Chapitre 17

INTÉGRALE DE LEBESGUE SUR UNE SOUS-VARIÉTÉ ET THÉORÈME DE LA DIVERGENCE

Dans tout ce qui suit X est une sous-variété avec bord dans $\mathbb{R}^n$ de dimension m .

Version du 23 février 2006

17.1 Intégrale de Lebesgue sur un sous-espace affine

Essayons tout d'abord de motiver l'introduction de l'intégrale de Lebesgue sur X en considérant un exemple simple.

Soient E un sous-espace affine de dimension m de $\mathbb{R}^n$, $b \in E$ et $\vartheta : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application affine telle que $(\vartheta e_j - b)_{j=1,\ldots,m}$ soit une base orthonormée du sous-espace vectoriel $E - b$ pour le produit scalaire induit par celui de $\mathbb{R}^n$. C'est évidemment un paramétrage régulier de E et $\vartheta - b$ est un isomorphisme de la structure euclidienne (espace de Hilbert) de $\mathbb{R}^m$ sur celle de $E - b$. Il est donc naturel de définir l' *intégrale de Lebesgue* λ_E sur E par

$$\lambda_E := \vartheta(\lambda^m) \ .$$

Nous allons montrer que cela ne dépend pas du choix de ϑ , et plus généralement on a la

PROPOSITION *Soit $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage régulier de E . Alors*

$$\lambda_E = \gamma\left(\left\{\det\left[D\gamma(u)^\intercal D\gamma(u)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U\right) \ .$$

En particulier si γ est un isomorphisme euclidien de $\mathbb{R}^m$ sur E , alors $\gamma(\lambda^m) = \lambda_E$.

Le corollaire 13.5 montre qu'il existe un difféomorphisme $\gamma_\vartheta : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tel que $\gamma = \vartheta \circ \gamma_\vartheta$. Remarquons que U est un ouvert sans bord de dimension m . Comme $D\gamma(u) = \vartheta D\gamma_\vartheta(u)$, puisque ϑ est linéaire, il vient

$$\left[\det D\gamma_\vartheta(u)\right]^2 = \det\left[D\gamma_\vartheta(u)^\intercal D\gamma_\vartheta(u)\right] = \det\left[D\gamma_\vartheta(u)^\intercal \vartheta^\intercal \vartheta D\gamma_\vartheta(u)\right] = \det\left[D\gamma(u)^\intercal D\gamma(u)\right] \ ,$$

puisque ϑ conserve le produit scalaire, i.e. $\vartheta^\intercal \vartheta = \mathrm{Id}$. Par la formule du changement de variables 16.5, on a alors $\lambda^m = \gamma_\vartheta(\det D\gamma_\vartheta \cdot \lambda_U)$, donc

$$\lambda_E = \gamma\left(\left\{\det\left[D\gamma(u)^\intercal D\gamma(u)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U\right)$$

par l'exercice 16.10.2. En particulier si γ est un isomorphisme euclidien de $\mathbb{R}^m$ sur E , alors γ_ϑ est une transformation orthogonale dans $\mathbb{R}^m$, donc de déterminant 1 , et par suite $\gamma(\lambda^m) = \lambda_E$.

□

EXEMPLE Dans la décomposition $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\lambda^{n+1} = \lambda \otimes \lambda^n = \int \lambda_x^n \, d\lambda(x)$$

où λ_x^n est l'intégrale de Lebesgue sur l'hyperplan $\{x\} \times \mathbb{R}^n$.

Il suffit de revenir aux définitions (cf. 16.3). □

17.2 Intégrale de Lebesgue sur une sous-variété

Ce qui précède nous conduit à poser la

DEFINITION 1 Soit $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage régulier local de X . Pour tout $k, l = 1, \ldots, m$ on considère les fonctions

$$g_{k,l}^{\gamma} : U \longrightarrow \mathbb{R} : u \longmapsto \left(D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) e_k \middle| e_l \right) = \left(\partial_k \gamma(u) \middle| \partial_l \gamma(u) \right) \ .$$

L'application

$$G := \left(g_{k,l}^{\gamma}\right) : u \longmapsto D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) = \left(g_{k,l}^{\gamma}(u)\right) : U \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times m)$$

s'appelle le *tenseur métrique* relatif au paramétrage γ . En outre on pose

$$g^{\gamma}(u) := \det D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) = \det G(u)$$

et on dit que c'est le *déterminant de Gram* relatif au paramétrage γ .

Soient $x = \gamma(u) \in X$ et $(\varepsilon_j)_{j=1,\ldots,m}$ une base orthonormée de $T_X(x)$. Ecrivons $\partial_k \gamma(u) = \sum_{l=1}^{m} c_{k,j} \cdot \varepsilon_j$; il vient alors

$$g^{\gamma}(u) = \det \left(\left(\partial_k \gamma(u) \middle| \partial_l(u) \right)_{k,l} \right) = \det \left(\sum_{j=1}^{m} c_{k,j} c_{l,j} \right) = \det (c_{k,j})^{\intercal} (c_{k,j}) =$$

$$= \left|\det (c_{k,j})\right|^2 = \lambda_{T_X(x)} \left(P\left[\partial_1 \gamma(u), \ldots, \partial_n \gamma(u)\right]\right)^2 > 0$$

d'après l'exemple 16.6.2. Nous avons donc prouvé le

LEMME *On a* $G(u) = D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) \in \mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(m)$ *et*

$$\left[g^{\gamma}(u)\right]^{\frac{1}{2}} = \lambda_{T_X(x)} \left(P\left[\partial_1 \gamma(u), \ldots, \partial_m \gamma(u)\right]\right) > 0 \ .$$

Par analogie avec la situation de la remarque 16.6, on dit que

DEFINITION 2 $[g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}}$ est l' *élément de volume* de X relatif au paramétrage γ .

PROPOSITION *Si* $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $\vartheta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sont des paramétrages réguliers locaux de* X *telles que* $\gamma(U) = \vartheta(V)$ *, alors*

$$\gamma\left([g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U\right) = \vartheta\left(\left[g^{\vartheta}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_V\right) \ .$$

En effet le corollaire 13.5 montre qu'il existe un difféomorphisme $\gamma_{\vartheta} : U \longrightarrow V$ tel que $\gamma = \vartheta \circ \gamma_{\vartheta}$. On a donc $D\gamma(u) = D\vartheta(\gamma_{\vartheta}(u)) D\gamma_{\vartheta}(u)$ et par suite

$$D\gamma(u)^{\intercal} D\gamma(u) = D\gamma_{\vartheta}(u)^{\intercal} D\vartheta(\gamma_{\vartheta}(u))^{\intercal} D\vartheta(\gamma_{\vartheta}(u)) D\gamma_{\vartheta}(u) \ ,$$

ce qui montre que

$$g^{\gamma} = g^{\vartheta} \circ \gamma_{\vartheta} \cdot (\det D\gamma_{\vartheta})^2 \ .$$

Ainsi

$$\gamma\left([g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_U\right)=\vartheta\left(\gamma_{\vartheta}\left(|\det D\gamma_{\vartheta}|\cdot[g^{\vartheta}]^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_U\right)\right)=\vartheta\left([g^{\vartheta}]^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_V\right)$$

d'après l'exercice 16.10. $\square$

THEOREME *Il existe une unique intégrale de Radon λ_X sur X telle que, pour tout paramétrage régulier local $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de X , on ait*

$$(\lambda_X)_{\gamma(U)}=\gamma\left([g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_U\right)\ .$$

Comme $\mathbb{R}^n$ possède une base dénombrable, il en est de même de X . Il existe donc une suite $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de paramétrages réguliers locaux $\gamma_k : U_k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de X tels que

$$X=\bigcup\gamma_k(U_k)\ .$$

En posant

$$A_k:=\gamma_k(U_k)\smallsetminus\bigcup_{j=0}^{k-1}\gamma_j(U_j)\ ,$$

il n'est alors pas difficile de vérifier que

$$\lambda_X:=\sum_{k=0}^{\infty}1_{A_k}\cdot\gamma_k\left([g^{\gamma_k}]^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_{U_k}\right)$$

est une intégrale de Radon sur X et qu'elle satisfait à la formule. L'unicité en découle. $\square$

REMARQUE 1 Pour tout ouvert non-vide O de X , on a $\lambda_X(O)>0$.

Il suffit de revenir grâce aux définitions à l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ où cette propriété est bien connue. $\square$

REMARQUE 2 Le bord ∂X est un ensemble λ_X-négligeable.

Cela découle immédiatement de la formule définissant λ_X , puisque chaque ∂U_k est une partie λ_{U_k}-négligeable. $\square$

REMARQUE 3 Il existe souvent un paramétrage régulier local γ de X tel que $X\smallsetminus\gamma(U)$ soit une partie λ_X-négligeable. Dans ce cas on a

$$\lambda_X=\gamma\left([g^{\gamma}]^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_U\right)\ .$$

La condition se vérifie souvent en utilisant l'exemple suivant.

REMARQUE 4 Si Y est une sous-variété (avec bord) de dimension $< m$ de $\mathbb{R}^n$ avec $Y\subset X$, alors Y est λ_X-négligeable.

EXEMPLE Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J^\circ \neq \emptyset$ et $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière (cf. exemple 13.6.4). La courbe $\gamma(J)$ est donc une sous-variété de dimension 1 . On a

$$D\gamma^\intercal D\gamma = (\gamma' | \gamma') = |\gamma'|^2 \ ,$$

donc

$$[g^\gamma]^{\frac{1}{2}} = |\gamma'| \ .$$

On retrouve ainsi la notion de longueur d'une courbe (cf. définition 11.2.2 et théorème 11.2, p. 374). Pour tout $a, b \in J$ tels que $a < b$, on a

$$\lambda_{\gamma(J)}(\gamma([a,b])) = \int_a^b |\gamma'| = L \ .$$

17.3 L'intégrale de Lebesgue sur le bord

LEMME *Soient $(v_j)_{j=1,\ldots,m}$ une base d'un sous-espace vectoriel T de dimension m de $\mathbb{R}^n$, $\widetilde{T}$ le sous-espace vectoriel de dimension $m-1$ engendré par $(v_j)_{j=2,\ldots,m}$ et $w \in T$ tel que $|w| = 1$ et $w \perp \widetilde{T}$. Alors*

$$\lambda_T \left(P\left[v_1, \ldots, v_m\right]\right) = \left|\left(v_1 \middle| w\right)\right| \cdot \lambda_{\widetilde{T}} \left(P\left[v_2, \ldots, v_m\right]\right) \ .$$

On se ramène évidemment au cas $T = \mathbb{R}^m$ et $\widetilde{T} = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Fubini, puisque chaque coupe horizontale est un translaté de $P\left[v_2, \ldots, v_m\right]$. □

REMARQUE $\left|\left(v_1 \middle| w\right)\right|$ est la hauteur du parallélotope $P\left[v_1, \ldots, v_m\right]$ de base $P\left[v_2, \ldots, v_m\right]$.

COROLLAIRE *Soient U un ouvert (avec bord) de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$ et $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage régulier local de X . On a*

$$\left[g^\gamma (0, \cdot)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\partial_1 \gamma (0, \cdot) \middle| \mathfrak{n} \circ \gamma^\partial\right) \cdot \left[g^{\gamma^\partial}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \textit{sur } U^\partial \ .$$

Cela découle immédiatement du lemme 17.2 et de la proposition 13.7.i. □

EXEMPLE Détermination de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{S}^{n-1}(r)$

Nous utilisons les notations de l'exemple 13.6.2. Déterminons tout d'abord la normale extérieure à $\mathbb{B}^n(r)$ en $x \in \mathbb{S}^{n-1}(r)$. Il suffit de considérer la fonction

$$\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|^2 \ ,$$

puisque $\mathbb{B}^n(r) = \{\delta \leqslant r^2\}$. On a

$$\operatorname{grad} \delta (x) = 2 \cdot x \ ,$$

donc

$$\mathfrak{n}(x) = \frac{x}{|x|} \ .$$

Déterminons maintenant l'élément de "surface" sur $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ à l'aide du paramétrage γ_n . Comme

$$\partial_1 \gamma_n (r, \cdot) = \Phi_n (1, \cdot) = \frac{x}{|x|}$$

(cf. exemple 13.2.4), il vient

$$\left(\partial_1 \gamma (r, \cdot) \middle| \mathfrak{n} \circ \gamma (r, \cdot)\right) = \left(\frac{x}{|x|} \middle| \frac{x}{|x|}\right) = 1 \ ,$$

et par suite

$$\left[g^{\gamma_n^\partial}(\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[g^{\gamma_n}(r,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\right]^{\frac{1}{2}} = \det D\Phi_n(u) \ ,$$

donc

$$\left[g^{\gamma_n^\partial}(\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\right]^{\frac{1}{2}} = r^{n-1}\cdot\cos^{n-2}\varphi_n\cdot\cos^{n-3}\varphi_{n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\ \varphi_3 \ .$$

Ceci montre que

$$\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} = r^{n-1}\cdot\gamma_n^\partial\left(\lambda_{]-\pi,\pi[}\otimes\bigotimes_{j=3}^n\cos^{j-2}\cdot\lambda_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)$$

ou bien

$$d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x) = r^{n-1}\cdot\cos^{n-2}\varphi_n\cdot\cos^{n-3}\varphi_{n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\ \varphi_3\, d(\varphi_2,\ldots,\varphi_n) \ .$$

En particulier la surface de cette sphère est

$$r^{n-1}\cdot\int_{]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^{n-2}}\cos^{n-2}\varphi_n\cdot\cos^{n-3}\varphi_{n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\ \varphi_3\, d(\varphi_2,\ldots,\varphi_n) = \frac{2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot r^{n-1} \ .$$

La formule de changement de variables de l'exemple 16.6.5 montre que

THEOREME *On a*

$$\lambda^n = \int_0^\infty \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}\, dr \ .$$

Le résultat suivant nous sera utile théoriquement par la suite.

PROPOSITION *Soient U un ouvert (avec bord) de $\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^{m-1}$ et $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage régulier local de X . On a*

$$\mathfrak{n}\circ\gamma^\partial = \left|D\gamma(0,\cdot)\,G(0,\cdot)^{-1}e_1\right|^{-1}\cdot D\gamma(0,\cdot)\,G(0,\cdot)^{-1}e_1 \ ,$$

ainsi que

$$g^\gamma(\alpha,\cdot) = \left|D\gamma(0,\cdot)\,G(0,\cdot)^{-1}e_1\right|^{-2}\cdot g^{\gamma^\partial} \ .$$

En effet le vecteur du membre de droite est normé et, pour tout $w\in U^\partial$, on a

$$\left(D\gamma G^{-1}e_1\middle|\, D\gamma e_j\right)(0,w) = \left(D\gamma^\intercal D\gamma G^{-1}e_1\middle|\, e_j\right)(0,w) = (e_1|\, e_j) \ ,$$

d'où la première assertion par la proposition 13.7.i. Il vient alors

$$|(\partial_1\gamma(0,w)|\,\mathfrak{n}(\gamma_\partial(w)))| = \left(D\gamma e_1\middle|\left|D\gamma G^{-1}e_1\right|^{-1}\cdot D\gamma G^{-1}e_1\right)(0,w) =$$

$$= \left|D\gamma(0,w)\,G(0,w)^{-1}e_1\right|^{-1} \ .$$

□

17.4 Partition de l'unité

PROPOSITION *Soit Y un espace métrique. Pour qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ soit continue, il faut et il suffit que $f \circ \gamma$ soit continue pour toute paramétrisation régulière locale de X .*

C'est immédiat puisqu'un paramétrage régulier est un homéomorphisme sur un ouvert de X . $\square$

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est *continûment dérivable* si $f \circ \gamma$ est continûment dérivable pour tout paramétrage régulier local de X .

REMARQUE Il suffit pour la continuité, comme pour la dérivabilité, de ne considérer au voisinage de chaque point qu'un seul paramétrage régulier. Cela découle évidemment du corollaire 13.5.

EXEMPLE Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant X et $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continûment dérivable, alors $f_{|X}$ est continûment dérivable.

Nous allons maintenant construire ce que l'on appelle une partition de l'unité continûment dérivable sur X . Nous l'obtiendrons par restriction à X d'une telle partition sur $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION 2 Pour tout ouvert X de $\mathbb{R}^n$, désignons par $\mathcal{D}(X)$ l'ensemble des fonctions sur X qui sont indéfiniment dérivables et à support compact.

Par exemple en définissant $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \\ & \text{si} \\ 0 & \end{cases} \begin{array}{c} |x| < 1 \\ \\ |x| \geqslant 1 \end{array} ,$$

on a $\rho \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R})$.

La fonction σ définie par

$$\sigma(x) := \sum_{z \in \mathbb{Z}} \rho(x - z) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est indéfiniment dérivable et > 0 sur $\mathbb{R}$, car la somme contient au voisinage de chaque point au plus trois termes non-identiquement nuls.

PROPOSITION *Posons $\rho_1 := \frac{\rho}{\sigma}$. On a*

$$\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad et \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}} \rho_1(\cdot - z) = 1 \ .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbb{Z}^n$, définissons $\rho_{\varepsilon,z} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\rho_{\varepsilon,z}(x) := \prod_{j=1}^{n} \rho_1\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot x_j - z_j\right) \ .$$

On a

$$\rho_{\varepsilon,z} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \subset \varepsilon \cdot (z + [-1,1]^n) \quad et \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \rho_{\varepsilon,z} = 1 \ .$$

Cette somme contient au voisinage de chaque point au plus $2^n + 1$ termes non-identiquement nuls.

La première partie est immédiate. Pour la seconde il suffit de constater que

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^{n} \rho_1\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot x_j - z_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{z_j\in\mathbb{Z}} \rho_1\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot x_j - z_j\right) = 1 \ .$$

□

DEFINITION On dit que $\left(\rho_{\varepsilon,z}\right)_{z\in\mathbb{Z}^n}$ est une *partition de l'unité* indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^n$.

Il est souvent possible de ramener l'étude d'une fonction f sur X à une étude locale en écrivant

$$f = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \rho_{\varepsilon,z|X} \cdot f \ .$$

Le choix de ε se fait en général grâce au

LEMME *Soit X un espace métrique, K une partie compacte de X et $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de K . Alors il existe $\varepsilon > 0$ (**nombre de Lebesgue**) tel que, pour toute partie $A \subset X$ telle que $\operatorname{diam}(A) \leqslant \varepsilon$ et $A \cap K \neq \emptyset$, on ait $A \subset U_j$ pour un certain $j \in J$.*

Pour tout $x \in K$, il existe $j(x) \in J$ et $\delta(x) > 0$ tels que $B(x, \delta(x))^\circ \subset U_{j(x)}$. La famille $\left(B\left(x, \frac{1}{2} \cdot \delta(x)\right)^\circ\right)_{x\in K}$ est évidemment un recouvrement ouvert de K , donc contient un sous-recouvrement fini $\left(B\left(x_k, \frac{1}{2} \cdot \delta(x_k)\right)^\circ\right)_{k=1,\ldots,N}$. Posons $\varepsilon := \min_{k=1,\ldots,N} \frac{1}{2} \cdot \delta(x_k)$. Si A satisfait au hypothèses du lemme, soit $x \in A \cap K$ et k tel que $x \in B\left(x_k, \frac{1}{2} \cdot \delta(x_k)\right)^\circ$. Pour tout $y \in A$, il vient alors

$$d(y, x_k) \leqslant d(y, x) + d(x, x_k) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \frac{1}{2} \cdot \delta(x_k) \leqslant \delta(x_k) \ ,$$

ce qui prouve que

$$A \subset B(x_k, \delta(x_k)) \subset U_{j(x_k)} \ .$$

□

17.5 Le gradient

LEMME *Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application continûment dérivable, $x \in X$ et $\mathfrak{t} \in T_X(x) \smallsetminus \{0\}$.*

Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $J^\circ \neq \emptyset$ et toute courbe paramétrée continûment dérivable

$$\vartheta : J \longrightarrow X \quad \text{telle que } 0 \in J \quad , \quad \vartheta(0) = x \quad , \quad \vartheta'(0) = \mathfrak{t} \quad \text{et} \quad \vartheta(J) \subset X \ ,$$

le vecteur $(f \circ \vartheta)'(0) \in \mathbb{R}^p$ ne dépend pas de ϑ , seulement de f , x et $\mathfrak{t}$.

En effet, si $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un paramétrage régulier local de X au voisinage de $x = \gamma(u)$, il existe un unique $\xi \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathfrak{t} = D\gamma(u)\,\xi$. D'autre part la proposition 13.5 montre qu'il existe une application continûment dérivable $\vartheta_\gamma : [0, \varepsilon[\longrightarrow U$ telle que $\vartheta = \gamma \circ \vartheta_\gamma$. Il vient alors $\mathfrak{t} = \vartheta'(0) = D\gamma(u)\,\vartheta_\gamma'(0)$, ce qui prouve que $\xi = \vartheta_\gamma'(0)$. On a alors

$$(f \circ \vartheta)'(0) = D(f \circ \gamma)(u)\,\vartheta_\gamma'(0) = D(f \circ \gamma)(u)\,\xi \ ,$$

d'où notre assertion. □

Ce lemme nous permet de poser la

DEFINITION 1 Le vecteur

$$\partial_{\mathfrak{t}} f(x) := (f \circ \vartheta)'(0)$$

s'appelle la *dérivée* de f en x *dans la direction* $\mathfrak{t}$.

Il décrit la variation de f dans la direction $\mathfrak{t}$, i.e. le long de chaque courbe paramétrée ϑ convenable.

THEOREME *Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et $x \in X$. Il existe un unique vecteur tangent $\mathfrak{s} \in T_X(x)$ tel que*

$$\partial_{\mathfrak{t}} f(x) = (\mathfrak{s}|\,\mathfrak{t}) \quad \text{pour tout } \mathfrak{t} \in T_X(x) \ .$$

L'unicité est immédiate, car si $\mathfrak{s}, \tilde{\mathfrak{s}} \in T_X(x)$ sont tels que $(\mathfrak{s}|\,\mathfrak{t}) = \partial_{\mathfrak{t}} f(x) = (\tilde{\mathfrak{s}}|\,\mathfrak{t})$, on a $(\mathfrak{s} - \tilde{\mathfrak{s}}|\,\mathfrak{t}) = 0$ pour tout $\mathfrak{t} \in T_X(x)$, donc $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{s}}$. Pour prouver l'existence considérons un paramétrage régulier local γ de X en $x = \gamma(u)$. Comme dans le lemme, étant donné $\mathfrak{t} \in T_X(x)$, soit $\xi \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathfrak{t} = D\gamma(u)\,\xi$ et utilisant la formule démontrée, on a

$$\partial_{\mathfrak{t}} f(x) = D(f \circ \gamma)(u)\,\xi = (\operatorname{grad}(f \circ \gamma)(u)|\,\xi) =$$

$$= \left(D\gamma(u)^\intercal\, D\gamma(u)\, \overset{-1}{G}(u) \operatorname{grad}(f \circ \gamma)(u) \middle|\, \xi \right) =$$

$$= \left(D\gamma(u)\, \overset{-1}{G}(u) \operatorname{grad}(f \circ \gamma)(u) \middle|\, \mathfrak{t} \right) \ ,$$

puisque $D\gamma(u)^{\intercal} \circ D\gamma(u) \in \mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(m)$ d'après le lemme 17.2. Notre assertion en découle car

$$D\gamma(u) \overset{-1}{G}(u) \operatorname{grad}(f \circ \gamma)(u) \in T_X(x) \ .$$

□

Ce théorème nous permet de poser la

DEFINITION 2 On appelle *gradient* de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ en x , noté $\operatorname{grad}_X f(x)$, l'unique vecteur tangent en x tel que

$$\partial_{\mathfrak{t}} f(x) = (\operatorname{grad}_X f(x)|\, \mathfrak{t}) \quad \text{pour tout } \mathfrak{t} \in T_X(x) \ .$$

REMARQUE 1 $\operatorname{grad}_X f(x)$ indique la direction dans laquelle f a la croissance maximale.

REMARQUE 2 Pour tout paramétrage régulier local γ de X , on a

$$(\operatorname{grad}_X f) \circ \gamma = D\gamma \overset{-1}{G} \operatorname{grad}(f \circ \gamma) \ .$$

Ceci montre en particulier que

$$\operatorname{grad}_X f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est une application continue.

REMARQUE 3 Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant X et $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ est continûment dérivable, alors

$$\operatorname{grad}_X f(x) = P_x \operatorname{grad} f(x) \ .$$

La notation $\operatorname{grad}_X f$ désigne évidemment le gradient de la restriction de f à X ! Utilisant la représentation locale ci-dessus on obtient

$$(\operatorname{grad}_X f) \circ \gamma = D\gamma \overset{-1}{G} \operatorname{grad}(f \circ \gamma) = D\gamma \overset{-1}{G} (Df \circ \gamma D\gamma)^{\intercal} = D\gamma \overset{-1}{G} D\gamma^{\intercal} (\operatorname{grad} f) \circ \gamma \ ,$$

d'où le résultat par la remarque 13.7.d. □

PROPOSITION (Règle du produit) *Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables. Pour tout $x \in X$ et $\mathfrak{t} \in T_X(x)$, on a*

$$\partial_{\mathfrak{t}}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \partial_{\mathfrak{t}} g(x) + \partial_{\mathfrak{t}} f(x) \cdot g(x) \ .$$

En particulier

$$\operatorname{grad}_X(f \cdot g) = f \cdot \operatorname{grad}_X g + \operatorname{grad}_X f \cdot g \ .$$

C'est immédiat en utilisant la définition de $\partial_{\mathfrak{t}}$, puis le théorème. □

17.6 La divergence

DEFINITION 1 Nous désignerons par $\mathcal{K}^{(1)}(X)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables et à support compact.

Notre but est de définir la notion de divergence sur une sous-variété X et de prouver une formule généralisant le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral :

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

(lemme (ii) ci-dessous et théorème de la divergence 17.7), ainsi que la formule d'intégration par parties (proposition 17.7). Le cas particulier

$$\int \partial\varphi \cdot \psi \, d\lambda_J = -\int \varphi \cdot \partial\psi \, d\lambda_J \qquad \text{pour tout } \varphi, \psi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$$

montrant que l'opérateur de dérivation est anti-symétrique est généralisé dans le lemme (i) ci-dessous : div est l'anti-transposé de grad . Cette propriété est prise comme définition de la divergence sur une sous-variété (théorème ci-dessous).

LEMME *Soient*

$$Q = \left]a_1, 0\right] \times \prod_{j=2}^m \left]a_j, b_j\right[\ ,$$

un pavé ouvert dans $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$ *et* $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *une fonction continûment dérivable.*

(i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(Q^\circ)$ *, on a*

$$\int \varphi \cdot \operatorname{div} f \ d\lambda_Q = -\int (\operatorname{grad}\varphi | f) \ d\lambda_Q \ .$$

(ii) Si f *est à support compact dans* Q *, on a*

$$\int \operatorname{div} f \ d\lambda_Q = \int (f(b_1, \cdot) | e_1) \ d\lambda_{Q^\partial} \ .$$

Démonstration de (i) Soient $Q_1 = Q^\partial \subset \mathbb{R}^{m-1}$ et pour $j = 2, \ldots, m$

$$Q_j := \left]a_1, 0\right] \times \prod_{k=2, k\neq j}^m \left]a_k, b_k\right[\subset \mathbb{R}^{m-1} \ .$$

Nous désignerons par $du_{\widehat{j}}$ l'intégration par rapport aux variables différentes de u_j . Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(Q^\circ)$, on a alors

$$\int \varphi \cdot \operatorname{div} f \ d\lambda_Q = \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \left(\int_{a_j}^{b_j} \varphi(u) \cdot \partial_j f_j(u) \ du_j \right) du_{\widehat{j}} =$$

$$= \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \left(\Big[\varphi(u) \cdot f_j(u) \Big]_{u_j = a_j}^{b_j} - \int_{a_j}^{b_j} \partial_j \varphi(u) \cdot f_j(u) \ du_j \right) du_{\widehat{j}} =$$

$$= -\int \left(\sum_{j=1}^{m} \partial_j \varphi \cdot f_j \right) d\lambda_Q = -\int (\operatorname{grad} \varphi | \, f) \; d\lambda_Q \; .$$

Démonstration de (ii) Si maintenant f est à support compact dans Q , on obtient

$$\int \operatorname{div} f \; d\lambda_Q = \sum_{j=1}^{m} \int_{Q_j} \left(\int_{a_j}^{b_j} \partial_j f_j \,(u) \; du_j \right) du_{\widehat{j}} = \sum_{j=1}^{m} \int_{Q_j} \left(\Big[f_j \,(u) \Big]_{u_j = a_j}^{b_j} \right) du_{\widehat{j}} =$$

$$= \int_{Q^\partial} f_1 \,(0, \tilde{u}) \; d\tilde{u} = \int (\, f \,(0, \cdot) | \, e_1) \; d\lambda_{Q^\partial} \; .$$

□

La première formule caractérise la divergence. Elle va nous permettre d'introduire la notion de divergence sur la sous-variété X de manière naturelle. C'est la seconde formule qui généralise le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

DEFINITION 2 Nous dirons qu'une application $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un *champ de vecteurs tangents* (à X) si $v\,(x) \in T_X\,(x)$ pour tout $x \in X$.

EXEMPLE Si f est une fonction continûment dérivable sur X , alors $\operatorname{grad}_X f$ est un champ continu de vecteurs tangents.

DEFINITION 3 Nous dirons que la sous-variété X est de *classe* $\mathcal{C}^{(2)}$ si, au voisinage de chaque point de X , il existe un paramétrage régulier qui soit deux fois continûment dérivable.

Dans tout ce qui suit X est une sous-variété avec bord de classe $\mathcal{C}^{(2)}$.

THEOREME *Soit $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ continûment dérivable de vecteurs tangents. Il existe une unique fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\int \varphi \cdot f \; d\lambda_X = -\int (\operatorname{grad}_X \varphi | \, v) \; d\lambda_X \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}\,(X \smallsetminus \partial X) \; .$$

Prouvons d'abord l'unicité. Si f, g sont de telles fonctions, on a

$$\int \varphi \cdot (f - g) \, d\lambda_X = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}\,(X \smallsetminus \partial X) \; .$$

Puisque $X \smallsetminus \partial X$ est dense dans X , il nous suffit de montrer que $f - g = 0$ sur $X \smallsetminus \partial X$. Sinon il existe un ouvert non-vide U de $X \smallsetminus \partial X$ tel que $f - g > 0$ sur U . Mais comme il existe un ouvert W dans $\mathbb{R}^n$ tel que $U = W \cap (X \smallsetminus \partial X)$ et une fonction $\psi \in \mathcal{D}_+\,(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi \neq 0$ et $\operatorname{supp} \psi \subset W$, il suffit de prendre $\varphi := \psi_{|U}$ pour obtenir une contradiction à l'aide de la remarque 17.2.1.

Prouvons maintenant l'existence localement. Soit $\gamma : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage régulier local deux fois continûment dérivable, où Q est un pavé ouvert dans $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$, ce que l'on peut supposer. Si $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(\gamma(Q^\circ))$, par la remarque 17.5.2 et le lemme (i) on a

$$-\int (\operatorname{grad}_X \varphi | v) \ d\lambda_X = -\int \left(D\gamma \overset{-1}{G} \operatorname{grad}(\varphi \circ \gamma) \middle| v \circ \gamma \right) \cdot [g^\gamma]^{\frac{1}{2}} \ d\lambda_Q =$$

$$= -\int \left(\operatorname{grad}(\varphi \circ \gamma) \middle| [g^\gamma]^{\frac{1}{2}} \cdot \overset{-1}{G} D\gamma^\intercal (v \circ \gamma) \right) \ d\lambda_Q =$$

$$= \int \varphi \circ \gamma \cdot \operatorname{div} \left([g^\gamma]^{\frac{1}{2}} \cdot \overset{-1}{G} D\gamma^\intercal (v \circ \gamma) \right) d\lambda_Q =$$

$$= \int \varphi \cdot f_\gamma \, d\lambda_X \ ,$$

en ayant définit f_γ sur $\gamma(Q)$ par

$$f_\gamma \circ \gamma = [g^\gamma]^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{div} \left([g^\gamma]^{\frac{1}{2}} \cdot \overset{-1}{G} D\gamma^\intercal (v \circ \gamma) \right) \ .$$

Cette fonction est continue, puisque γ est un homéomorphisme de Q sur $\gamma(Q)$.

Si $\vartheta : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un autre paramétrage du même type, l'unicité montre que l'on a $f_\gamma = f_\vartheta$ sur la sous-variété $\gamma(Q) \cap \vartheta(R)$. Ceci nous permet de définir une fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_{|\gamma(Q)} = f_\gamma$. Il nous reste à prouver que f satisfait à la propriété pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(X \smallsetminus \partial X)$. Comme l'ensemble des $\gamma(Q)$, γ parcourant les paramétrages réguliers locaux de X deux fois continûment dérivables définis sur un pavé ouvert dans $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$, est un recouvrement ouvert de X , soit $\varepsilon > 0$ le nombre de Lebesgue (cf. lemme 17.4) associé à $\operatorname{supp} \varphi$ et la métrique $|\cdot|_\infty$. Si J désigne l'ensemble fini des $z \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$\operatorname{supp} \rho_{\varepsilon,z} \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset \ ,$$

pour tout $x \in \operatorname{supp} \varphi$, on a $\operatorname{supp} (\rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi) \subset \gamma_z(Q_z) \smallsetminus \partial X$ pour un certain $\gamma_z : Q_z \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et

$$\sum_{z \in J} \rho_{\varepsilon,z}(x) = 1 \ .$$

Puisque $\rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(\gamma_z(Q_z{}^\circ))$, nous pouvons utiliser la formule ci-dessus et il vient

$$\int \varphi \cdot f \ d\lambda_X = \sum_{z \in J} \int \rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi \cdot f_{\gamma_z} \ d\lambda_X =$$

$$= -\sum_{z \in J} \int \left(\operatorname{grad}_X (\rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi) \middle| v \right) \ d\lambda_X = -\int (\operatorname{grad}_X \varphi | v) \ d\lambda_X \ ,$$

car

$$\sum_{z \in J} \operatorname{grad}_X (\rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi) = \operatorname{grad}_X \left(\sum_{z \in J} \rho_{\varepsilon,z} \cdot \varphi \right) = \operatorname{grad}_X \varphi \ .$$

□

Le théorème précédent nous permet de poser la

DEFINITION 4 On appelle *divergence* de v l'unique fonction continue sur X , que l'on note $\operatorname{div}_X v$, telle que

$$\int \varphi \cdot \operatorname{div}_X v \ d\lambda_X = -\int (\operatorname{grad}_X \varphi | v) \ d\lambda_X \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(X \smallsetminus \partial X) \ .$$

REMARQUE Pour tout paramétrage régulier local deux fois continûment dérivable γ de X , on a

$$(\operatorname{div}_X v) \circ \gamma = [g^\gamma]^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{div} \left([g^\gamma]^{\frac{1}{2}} \cdot \overset{-1}{G} D\gamma^\intercal (v \circ \gamma) \right) \ .$$

PROPOSITION (Règle du produit) *Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ continûment dérivable de vecteurs tangents. Alors*

$$\operatorname{div}_X (f \cdot v) = f \cdot \operatorname{div}_X v + (\operatorname{grad}_X f | \, v) \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)} (X \smallsetminus \partial X)$, grâce à la règle du produit 17.5, on a

$$- \int (\operatorname{grad}_X \varphi | \, f \cdot v) \ d\lambda_X = - \int (f \cdot \operatorname{grad}_X \varphi | \, v) \ d\lambda_X =$$

$$= - \int (\operatorname{grad}_X (f \cdot \varphi) - \varphi \cdot \operatorname{grad}_X f | \, v) \ d\lambda_X = \int \varphi \cdot [f \cdot \operatorname{div}_X v + (\operatorname{grad}_X f | \, v)] \ d\lambda_X \ ,$$

d'où la formule par définition de la divergence. □

17.7 Théorème de la divergence

THEOREME (de la divergence ou d'Ostrogradzky) *Soit $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ continûment dérivable et à support compact de vecteurs tangents à X . On a alors*

$$\int \operatorname{div}_X v \, d\lambda_X = \int (v|\,\mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} \ .$$

Avec les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 17.6, mais en remplaçant $\operatorname{supp}\varphi$ par $\operatorname{supp} v$, et en utilisant le théorème 17.2, la remarque 17.6, le lemme 17.6.ii et la proposition 17.3, on peut écrire

$$\int \operatorname{div}_X v \, d\lambda_X = \sum_{z\in J} \int \operatorname{div}_X \left(\rho_{\varepsilon,z} \cdot v\right) \, d\lambda_X \underset{\text{Th. 17.2}}{=} \sum_{z\in J} \int \operatorname{div}_X \left(\rho_{\varepsilon,z} \cdot v\right) \circ \gamma_z \cdot \left[g^{\gamma_z}\right]^{\frac{1}{2}} \, d\lambda_{Q_z} =$$

$$\underset{\text{Rem. 17.6}}{=} \sum_{z\in J} \int \operatorname{div} \left(\left[g^{\gamma_z}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \overset{-1}{G_z} D\gamma_z^{\intercal} \left(\rho_{\varepsilon,z} \cdot v\right) \circ \gamma_z \right) d\lambda_{Q_z} =$$

$$\underset{\text{Lem. 17.6.ii}}{=} \sum_{z\in J} \int \left(\left[g^{\gamma_z}(0,\cdot)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot G_z(0,\cdot)^{-1} D\gamma_z(0,\cdot)^{\intercal} \left(\rho_{\varepsilon,z} \cdot v\right) \circ \gamma_z(0,\cdot) \middle|\, e_1 \right) d\lambda_{Q_z^{\partial}} \underset{\text{Prop. 17.3}}{=}$$

$$= \sum_{z\in J} \int \left(\left(\rho_{\varepsilon,z} \cdot v\right) \circ \gamma_z \middle| \left|D\gamma(0,\cdot)\, G(0,\cdot)^{-1} e_1\right|^{-1} \cdot D\gamma_z(0,\cdot)\, G_z(0,\cdot)^{-1} e_1 \right) \cdot \left[g^{\gamma_z^{\partial}}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_{Q_z^{\partial}} =$$

$$\underset{\text{Prop. 17.3}}{=} \sum_{z\in J} \int \left(\left(\rho_{\varepsilon,z} \cdot v\right) \circ \gamma_z^{\partial} \middle|\, \mathfrak{n} \circ \gamma_z^{\partial} \right) \cdot \left[g^{\gamma_z^{\partial}}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_{Q_z^{\partial}} =$$

$$\underset{\text{Th. 17.2}}{=} \sum_{z\in J} \int \left(\rho_{\varepsilon,z} \cdot v |\, \mathfrak{n}\right) \ d\lambda_{\partial X} = \int (v|\,\mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} \ .$$

□

PROPOSITION (Intégration par parties) *Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ continûment dérivable de vecteurs tangents tels que $f \cdot v$ soit à support compact. On a alors*

$$\int f \cdot \operatorname{div}_X v \, d\lambda_X = \int (f \cdot v|\,\mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} - \int (\operatorname{grad}_X f|\, v) \ d\lambda_X \ .$$

Grâce à la règle du produit 17.6, on a

$$\int f \cdot \operatorname{div}_X v \, d\lambda_X = \int \operatorname{div}_X (f \cdot v) \, d\lambda_X - \int (\operatorname{grad}_X f|\, v) =$$

$$= \int (f \cdot v|\,\mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} - \int (\operatorname{grad}_X f|\, v) \ d\lambda_X \ .$$

□

DEFINITION On définit le *laplacien* d'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable par

$$\Delta_X f := \operatorname{div}_X \operatorname{grad}_X f \ .$$

THEOREME (Formule de Green) *Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions deux fois continûment dérivables telles que $f \cdot g$ soit à support compact. Alors*

$$\int (\Delta_X f \cdot g - f \cdot \Delta_X g) \ d\lambda_X = \int (\partial_{\mathfrak{n}} f \cdot g - f \cdot \partial_{\mathfrak{n}} g) \ d\lambda_{\partial X} \ .$$

En effet la formule d'intégration par parties montre que

$$\int (\Delta_X f \cdot g - f \cdot \Delta_X g) \ d\lambda_X = \int (g \cdot \operatorname{grad}_X f | \, \mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} - \int (f \cdot \operatorname{grad}_X g | \, \mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} =$$

$$= \int (\partial_{\mathfrak{n}} f \cdot g - f \cdot \partial_{\mathfrak{n}} g) \ d\lambda_{\partial X} \ .$$

□

17.8 Théorème de Gauß

Dans ce qui suit,
X est une sous-variété fermée avec bord de $\mathbb{R}^n$ de dimension n et de classe $\mathcal{C}^{(2)}$
et
$v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continûment dérivable.

THEOREME *On a*

$$\partial X = X \setminus X^\circ = \operatorname{Fr} X \ ,$$

et si v *est à support compact, alors*

$$\int \operatorname{div} v \ d\lambda_X = \int (v|\, \mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} \ .$$

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continûment dérivable telle que* $f \cdot v$ *soit à support compact, on a également la formule d'intégration par parties*

$$\int f \cdot \operatorname{div} v \ d\lambda_X = \int (f \cdot v|\, \mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} - \int (\operatorname{grad} f|\, v) \ d\lambda_X \ .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème et de la proposition 17.7. □

EXEMPLE 1 Si X est compact, le théorème de Gauss appliqué à $\operatorname{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ montre que

$$\lambda^n(X) = \int \frac{1}{n} \cdot \operatorname{div} \operatorname{id} \ d\lambda_X = \frac{1}{n} \cdot \int (\operatorname{id}|\, \mathfrak{n}) \ d\lambda_{\partial X} \ ,$$

puisque $\operatorname{div} \operatorname{id} = n$. En utilisant l'exemple 17.3, on obtient en particulier

$$\lambda^n(\mathbb{B}^n(r)) = \frac{1}{n} \cdot \int \left(x \left| \frac{x}{|x|} \right. \right) d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}(x) = \frac{r}{n} \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \ .$$

EXEMPLE 2 **Principe d'Archimède** Considérons un corps X plongé dans un liquide de densité c , dont la surface se trouve à la hauteur 0 .

Le liquide exerce en $x \in \partial X$ une pression

$$p(x) = c \cdot x_3 \cdot \mathfrak{n}(x)$$

puisque $x_3 < 0$. La force résultante totale est donc

$$F = \int p \ d\lambda_{\partial X} \ .$$

Il vient alors

$$(e_j|\, F) = \int (e_j|\, p) \ d\lambda_{\partial X} = c \cdot \int (x_3 e_j|\, \mathfrak{n}(x)) \ d\lambda_{\partial X}(x) =$$

$$= c \cdot \int \operatorname{div}_X (x_3 \cdot e_j) \, d\lambda_X (x) = \begin{cases} c \cdot \lambda^3 (X) & \\ & \text{si} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} j = 3 \\ \\ j \neq 3 \end{matrix} ,$$

puisque

$$\operatorname{div}_X (x_3 \cdot e_j) = \begin{cases} 1 & \\ & \text{si} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} j = 3 \\ \\ j \neq 3 \end{matrix} .$$

Ainsi

$$F = c \cdot \lambda^3 (X) \cdot e_3 ,$$

ce qui montre que, quelle que soit la profondeur à laquelle se trouve le corps, il subit une poussée vers le haut égale au poids du liquide déplacé.

EXEMPLE 3 Avec les hypothèses du théorème et si $x \in X^\circ$, on a

$$\operatorname{div} v (x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\lambda^n (\mathbb{B}^n (x, \varepsilon))} \cdot \int \operatorname{div} v \, d\lambda_{\mathbb{B}^n (x,\varepsilon)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\lambda^n (\mathbb{B}^n (x, \varepsilon))} \cdot \int (v | \mathfrak{n}) \; d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1} (x,\varepsilon)}$$

L'intégrale $\int (v | \mathfrak{n}) \; d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1} (x,\varepsilon)}$ s'appelle le *flux* de v sortant de $\mathbb{B}^n (x, \varepsilon)$. La limite du membre de droite représente donc la densité de flux sortant du point x , ce qui permet d'interpréter $\operatorname{div} v (x)$ comme l'intensité de la source en x qui crée v .

Ceci permet de mieux comprendre l'une des équations de Maxwell

$$\rho = \operatorname{div} (\varepsilon E) \ ,$$

où ρ est la densité de charge électrique, E le champ électrique et ε la matrice diélectrique. Sous forme intégrale on obtient le théorème de Gauss

$$\int \rho \; d\lambda_X = \int (\varepsilon E | \mathfrak{n}) \; d\lambda_{\partial X} \ ,$$

i.e. le flux de l'induction (ou déplacement) électrique sortant d'une surface fermée ∂X est égal à la charge totale contenue dans X .

COROLLAIRE (Théorème du gradient) *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable à support compact. On a alors*

$$\int \operatorname{grad} f \; d\lambda_X = \int f \cdot \mathfrak{n} \; d\lambda_{\partial X} \ .$$

Si $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, pour tout $j = 1, \ldots, n$, considérons le champ constant de vecteurs tangents $x \longmapsto e_j : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Il vient

$$\int (\operatorname{grad} f | e_j) \; d\lambda_X = \int (f \cdot e_j | \mathfrak{n}) \; d\lambda_{\partial X} - \int f \cdot \operatorname{div} e_j \, d\lambda_X (x) = \int f \cdot (\mathfrak{n} | e_j) \; d\lambda_{\partial X} \ ,$$

par la formule d'intégration par parties. $\square$

17.9 Rotationnel et produit vectoriel

Dans ce qui suit,
X est une sous-variété fermée avec bord de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 et de classe $\mathcal{C}^{(2)}$
et
$v : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continûment dérivable.

On est amené à considérer la matrice anti-symétrique suivante :

$$Dv - Dv^{\intercal} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 & 0 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

DEFINITION 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$a \wedge b := \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

On dit que c'est le *produit vectoriel* de a et b .

On vérifie immédiatement que l'on a

$$a \wedge b = -b \wedge a \perp a, b \quad \text{et} \quad |a \wedge b| = \lambda^2 \left(P\left[a, b\right]\right) \ ,$$

ainsi que les formules pour $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$\left(a \wedge b \middle| c\right) = \left(a \middle| b \wedge c\right) \quad \text{et} \quad a \wedge (b \wedge c) = (a| c) \cdot b - (a| b) \cdot c \ .$$

Avec ces notations, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\left(Dv - Dv^{\intercal}\right) \xi = \operatorname{rot} v \wedge \xi \quad \text{et} \quad \left(\operatorname{rot} v \middle| \xi\right) = \operatorname{div}\left(v \wedge \xi\right) \ ,$$

où (cf. exemple 11.6)

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

THEOREME (du rotationnel) *Si v est à support compact, alors*

$$\int \operatorname{rot} v \; d\lambda_X = \int \mathfrak{n} \wedge v \; d\lambda_{\partial X} \ .$$

Soit $(e_j)_{j=1,2,3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour $j = 1, 2, 3$, le théorème de Gauss montre alors que

$$\int \left(\operatorname{rot} v \middle| e_j\right) d\lambda_X = \int \operatorname{div}\left(v \wedge e_j\right) d\lambda_X = \int \left(\mathfrak{n} \middle| v \wedge e_j\right) d\lambda_{\partial X} = \int \left(\mathfrak{n} \wedge v \middle| e_j\right) d\lambda_{\partial X} \ .$$

$\square$

Dans ce qui suit,
X est une sous-variété fermée avec bord de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 et de classe $\mathcal{C}^{(2)}$,
W un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant X
et
$v : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application continûment dérivable.

LEMME *Il existe localement une normale à X dans $\mathbb{R}^3$ en $x \in X$, i.e. à l'espace tangent $T_X(x)$, normalisée et dépendant continûment de x .*

Si $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage régulier au voisinage de x , on peut la définir à l'aide de

$$u \longmapsto [g^\gamma(u)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_1\gamma(u) \wedge \partial_2\gamma(u) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 .$$

REMARQUE 1 Attention cette normale est définie à un signe près et il ne faut pas la confondre avec la normale extérieure $\mathfrak{n}(x)$ à ∂X en $x \in \partial X$.

DEFINITION 2 S'il existe une application continue $\nu : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\nu(x) \perp T_X(x)$ et $|v(x)| = 1$ pour tout $x \in X$, on dit que X est *orientable* et que ν définit une *orientation* sur X .

EXEMPLE 1 $\mathbb{S}^2(r)$ et $\mathbb{S}^2_+(r)$ sont des surface orientables (cf. exemples 13.6, 2 et 3). Comme orientation, on peut prendre

$$\nu : x \longmapsto \frac{x}{r} .$$

Le ruban de Möbius n'est pas orientable.

DEFINITION 3 Si X est orientée à l'aide de ν , on définit un champ de vecteurs tangents normalisés à ∂X par

$$\tau : \partial X \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x \longmapsto \nu(x) \wedge \mathfrak{n}(x) \in T_{\partial X}(x) .$$

Remarquons que ∂X est une sous-variété sans bord de dimension 1 .

THEOREME (Formule de Stokes) *Si $v_{|X}$ est à support compact, alors*

$$\int (v|\,\tau)\ d\lambda_{\partial X} = \int (\operatorname{rot} v|\,\nu)\ d\lambda_X .$$

Remarquons que $v_{|X} \wedge \nu$ est un champ de vecteurs tangents à X . Par le théorème de la divergence 17.7, on a alors

$$\int (v|\,\tau)\ d\lambda_{\partial X} = \int (v|\,\nu \wedge \mathfrak{n})\ d\lambda_{\partial X} = \int (v \wedge \nu|\,\mathfrak{n})\ d\lambda_{\partial X} = \int \operatorname{div}_X(v \wedge \nu) .$$

Localement on a

$$(v \wedge \nu) \circ \gamma = [g^\gamma]^{-\frac{1}{2}} \cdot v \circ \gamma \wedge (\partial_1\gamma \wedge \partial_2\gamma) = [g^\gamma]^{-\frac{1}{2}} \cdot [(v \circ \gamma|\,\partial_2\gamma) \cdot \partial_1\gamma - (v \circ \gamma|\,\partial_1\gamma) \cdot \partial_2\gamma] ,$$

donc

$$[\operatorname{div}_X (v \wedge \nu)] \circ \gamma = [g^\gamma]^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{div} \left(\overset{-1}{G} D\gamma \left[(v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \cdot \partial_1 \gamma - (v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \cdot \partial_2 \gamma \right]^{\intercal} \right) .$$

Mais

$$D\gamma^{\intercal} = \begin{pmatrix} \partial_1 \gamma \\ \partial_2 \gamma \end{pmatrix} ,$$

donc

$$\overset{-1}{G} D\gamma \left[(v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \cdot \partial_1 \gamma - (v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \cdot \partial_2 \gamma \right]^{\intercal} =$$

$$= \overset{-1}{G} \begin{pmatrix} (v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \cdot (\partial_1 \gamma | \, \partial_1 \gamma) - (v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \cdot (\partial_1 \gamma | \, \partial_2 \gamma) \\ (v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \cdot (\partial_2 \gamma | \, \partial_1 \gamma) - (v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \cdot (\partial_2 \gamma | \, \partial_2 \gamma) \end{pmatrix} =$$

$$= \overset{-1}{G} G \begin{pmatrix} (v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \\ -(v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \\ -(v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \end{pmatrix} .$$

On en déduit que

$$\operatorname{div} \left(\overset{-1}{G} D\gamma \left[(v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \cdot \partial_1 \gamma - (v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \cdot \partial_2 \gamma \right] t \right) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} (v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \\ -(v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \end{pmatrix} =$$

$$= \partial_1 \left[(v \circ \gamma | \, \partial_2 \gamma) \right] - \partial_2 \left[(v \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma) \right] =$$

$$= (\partial_1 [v \circ \gamma] | \, \partial_2 \gamma) + (v \circ \gamma | \, \partial_1 \partial_2 \gamma) - (\partial_2 [v \circ \gamma] | \, \partial_1 \gamma) - (v \circ \gamma | \, \partial_2 \partial_1 \gamma) =$$

$$= (\partial_1 [v \circ \gamma] | \, \partial_2 \gamma) - (\partial_2 [v \circ \gamma] | \, \partial_1 \gamma) = (Dv \circ \gamma \partial_1 \gamma | \, \partial_2 \gamma) - (Dv \circ \gamma \partial_2 \gamma | \, \partial_1 \gamma) =$$

$$= (Dv \circ \gamma \partial_1 \gamma | \, \partial_2 \gamma) - (\partial_2 \gamma | \, Dv^{\intercal} \circ \gamma \partial_1 \gamma) =$$

$$= ((Dv - Dv^{\intercal}) \circ \gamma \partial_1 \gamma | \, \partial_2 \gamma) = ((\operatorname{rot} v) \circ \gamma \wedge \partial_1 \gamma | \, \partial_2 \gamma) =$$

$$= (\operatorname{rot} v | \, \partial_1 \gamma \wedge \partial_2 \gamma) ,$$

et par suite que

$$[\operatorname{div}_X (v \wedge \nu)] \circ \gamma = [g^\gamma]^{-\frac{1}{2}} \cdot ((\operatorname{rot} v) \circ \gamma | \, \partial_1 \gamma \wedge \partial_2 \gamma) = ((\operatorname{rot} v) \circ \gamma | \, \nu \circ \gamma) ,$$

d'où le résultat. □

Dans ce qui suit,
X est une sous-variété fermée avec bord de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 et de classe $\mathcal{C}^{(2)}$
W un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant X
et
$v : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application continûment dérivable.

REMARQUE 2 On peut considérér X comme une sous-variété orientable dans $\mathbb{R}^3$ grâce à l'orientation constante $\nu := e_3$.

COROLLAIRE (Formule de Riemann) *Si $v_{|X}$ est à support compact, alors*

$$\int (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \, d\lambda_X = \int (v | \, \tau) \, d\lambda_{\partial X} .$$

C'est immédiat par la formule de Stokes en posant $v_3 := 0$, puisque

$$(\operatorname{rot} v |\, v) = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \ .$$

□

REMARQUE 3 Si $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un paramétrage régulier local de ∂X compatible avec l'orientation de X choisie ci-dessus, on a $\tau \circ \gamma = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$, donc

$$\int_{\gamma(J)} (v|\, \tau)\ d\lambda_{\partial X} = \int_J \left(v \circ \gamma \left| \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right.\right) \cdot |\gamma'| = \int_J (v(\gamma(t))|\, \gamma'(t))\ dt =$$

$$= \int_J [P(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + Q(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)]\ dt \ ,$$

en écrivant

$$v : (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)) \ .$$

On écrit souvent la formule de Riemann sous la forme

$$\int\int_X [\partial_x Q(x, y) - \partial_y P(x, y)]\ d(x, y) = \int_{\partial X} [P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy] \ .$$

EXEMPLE 2 Considérons l'application

$$v : (x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \ .$$

Il vient $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 2$, donc

$$\lambda^2(X) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\partial X} (x\ dy - y\ dx)$$

(formule de Leibniz).

EXEMPLE 3 L'une des équations de Maxwell s'écrit

$$\operatorname{rot} E + \partial_t B = 0 \ ,$$

où E désigne le champ électrique et B le champ magnétique. En appliquant la formule de Stokes, nous allons en déduire la loi d'induction . Désignons par

$$\Phi(t) := \int (B(\cdot, t)|\, \nu)\ d\lambda_X$$

le flux magnétique à travers la surface X . On obtient alors

$$-\partial_t \Phi = -\int (\partial_t B(\cdot, t)|\, \nu)\ d\lambda_X = \int (\operatorname{rot} E|\, \nu)\ d\lambda_X = \int (E(\cdot, t)|\, \tau)\ d\lambda_{\partial X} \, ;$$

le membre de droite est la force électromotrice induite.