqslant |w| - |w_k - w| \geqslant |w| - \frac{|w|}{2} = \frac{|w|}{2} > 0 \qquad (*)$$

pour tout $k \geqslant n$, en ayant choisi $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|w_k - w| \leqslant \frac{|w|}{2} \quad \text{pour tout } k \geqslant n \ .$$

Pour tout $k \geqslant n$, on a en particulier $w_k \neq 0$. Il vient alors

$$\left|\frac{z_k}{w_k} - \frac{z}{w}\right| = \left|\frac{z_k}{w_k} - \frac{z_k}{w} + \frac{z_k}{w} - \frac{z}{w}\right| \leqslant \frac{|z_k| \cdot |w - w_k|}{|w_k| \cdot |w|} + \frac{|z_k - z|}{|w|} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \frac{|z_k| \cdot |w - w_k|}{|w|^2} + \frac{|z_k - z|}{|w|} \ ,$$

en ayant utilisé $(*)$, d'où le résultat par (ii) et la proposition 5.4, (iii), (ii) et (i).

Démonstration de (v) C'est immédiat, puisque

$$|\overline{z_k} - \overline{z}| = |z_k - z| \ .$$

□

EXERCICE 1 Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergentes dans $\mathbb{R}$, alors

$$(\max(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (\min(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$$

sont convergentes et on a

$$\lim_k \max(x_k, y_k) = \max(\lim_k x_k, \lim_k y_k) \quad \text{et} \quad \lim_k \min(x_k, y_k) = \min(\lim_k x_k, \lim_k y_k) \ .$$

REMARQUE On démontre immédiatement par récurrence des formules contenant une combinaison en nombre fini des opérations citées dans le théorème.

EXEMPLE 1 On a

$$\lim_k \frac{3 \cdot k^2 + 13 \cdot k}{k^2 - 2} = \lim_{k\geqslant 1} \frac{3 + 13 \cdot \frac{1}{k}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{k^2}} = \frac{\lim_{k\geqslant 1}\left(3 + 13 \cdot \frac{1}{k}\right)}{\lim_{k\geqslant 1}\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{k^2}\right)} = \frac{3 + 13 \cdot \lim_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}}{1 - 2 \cdot \left(\lim_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}\right)^2} = 3 \ ,$$

en justifiant les égalités par la fin.

EXEMPLE 2 Pour $a \in \mathbb{R}$, définissons par récurrence

$$x_0 := a \quad \text{et} \quad x_{k+1} := x_k \cdot (1 - 2 \cdot |x_k|) \ .$$

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors en posant $x := \lim_k x_k$, on obtient

$$x = \lim_k x_{k+1} = \lim_k [x_k \cdot (1 - 2 \cdot |x_k|)] = x \cdot (1 - 2 \cdot |x|) \ ,$$

donc

$$2x \cdot |x| = 0 \ ,$$

et par suite $x = 0$.

Mais pour $a = 1$, on voit immédiatement que $x_k = (-1)^k$, et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente (cf. exemple 5.3.2, p. 102). Cet exemple montre que la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est le point délicat.

Les $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, i.e. converge vers 0 , serons déterminés dans l'exercice 8.

EXEMPLE 3 Soient $a \in [0,1[$ et $l \in \mathbb{N}$. Alors $\left(k^l \cdot a^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite.

Choisissons $q \in \mathbb{R}$ tel que $a < q < 1$. Comme

$$\lim_k a \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^l = a \cdot \left(1 + \lim_k \frac{1}{k}\right)^l = a \ ,$$

il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant n$, on ait

$$\left| a \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^l - a \right| \leqslant q - a \ .$$

En particulier

$$a \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^l \leqslant q \quad \text{pour tout } k \geqslant n \ .$$

Nous allons maintenant montrer par récurrence sur k que

$$k^l \cdot a^k \leqslant \left(n^l \cdot a^n\right) \cdot q^{k-n} \quad \text{pour tout } k \geqslant n \ ,$$

ce qui prouvera notre assertion (cf. proposition 5.2 et exemple 5.3.4, p. 102).

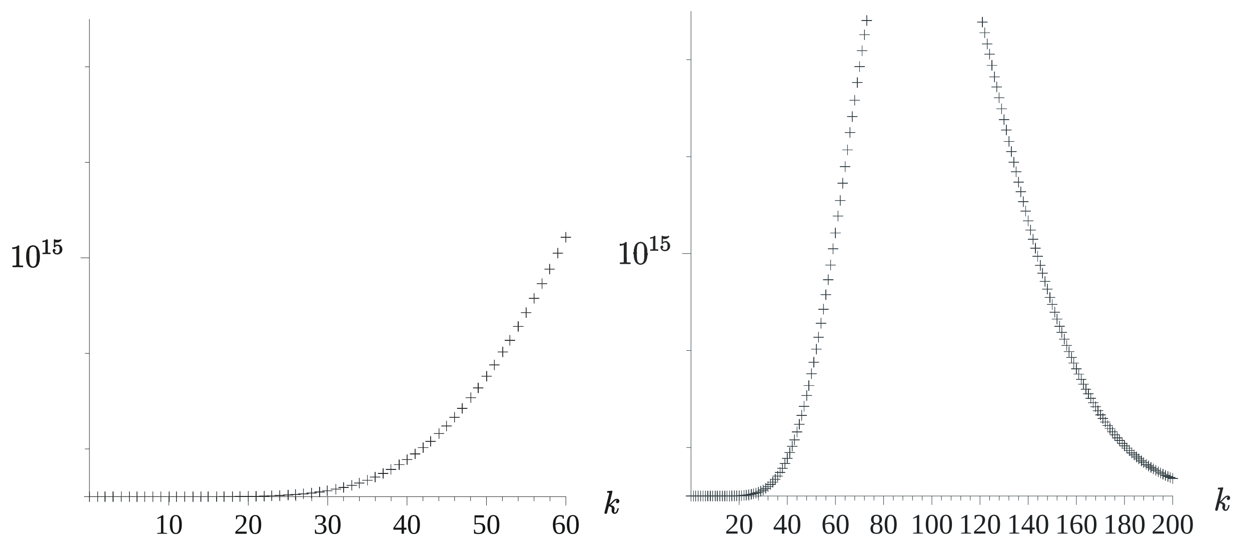
C'est évidemment vrai pour n . Si la formule est vraie pour k , on a

$$(k+1)^l \cdot a^{k+1} = k^l \cdot a^k \cdot a \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^l \leqslant \left(n^l \cdot a^n\right) \cdot q^{k-n} \cdot q = \left(n^l \cdot a^n\right) \cdot q^{k+1-n} \ ,$$

qui est bien la formule pour $k+1$. □

EXEMPLE 4 En posant $x_k := k^{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k$, on a

$$x_{100} \simeq 2,6 \cdot 10^{15} \quad , \quad x_{600} \simeq 2 \quad \text{et} \quad x_{1000} \simeq 1,7 \cdot 10^{-16} \ .$$



EXEMPLE 5 Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si,

$$|z| < 1 \quad \text{ou} \quad z = 1 \ .$$

Dans le premier cas elle converge vers 0 .

En effet si $|z| < 1$, alors
$$\lim_k \left|z^k - 0\right| = \lim_k |z|^k = 0$$
par l'exemple 5.3.4, p. 102. Si $z = 1$, la suite est constante, donc convergente.

Réciproquement si $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\left(|z|^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée par (ii). Le corollaire 4.10.i montre alors que $|z| \leqslant 1$. Si $|z| = 1$, alors
$$\left|\lim_k z^k\right| = \lim_k |z|^k = 1 \ ,$$
donc $\lim_k z^k \neq 0$, et
$$\lim_k z^k = \lim_k z^{k+1} = z \cdot \lim_k z^k \ ,$$
ce qui finit de prouver que $z = 1$. □

EXERCICE 2 Déterminer si les suites $(x_k)_{k\geqslant 3}$ suivantes sont convergentes, et calculer alors leur limite, ou divergentes :

(a)
$$x_k := \frac{7 \cdot k^3 + 2i \cdot k^2 + k}{3 \cdot k^3 + 4i} \ .$$

(b)
$$x_k := \frac{(3k+1)^3}{(2k-1) \cdot (2-3k)^2} \ .$$

(c)
$$x_k := \left(\frac{3k+2}{4k-1}\right)^n \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N}^* \ .$$

(d)
$$x_k := (-1)^k \cdot \frac{n^2+2}{(n+1)^2} \ .$$

(e)
$$x_k := \frac{2 \cdot 6^k + k^5 \cdot 4^k}{(2^k - k^2) \cdot (3^k + k^3 + 2)} \ .$$

(f)
$$x_k := \left[(-1)^k + 3\right]^2 \cdot \frac{k^3+3}{(k^2+k) \cdot (k^2-k)} \ .$$

(g)
$$x_k := \frac{2^k + i \cdot |k^2 - 42|}{k!} + (-1)^{k!} \frac{7}{\sqrt[8]{k^4+1}} \ .$$

(h)
$$x_k := \sqrt{k} - i^n \cdot \sqrt{k+1} \ .$$

(i)
$$x_k := \frac{k+2}{\sqrt{k+1}}$$

(j)
$$x_k := \prod_{l=0}^{k} \left(1 + q^{2^l}\right) \quad , \text{ où } \quad q \in \mathbb{C} \ .$$

Considérer pour $q \neq 1$ l'expression $(1-q)\, x_k$.

(k)
$$x_k := \sqrt{k} \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \ .$$

(l)
$$x_k := k \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \ .$$

EXERCICE 3 Soit $x_k := \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l(l+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer x_k et la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 4 Soit $z \in \mathbb{C}$ et définissons récursivement la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par
$$z_0 := z \quad \text{et} \quad z_{k+1} := z_k \cdot (1 - 2 \cdot |z_k|) \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$
Montrer :

(a) Si $|z| \geqslant 1$, alors $|z_k| \geqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite diverge.

(b) Si $|z| < 1$, alors la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .

EXERCICE 5 Montrer que la suite $\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée et convergente. Calculer sa limite.

EXERCICE 6 Montrer que la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par
$$x_0 := 1 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{x_k^2}{4} + 1 \ \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$
est croissante, majorée et convergente. Calculer sa limite.

EXERCICE 7 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Montrer que les suites récurrentes $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définies par
$$x_0 := x \ , \ y_0 := y \quad \text{et} \quad x_{k+1} := \sqrt{x_k \cdot y_k} \ , \ y_{k+1} := \frac{x_k + y_k}{2} \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$
satisfont à $x_k \leqslant y_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Prouver ensuite que ces suites sont monotones, convergentes et que $\lim_k x_k = \lim_k y_k$.

EXERCICE 8 Montrer que la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par
$$x_0 := 1 \quad \text{et} \quad x_{k+1} := \sqrt{x_k} + 2 \ \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$
est convergente et calculer sa limite.

5.6 Existence des racines p-ièmes

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$. Nous nous proposons de résoudre l'équation

$$x^p = a$$

dans $\mathbb{R}_+$.

LEMME *Pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$u \leqslant v \quad \Longrightarrow \quad u^p \leqslant v^p$$

et

$$u < v \quad \Longrightarrow \quad u^p < v^p \ .$$

On le démontre par récurrence sur $p \geqslant 1$. Le cas $p = 1$ est trivial, et si $u^p \leqslant v^p$, alors

$$u^{p+1} = u^p \cdot u \leqslant v^p \cdot u \leqslant v^p \cdot v = v^{p+1} \ .$$

Si $u^p < v^p$, alors $u^p \cdot u \leqslant v^p \cdot u < v^p \cdot v$, puisque $v > 0$. □

THEOREME *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$, l'équation $x^p = a$ possède une, et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$, notée $\sqrt[p]{a}$. Si $a \neq 0$, on a $\sqrt[p]{a} = \lim_k x_k$ en définissant la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par*

$$x_0 := a \quad \text{et} \quad x_{k+1} := x_k - \frac{x_k^p - a}{p \cdot x_k^{p-1}} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot x_k + \frac{a}{p \cdot x_k^{p-1}} \ .$$

Cette suite est décroissante.

L'unicité découle immédiatement du lemme. Quant à l'existence, le cas $a = 0$ est trivial. Si $a > 0$, nous pouvons définir la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par les formules ci-dessus, en appliquant le théorème de définition d'une suite récurrente 3.6 à l'application

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto x - \frac{x^p - a}{p \cdot x^{p-1}} \ .$$

En effet, si $x > 0$, alors

$$\Phi(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot x + \frac{a}{p \cdot x^{p-1}} > 0 \ .$$

Montrons que $x_{k+1}^p \geqslant a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a

$$x_{k+1}^p = \left(x_k - \frac{x_k^p - a}{p \cdot x_k^{p-1}}\right)^p = x_k^p \cdot \left(1 + \frac{a - x_k^p}{p \cdot x_k^p}\right)^p \ ,$$

Mais comme $(1 - p) \cdot x_k^p \leqslant 0 \leqslant a$, il vient $-p \cdot x_k^p \leqslant a - x_k^p$, donc

$$\frac{a - x_k^p}{p \cdot x_k^p} \geqslant -1 \ ,$$

et en appliquant l'inégalité de Bernouilli 4.10, on obtient

$$x_{k+1}^p \geqslant x_k^p \cdot \left(1 + \frac{a - x_k^p}{x_k^p}\right) = x_k^p + a - x_k^p = a \ .$$

On en déduit que $(x_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante, car

$$x_{k+1} \leqslant x_k \quad \Longleftrightarrow \quad x_k^p \geqslant a \quad \text{pour tout } k \geqslant 1 \ ,$$

par définition de x_{k+1} . Le théorème 5.3, p. 102, et la proposition 5.2 montre alors que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que

$$x := \lim_k x_k = \inf_{k\geqslant 1} x_k \ .$$

Finalement, comme

$$p \cdot x_{k+1} \cdot x_k^{p-1} = p \cdot x_k^p - x_k^p + a = (p-1) \cdot x_k^p + a \ ,$$

on obtient en passant à la limite

$$p \cdot x \cdot x^{p-1} = (p-1) \cdot x^p + a \ ,$$

donc $x^p = a$. □

COROLLAIRE *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}_+$, *on a* $\sqrt[p]{a \cdot b} = \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b}$.

En effet

$$\left(\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b}\right)^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p \cdot \left(\sqrt[p]{b}\right)^p = a \cdot b \ ,$$

d'où le résultat par l'unicité. □

REMARQUE Nous avons ainsi une seconde démonstration de l'existence de la racine carrée (cf. théorème 4.12) permettant en même temps de la calculer !

EXERCICE 1 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a

$$u \leqslant v \quad \Longleftrightarrow \quad u^p \leqslant v^p$$

et

$$u \leqslant v \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[p]{u} \leqslant \sqrt[p]{v} \ .$$

EXERCICE 2 Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 1$. Montrer que $\left(\sqrt[k]{a}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt[p]{x+y} \leqslant \sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y} \quad \text{et} \quad \left|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}\right| \leqslant \sqrt[p]{|x-y|} \ .$$

EXERCICE 4 Déterminer si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivante est convergente, et calculer alors sa limite, ou divergente :

$$x_k := \begin{cases} 13 \cdot k^2 + i \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} & k \leqslant 10^{641} \\ & \text{si} \\ \left(\sqrt[k]{k}\right) & k > 10^{641} \end{cases} \ .$$

Utiliser l'exercice 4.7.

5.7 Erreur absolue et erreur relative

DEFINITION Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On dit que $|y - x|$ est l' *erreur absolue* que l'on fait en approximant x à l'aide de y et, si $y \neq 0$, que

$$\frac{|y - x|}{|y|}$$

est l' *erreur relative* .

Si l'erreur absolue, respectivement l'erreur relative, est $\leqslant r$, alors

$$y - r \leqslant x \leqslant y + r \ ,$$

respectivement

$$y - r \cdot |y| \leqslant x \leqslant y + r \cdot |y| \ .$$

Nous aurons maintenant besoin de la notation scientifique qui sera traitée en 6.3.

PROPOSITION *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'en notation scientifique on ait*

$$y = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \ldots \cdot 10^b \quad , \text{ où } a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\} \ , a_0 \neq 0 \text{ et } b \in \mathbb{Z}$$

et que l'erreur relative r faite en approximant x à l'aide de y soit plus petite que 10^{-n} .

(i) Si $a_{n-1} \notin \{0, 9\}$, alors on a

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-2} \widetilde{a_{n-1}} \ldots \cdot 10^b \ ,$$

où $\widetilde{a_{n-1}} \in \{a_{n-1} - 1, a_{n-1}, a_{n-1} + 1\}$. En particulier les $n - 1$ premiers chiffres de y sont aussi ceux de x .

(ii) Si toutes les décimales de y à partir de a_n sont nulles, i.e. $y = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \cdot 10^b$, alors ces n premiers chiffres $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont les mêmes que ceux de x .

En effet, on a $y < 10 \cdot 10^b = 10^{b+1}$, donc

$$|y - x| \cdot 10^{n-1-b} = r \cdot y \cdot 10^{n-1-b} < 10^{-n} \cdot 10^{b+1} \cdot 10^{n-1-b} = 1 \ .$$

Démonstration de (i) Il suffit alors de remarquer que

$$a_0 a_1 \ldots a_{n-1}, a_n \ldots - 1 = y \cdot 10^{n-1-b} - 1 < x \cdot 10^{n-1-b} <$$

$$< y \cdot 10^{n-1-b} + 1 = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}, a_n \ldots + 1 \ .$$

Démonstration de (ii) Dans ce cas si $y \leqslant x$, on a

$$a_0 a_1 \ldots a_{n-1} = y \cdot 10^{n-1-b} \leqslant x \cdot 10^{n-1-b} < y \cdot 10^{n-1-b} + 1 = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} + 1$$

tandis que si $y \geqslant x$, il vient

$$a_0 a_1 \ldots a_{n-1} - 1 = y \cdot 10^{n-1-b} - 1 < x \cdot 10^{n-1-b} \leqslant y \cdot 10^{n-1-b} = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \ .$$

□

EXEMPLE 1 Dans (i) le nombre de chiffres exacts ne peut pas être amélioré. L'erreur relative faite en approximant 5 par $4,6$ est $\frac{0,4}{4,6} < 10^{-1}$ et aucun chiffre n'est exact ! La condition $a_{n-1} \neq 9$ ne peut pas être supprimée puisque, en approximant $5,02$ par $4,98$, on fait une erreur relative de $\frac{0,04}{4,98} < 10^{-2}$.

REMARQUE 1 Si les n premiers chiffres de y coïncident avec ceux de x , l'erreur relative est $\leqslant 10^{-(n-1)}$.

EXEMPLE 2 Nous allons estimer l'erreur faite en approximant $\sqrt[p]{a}$ à l'aide des x_k définis dans la théorème 5.6, 111. Posons

$$y_k := \frac{a}{x_k^{p-1}} \ .$$

Puisque $(x_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante, le lemme 5.6, p. 111, montre que $\left(x_k^{p-1}\right)_{k\geqslant 1}$ est aussi décroissante, donc que $(y_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante. On a

$$y_k = \frac{a}{x_k^{p-1}} \leqslant \frac{a}{\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}} = \sqrt[p]{a} \ .$$

Le théorème 5.3, p. 102, montre alors que $(y_k)_{k\geqslant 1}$ est convergente et que

$$(\lim_k y_k)^p = \lim_k y_k^p = \lim_k \frac{a^p}{x^{p(p-1)}{}_k} = \frac{a^p}{a^{p-1}} = a \ .$$

Par l'unicité on obtient $\lim_k y_k = \sqrt[p]{a}$. Ainsi on a

$$\frac{a}{x_k^{p-1}} \leqslant \sqrt[p]{a} \leqslant x_k \quad , \quad 0 \leqslant x_k - \sqrt[p]{a} \leqslant x_k - \frac{a}{x_k^{p-1}}$$

et

$$\lim_k \left(x_k - \frac{a}{x_k^{p-1}} \right) = 0 \ .$$

Posons

$$r_k := \frac{x_k - \sqrt[p]{a}}{x_k} \ .$$

On a $r_k \in [0,1[$ et

$$\sqrt[p]{a} = (1 - r_k) \cdot x_k = (1 - r_{k+1}) \cdot x_{k+1} \ ,$$

donc

$$\frac{1 - r_k}{1 - r_{k+1}} = \frac{x_{k+1}}{x_k} = 1 - \frac{x_k^p - a}{p \cdot x_k^p} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{\left(\sqrt[p]{a}\right)^p}{p \cdot x_k^p} = 1 + \frac{1}{p} \cdot \left[(1 - r_k)^p - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \left[(1 - r_k)^p + p - 1\right] \ ,$$

et par suite

$$r_{k+1} = 1 - \frac{p \cdot (1 - r_k)}{(1 - r_k)^p + p - 1} = \frac{(1 - r_k)^p + p \cdot r_k - 1}{(1 - r_k)^p + p - 1} \ .$$

Considérons le cas particulier $p = 2$. Il vient alors

$$r_{k+1} = \frac{(1 - r_k)^2 + 2 \cdot r_k - 1}{(1 - r_k)^2 + 1} = \frac{r_k^2}{(1 - r_k)^2 + 1} \leqslant r_k^2 \ .$$

REMARQUE 2 Ceci montre qu'en général on double le nombre de chiffres exacts en effectuant une itération supplémentaire. En effet si l'on a atteint une erreur relative plus petite que 10^{-n} , on a au moins $n - 1$ chiffres exacts, et en refaisant une itération supplémentaire on a une erreur relative plus petite que 10^{-2n} , donc au moins $2n - 1 \geqslant 2(n - 1)$ chiffres exacts.

REMARQUE 3 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $r_{k+1} \leqslant \frac{p}{2} \cdot r_k^2$.

5.8 Convergence dans un produit

LEMME *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *, on a*

$$\max(a, b) \leqslant a + b, \sqrt{a^2 + b^2} \ ,$$

$$a + b \leqslant 2 \cdot \max(a, b) \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant \sqrt{2} \cdot \max(a, b) \ .$$

C'est immédiat. □

THEOREME *Soient* X, Y *des espaces métriques. Pour qu'une suite* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $X \times Y$ *soit convergente pour l'une des métrique* d_1 *,* d_2 *ou* d_∞ *, il faut et il suffit que les suites* $(\mathrm{pr}_1(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathrm{pr}_2(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ *soient convergentes dans* X *respectivement dans* Y *.*

Dans ce cas, on a

$$\mathrm{pr}_j(\lim_k z_k) = \lim_k \mathrm{pr}_j(z_k) \quad j = 1, 2 \ .$$

Si l'on écrit $z_k = (x_k, y_k)$ *, ce la signifie que*

$$\lim_k (x_k, y_k) = (\lim_k x_k, \lim_k y_k) \ .$$

En désignant par $d_{X\times Y}$ la métrique considérée sur $X \times Y$, la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $X \times Y$ si, et seulement si, il existe un $z \in X \times Y$ tel que $(d_{X\times Y}(z_k, z))_{k\in\mathbb{N}}$ soit une zéro-suite. Mais cela est équivalent à l'existence d'un couple $(x, y) \in X \times Y$ tel que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers x et y respectivement. En effet, si $z = (x, y)$, le lemme montre que l'on a

$$\max(d(x_k, x), d(y_k, y)) \leqslant d_{X\times Y}(z_k, z) \leqslant 2 \cdot \max(d(x_k, x), d(y_k, y)) \ .$$

Ainsi $(d_{X\times Y}(z_k, z))_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite si, et seulement si, $(d(x_k, x))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d(y_k, y))_{k\in\mathbb{N}}$ sont des zéro-suites par la proposition 5.4, (ii) et (iii). □

REMARQUE Ce théorème montre que la notion de convergence dans $X \times Y$ ne dépend pas de la métrique d_1 , d_2 ou d_∞ choisie. Nous la désignerons par $d_{X\times Y}$. Nous étudierons ces faits de manière plus approfondie dans le chapitre Espaces normés et topologie (cf. 10.13).

COROLLAIRE *Pour qu'une suite* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{C}$ *soit convergente, il faut et il suffit que les suites* $(\mathrm{Re}\, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathrm{Im}\, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *soient convergentes dans* $\mathbb{R}$ *.*

Dans ce cas, on a

$$\mathrm{Re}(\lim_k z_k) = \lim_k \mathrm{Re}\, z_k \quad , \quad \mathrm{Im}(\lim_k z_k) = \lim_k \mathrm{Im}\, z_k$$

et

$$\lim_k z_k = \lim_k \mathrm{Re}\, z_k + i \cdot \lim_k \mathrm{Im}\, z_k \ .$$

C'est immédiat, puisque dans la représentation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on a

$$z = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z) \ .$$

On peut aussi le démontrer en utilisant le calcul avec les limites dans $\mathbb{C}$ et les formules adéquates de 4.13. $\square$

EXERCICE Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'application

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est continue, $X \times X$ étant muni de l'une des métrique d_1 , d_2 ou d_∞ (cf. exercice 5.2.2).

5.9 Convergence dans $\mathbb{R}_+$

PROPOSITION *Soit* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente de* $\mathbb{C}$ *. Si* $z_k \in \mathbb{R}$ *respectivement* $z_k \in \mathbb{R}_+$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *, alors* $\lim_k z_k \in \mathbb{R}$ *respectivement* $\lim_k z_k \in \mathbb{R}_+$ *.*

En effet $\operatorname{Im} z_k = 0$, donc $\operatorname{Im}(\lim_k z_k) = \lim_k \operatorname{Im} z_k = 0$. Ceci prouve la première partie. Dans le second cas, on a $z := \lim_k z_k \in \mathbb{R}$. Si $z < 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|z_n - z| \leqslant -\frac{z}{2} \ ,$$

puisque $-\frac{z}{2} > 0$. On en déduit que

$$z_n \leqslant z - \frac{z}{2} = \frac{z}{2} < 0 \ ,$$

ce qui est absurde. □

COROLLAIRE *Soient* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *des suites convergentes de* $\mathbb{R}$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$ *.*

(i) *Si l'on a*

$$x_k \leqslant y_k \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

alors

$$\lim_k x_k \leqslant \lim_k y_k \ .$$

(ii) *Si l'on a*

$$a \leqslant x_k \leqslant b \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

alors

$$a \leqslant \lim_k x_k \leqslant b \ .$$

En effet, on a $y_k - x_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\lim_k y_k - \lim_k x_k = \lim_k (y_k - x_k) \geqslant 0 \ .$$

Pour la seconde partie, il suffit de considérer les suites constantes définies par a et b . □

EXEMPLE 1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt[p]{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ est strictement décroissante et une zéro-suite.

Tout d'abord, si $\frac{1}{\sqrt[p]{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[p]{k+1}}$, alors $\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{k}}\right)^p \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt[p]{k+1}}\right)^p = \frac{1}{k+1}$ par le lemme 5.6, p. 111, ce qui est absurde. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt[p]{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ est donc strictement décroissante et elle est minorée par 0 . Elle est donc convergente par le théorème 5.3, p. 102, et on a

$$\lim_k \frac{1}{\sqrt[p]{k}} \geqslant 0 \ .$$

Mais comme

$$\left(\lim_k \frac{1}{\sqrt[p]{k}}\right)^p = \lim_k \frac{1}{k} = 0 \ ,$$

et que 0 est l'unique racine p-ième $\geqslant 0$ de 0 , on en déduit le résultat. □

EXEMPLE 2 Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{k} > 0$, mais $\lim_k \frac{1}{k} = 0$. Cet exemple montre que l'on n'a pas en général $\lim_k x_k < \lim_k y_k$ si $x_k < y_k$ pour tout k .

5.10 Sous-suites

DEFINITION Une application strictement croissante $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, i.e. telle que $\alpha(l+1) > \alpha(l)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$, est dite une *sous-suite de* $\mathbb{N}$.

Une sous-suite est aussi notée sous la forme $l \longmapsto k_l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour indiquer que l'on indexe certains éléments de $\mathbb{N}$. On a $k_{l+1} > k_l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un ensemble X , alors l'application

$$l \longmapsto x_{\alpha(l)} : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

est dite une *sous-suite de* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et sera notée $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ ou $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$.

PROPOSITION *Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans un espace métrique X , alors toute sous-suite $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et*

$$\lim_l x_{\alpha(l)} = \lim_k x_k \ .$$

C'est évident en prenant, pour tout $\varepsilon > 0$, le même $N(\varepsilon)$, puisque $\alpha(l) \geqslant l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Cette dernière assertion se démontre par récurrence. On a évidemment $\alpha(0) \geqslant 0$, puis

$$\alpha(l+1) > \alpha(l) \geqslant l \ ,$$

donc $\alpha(l+1) \geqslant l+1$. □

LEMME

(i) *Toute partie non-vide A de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.*

(ii) *Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors il existe une sous-suite α ou $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ telle que*

$$A = \alpha(\mathbb{N}) = \{k_l \mid l \in \mathbb{N}\} \ .$$

Démonstration de (i) Comme A est non-vide, soit $n \in A$ et posons

$$B := \{a \in A \mid a \leqslant n\} \ .$$

L'ensemble B est non-vide et fini, donc $\min B$ existe par la proposition 4.8, p. 79. D'autre part, pour tout $a \in A \setminus B$, on a $a > n$, donc $a > \min B$, et par suite $\min A = \min B$.

Démonstration de (ii) Par récurrence on peut définir

$$\alpha(0) := \min A \quad \text{et} \quad \alpha(l+1) := \min\left(A \setminus \{\alpha(j) \mid 0 \leqslant j \leqslant l\}\right) \ ,$$

car $A \setminus \{\alpha(j) \mid 0 \leqslant j \leqslant l\} \neq \emptyset$, puisque A est infinie. On montre immédiatement par récurrence que

$$\{\alpha(j) \mid 0 \leqslant j \leqslant l\} = \{a \in A \mid a \leqslant \alpha(l)\} \ ;$$

en particulier $\alpha(l+1) > \alpha(l)$, donc $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une sous-suite de $\mathbb{N}$.

On a évidemment $\alpha(\mathbb{N}) \subset A$. Montrons l'autre inclusion. Si $a \in A$, soit

$$l_a := \max\{j \in \mathbb{N} \mid \alpha(j) \leqslant a\} \ .$$

On a évidemment $\alpha(l_a) \leqslant a$ par définition de l_a . Mais si $\alpha(l_a) < a$, on a

$$a \in A \setminus \{\alpha(j) \mid 0 \leqslant j \leqslant l_a\} \ ,$$

donc $\alpha(l+1) \leqslant a$, ce qui contredit la définition de l . Ainsi $\alpha(l) = a$. □

COROLLAIRE *Toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ contient une sous-suite monotone, i.e. croissante ou décroissante.*

Soit

$$A := \{k \in \mathbb{N} \mid x_l \leqslant x_k \text{ pour tout } l \geqslant k\} \ .$$

Si A est une partie infinie, soit α la sous-suite énumérant A . Il est alors clair que $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Si A est finie, posons

$$\alpha(0) := 1 + \max A \ .$$

On a $\alpha(0) \notin A$; il existe donc un indice $\alpha(1) \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha(1) \geqslant \alpha(0)$ et $x_{\alpha(1)} > x_{\alpha(0)}$. Cette dernière relation montre que $\alpha(1) > \alpha(0)$. De même comme $\alpha(1) \notin A$, il existe $\alpha(2) \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha(2) > \alpha(1)$ et $x_{\alpha(2)} > x_{\alpha(1)}$ et ainsi de suite. On obtient donc par récurrence une sous-suite $\left(x_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, ce qui finit de prouver le corollaire. □

5.11 Théorème de Bolzano-Weierstraß

DEFINITION 1 Une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ est dite *bornée* si la suite $(|z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée.

THEOREME *Toute suite bornée $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ contient une sous-suite convergente.*

Comme

$$|\mathrm{Re}\, z_k| \ , \ |\mathrm{Im}\, z_k| \leqslant |z_k|$$

les suites réelles $(\mathrm{Re}\, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées. D'autre part le corollaire 6.1 nous permet d'extraire une sous-suite monotone $\left(\mathrm{Re}\, z_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ de $(\mathrm{Re}\, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, puis une sous-suite monotone $\left(\mathrm{Im}\, z_{\alpha\circ\beta(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\left(\mathrm{Im}\, z_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$. Les suites

$$\left(\mathrm{Re}\, z_{\alpha\circ\beta(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\mathrm{Im}\, z_{\alpha\circ\beta(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

étant monotones et bornées, sont convergentes par le théorème 5.3, p. 102, ce qui montre que

$$\left(z_{\alpha\circ\beta(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

est convergente par le théorème 5.8, p. 116. —————————— $\square$

DEFINITION 2 On dit qu'un point x d'un espace métrique X est un *point d'accumulation* d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X , s'il existe une sous-suite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers x .

REMARQUE 1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme donc que toute suite bornée de $\mathbb{C}$ possède un point d'accumulation.

REMARQUE 2 La proposition 5.10 montre que toute suite convergente ne possède qu'un point d'accumulation : sa limite.

EXERCICE 1 Soient $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers z .

(b) La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, et z est le seul point d'accumulation de cette suite.

(c) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid |z_k - z| \geqslant \varepsilon\}$ est fini.

EXERCICE 2 Soit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ une suite bornée. On suppose qu'il existe un $z \in \mathbb{C}$, tel que pour tout sous-suite *convergente* (z_{k_l}) de (z_k) on ait

$$\lim_l z_{k_l} = z \ .$$

Montrer que (z_k) est convergente et que

$$\lim_k z_k = z \; .$$

5.12 Suites de Cauchy

Notre but est de trouver un critère permettant d'affirmer la convergence d'une suite d'un espace métrique sans connaître explicitement sa limite.

DEFINITION 1 Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique X s'appelle une *suite de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_X(x_k, x_l) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k, l \geqslant N \ .$$

Cette définition est justifiée par la proposition suivante montrant que c'est une condition nécessaire de convergence.

PROPOSITION *Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans un espace métrique X , alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

En effet, si $x := \lim_k x_k$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_X(x_k, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } k \geqslant N \ .$$

On a alors

$$d_X(x_k, x_l) \leqslant d_X(x_k, x) + d_X(x, x_l) \leqslant d_X(x_k, x) + d_X(x_l, x) \leqslant \varepsilon$$

pour tout $k, l \geqslant N$. □

DEFINITION 2 On dit qu'un espace métrique X est *complet* si toute suite de Cauchy dans X est convergente (vers un élément de X).

THEOREME (Critère de Cauchy) *$\mathbb{C}$ est un espace métrique complet, i.e. pour qu'une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ soit convergente, il faut et il suffit que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy.*

La nécessité a été prouvée dans la proposition. Réciproquement, si $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, montrons tout d'abord qu'elle est bornée. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|z_k - z_l| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } k, l \geqslant n \ ,$$

donc

$$|z_k| \leqslant |z_k - z_n| + |z_n| \leqslant 1 + |z_n| \quad \text{pour tout } k \geqslant n \ .$$

On a alors

$$|z_k| \leqslant \max\left(\{|z_l| \mid 0 \leqslant l < n\} \cup \{1 + |z_n|\}\right) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une sous-suite $\left(z_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ convergente vers $z \in \mathbb{C}$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|z_k - z_l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } k, l \geqslant M_1$$

et

$$\left|z_{\alpha(m)} - z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } m \geqslant M_2 \ .$$

Posons $N := \max(M_1, M_2)$. On a $\alpha(N) \geqslant \alpha(M_j) \geqslant M_j$ pour $j = 1, 2$, ainsi que $k \geqslant M_1$ pour tout $k \geqslant N$. Il vient alors

$$|z_k - z| = \left|z_k - z_{\alpha(N)} + z_{\alpha(N)} - z\right| \leqslant \left|z_k - z_{\alpha(N)}\right| + \left|z_{\alpha(N)} - z\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant N \ ,$$

ce qui prouve que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers z . □

COROLLAIRE $\mathbb{R}$ *est un espace métrique complet.*

En effet si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, c'est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Elle converge donc dans $\mathbb{C}$, et par suite dans $\mathbb{R}$ par la proposition 5.9, p. 118. □

EXEMPLE $\mathbb{Q}$ est un espace métrique qui n'est pas complet.

Nous savons par exemple que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie dans le théorème 5.6, p. 111, en prenant $p = a = 2$ est formée de nombres rationnels. Comme cette suite converge dans $\mathbb{C}$ vers $\sqrt{2}$ c'est une suite de Cauchy par le critère de Cauchy. Mais c'est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, puisque $\mathbb{Q}$ est muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{C}$. Elle n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$; en effet dans le cas contraire soit $\lim_k x_k =: x \in \mathbb{Q}$. Mais $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x dans $\mathbb{C}$ et par l'unicité de la limite (théorème 5.2), on obtient $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. □

EXERCICE Démontrer ou réfuter les assertions suivantes :

(a) Pour tout $a < b$, il existe une suite de Cauchy $(x_k) \subset [a, b[$ qui ne converge pas dans $[a, b[$.

(b) Il existe une suite de Cauchy $(x_k) \subset \mathbb{R}$, ayant $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ comme sous-suite, mais qui ne soit par une zéro-suite.

(c) Pour tout $a < b$ l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est complet pour la métrique induite par celle de $\mathbb{R}$.

(d) Toute suite ayant exactement un point d'accumulation est convergente.

5.13 Suite de Fibonacci

DEFINITION On définit une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ par récurrence en posant

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \ .$$

On dit que c'est la *suite de Fibonacci* .

Les premiers termes de cette suite sont :

$$1 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 5 \quad , \quad 8 \quad , \quad 13 \quad , \quad 21 \quad , \quad 34 \quad , \quad 55 \quad , \ldots \ .$$

Posons

$$x_k := \frac{a_k}{a_{k+1}} \ .$$

On a

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} = \frac{1}{1 + a_k/a_{k+1}} = \frac{1}{1+x_k} \ .$$

Les premiers termes de cette suite sont alors :

$$1 \quad , \quad \frac{1}{2} = 0,5 \quad , \quad \frac{2}{3} = 0,66\ldots \quad , \quad \frac{3}{5} = 0,6 \quad , \quad \frac{5}{8} = 0,625 \quad , \quad \frac{8}{13} = 0,615\ldots \quad ,$$

$$\frac{13}{21} = 0,619\ldots \quad , \quad \frac{21}{34} = 0,617\ldots \quad , \quad \frac{34}{55} = 0,618\ldots \quad .$$

Si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, en posant $x := \lim_k x_k$, on a $x \geqslant 0$ et

$$x = \lim_k x_{k+1} = \lim_k \frac{1}{1+x_k} = \frac{1}{1+x} \ ,$$

donc

$$x^2 + x - 1 = 0 \ .$$

On en déduit que $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ et par suite que $\left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Comme $x \geqslant 0$, il vient finalement

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803\ldots$$

On dit que c'est la *section d'or* .

Pour montrer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, nous allons prouver que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

(a) Montrons tout d'abord par récurrence que

$$\frac{1}{2} \leqslant x_k \leqslant 1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

Le cas $k = 0$ est clair. Quant au pas de récurrence, on a

$$x_{k+1} = \frac{1}{1+x_k} \left\{ \begin{array}{l} \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \leqslant 1 \\ \\ \geqslant \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \ .$$

(b) Pour tout $k \geqslant l$, on a alors

$$|x_k - x_l| = |x_k - x_{k-1} + x_{k-1} \mp \ldots + x_{l+1} - x_l| \leqslant \sum_{j=l}^{k-1} |x_{j+1} - x_j|$$

et

$$|x_{j+1} - x_j| = \left| \frac{1}{1+x_j} - \frac{1}{1+x_{j-1}} \right| = \frac{|x_j - x_{j-1}|}{(1+x_j)\cdot(1+x_{j-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x_j - x_{j-1}|}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{9} \cdot |x_j - x_{j-1}| \ .$$

(c) On en déduit que

$$|x_{j+1} - x_j| \leqslant \frac{4}{9} \cdot |x_j - x_{j-1}| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot |x_{j-1} - x_{j-2}| \leqslant$$

$$\leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^j \cdot |x_1 - x_0| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^j \ ,$$

donc

$$|x_k - x_l| \leqslant \sum_{j=l}^{k-1} |x_{j+1} - x_j| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=l}^{k-1} \left(\frac{4}{9}\right)^j = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^l \cdot \sum_{j=0}^{k-l-1} \left(\frac{4}{9}\right)^j =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^l \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{k-l}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{10} \cdot \left[\left(\frac{4}{9}\right)^l - \left(\frac{4}{9}\right)^k \right] \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^l \ .$$

Comme, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$\left(\frac{4}{9}\right)^l \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } l \geqslant N$$

par l'exemple 5.3.4, p. 102, on obtient

$$|x_k - x_l| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k, l \geqslant N \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

EXERCICE 1 Montrer que la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 := 0 \quad , \quad x_1 := 1 \quad \text{et} \quad x_{k+1} := \frac{1}{2} \cdot (x_k + x_{k-1}) \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

est une suite de Cauchy et calculer sa limite en écrivant x_k sous forme d'une somme téléscopique.

EXERCICE 2 Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_k := \sum_{l=k+1}^{2k} \frac{1}{l}$$

est convergente en calculant $x_{k+1} - x_k$.

EXERCICE 3 Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_k := \sum_{l=1}^{2k} (-1)^l \cdot \frac{l}{l+1}$$

est convergente en calculant $x_{k+1} - x_k$.