Chapitre 14

INTEGRALES DE RADON

Dans tous ce qui suit X désignera un espace métrique,
ou plus généralement un espace topologique séparé,
sauf mention expresse du contraire.

Version du 5 décembre 2005

Introduction

Rappelons que, pour tout intervalle fermé $[a,b]$, nous avons défini l'espace vectoriel réticulé $\mathcal{R}([a,b])$ des fonctions réelles (bornées) qui sont intégrables au sens de Riemann, ainsi que l'intégrale de Riemann, qui est une forme linéaire positive

$$\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

On a

$$\mathcal{E}([a,b]) \cup \mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]) \ ,$$

et on construit d'autres fonctions $\mathcal{R}$-intégrables à l'aide des opérations pour lesquelles $\mathcal{R}([a,b])$ est stable, en particulier celles d'un espace vectoriel réticulé et celle de limite uniforme. Malheureusement cela ne suffit pas, même dans des situations très pratiques, et en plus les théorèmes dans ce cadre ne sont pas les meilleurs.

Nous verrons qu'en élargissant la notion d'intégrabilité, en introduisant celle de Lebesgue, nous obtiendrons un outil beaucoup plus puissant. Il nous faudra également considérer d'autres intégrales. Il ne suffit pas d'intégrer sur un intervalle de $\mathbb{R}$, mais aussi sur $\mathbb{R}^n$, voire sur des parties de $\mathbb{R}^n$ comme les sphères, conduisant à la notion d'intégrale superficielle. D'autre part, pour des besoins plus récents tels que la théorie des objets fractals, on a besoin des mesures (ou intégrales) de Hausdorff. Pour les théories probabilistes ou en physique, la théorie quantique des champs, il est indispensable de savoir intégrer sur des espaces vectoriels de dimension infinie. Afin de ne pas empêcher les développements ultérieurs, j'introduirai la notion d'intégrale adaptée à tous ces problèmes, celle d' *intégrale de Radon* , définie comme une fonctionnelle linéaire croissante régulière sur un cône de fonctions semi-continues inférieurement.

Je présenterai également un outils puissant de construction d'intégrales, l'intégration d'une famille d'intégrales, permettant en particulier de construire les intégrales induites, celles ayant une densité, les intégrales produit de deux intégrales et les images d'intégrales. Ceci fournira des formules très prégnantes, appréciées des physiciens, définissant l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, les intégrales superficielles et liant ces intégrales.

14.1 Les additions dans $\overline{\mathbb{R}}$

Pour commencer, nous allons rappeler un certain nombre de notations, définitions et résultats.

DEFINITION 1 Nous noterons

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \ .$$

L'ordre total et la multiplication de $\mathbb{R}$ sont prolongés à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$-\infty < \alpha < \infty \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \ ,$$

et

$$(\pm\infty) \cdot \alpha = \alpha \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \\ 0 & \text{si} \\ \mp\infty & \end{cases} \begin{matrix} 0 < \alpha \leqslant \infty \\ \alpha = 0 \\ -\infty \leqslant \alpha < 0 \end{matrix} \ .$$

En outre définissons

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0 \ .$$

Pour tout partie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ nous noterons

$$A_+ := \{\alpha \in A \mid \alpha \geqslant 0\} \quad , \quad A_- := \{\alpha \in A \mid \alpha \leqslant 0\} \quad \text{et} \quad A^* := A \setminus \{0\} \ .$$

Soit X un ensemble. Pour tout $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ et $x \in X$, on définit

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \quad , \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad , \quad |f|(x) := |f(x)|$$

et

$$\min(f,g)(x) := \min(f(x), g(x)) \quad , \quad \max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x)) \ .$$

On pose

$$f^{\pm} := \max(\pm f, 0) \quad \text{et} \quad f_- := \min(f, 0) \ .$$

Soit $\mathcal{F} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$. Les fonctions

$$\sup \mathcal{F} : x \longmapsto \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x) \quad \text{et} \quad \inf \mathcal{F} : x \longmapsto \inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

s'appellent *enveloppe supérieure* , respectivement *inférieure* de $\mathcal{F}$.

On a

$$|f| := \max(f, -f) \quad \text{et} \quad f^- = -f_- \ .$$

REMARQUE Il n'existe pas d'addition convenable sur $\overline{\mathbb{R}}$.

En effet, sinon on aurait

$$\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = (-\infty) + [-(-\infty)] = -[\infty + (-\infty)] \ ,$$

donc $\infty + (-\infty) = 0$, et par suite

$$1 = 1 + [\infty + (-\infty)] = (1 + \infty) + (-\infty) = \infty + (-\infty) = 0 \ ,$$

ce qui est absurde. $\square$

La commutativité et l'associativité étant indispensable pour pouvoir calculer, il faut se rendre à l'évidence que la distributivité par rapport à l'addition de la multiplication par -1 doit être sacrifiée et $\infty + (-\infty)$ est à définir convenablement.

DEFINITION 2 On prolonge l'addition de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$, et on la note $+^\bullet$, en posant

$$\alpha +^\bullet \infty = \infty +^\bullet \alpha = \infty \quad \text{pour tout } \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$$

et

$$-\infty +^\bullet \alpha = \alpha +^\bullet (-\infty) = -\infty \quad \text{pour tout } \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\} \ .$$

On définit une autre addition $+_\bullet$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ par

$$\alpha +_\bullet \beta := -\left[(-\alpha) +^\bullet (-\beta)\right] \ .$$

On a donc

$$\infty +^\bullet (-\infty) = (-\infty) +^\bullet \infty = \infty \quad \text{et} \quad (-\infty) +_\bullet \infty = \infty +_\bullet (-\infty) = -\infty \ .$$

Dans tous les autres cas ces additions coïncident, en particulier sur $\widetilde{\mathbb{R}}$; cette addition est notée $+$!

THEOREME *Les additions $+^\bullet$ et $+_\bullet$ sont associatives, commutatives et compatibles avec l'ordre. La multiplication de $\mathbb{R}_+$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est associative et distributive par rapport à ces additions.*

Les vérifications sont laissées au lecteur. $\square$

Cela nous conduit à introduire la structure suivante :

DEFINITION 3 Soit $\mathcal{S}$ un monoïde commutatif (noté additivement) ayant un élément neutre 0 , muni d'une action (à gauche) de $\mathbb{R}_+$ que nous noterons

$$(\alpha, s) \longmapsto \alpha \cdot s : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \ .$$

Nous dirons que c'est un *conoïde* si ces deux structures sont compatibles, i.e. si, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ et $s, t, u \in \mathcal{S}$, on a

(a) $0 \cdot s = 0$.

(b) $\alpha \cdot (\beta \cdot s) = (\alpha \cdot \beta) \cdot s$.

(c) $\alpha \cdot (s + t) = \alpha \cdot s + \alpha \cdot t$.

(d) $(\alpha + \beta) \cdot s = \alpha \cdot s + \beta \cdot s$.

Si en plus $\mathcal{S}$ est muni d'une structure de (pré)ordre $\leqslant$, nous dirons que c'est un *conoïde (pré)ordonné* si les axiomes de compatibilité suivants sont satisfaits :

(e) $s \leqslant t$ entraîne $s + u \leqslant t + u$.

(f) $s \leqslant t$ entraîne $\alpha \cdot s \leqslant \alpha \cdot t$.

EXEMPLE 1 $\left(\overline{\mathbb{R}}, +^\bullet\right)$ et $\left(\overline{\mathbb{R}}, +_\bullet\right)$ sont des conoïdes totalement ordonnés.

DEFINITION 4 Bien que $+^{\bullet}$ et $+_{\bullet}$ ne sont pas des opérations de groupe, pour simplifier nous poserons

$$\alpha -^{\bullet} \beta := \alpha +^{\bullet} (-\beta) \quad \text{et} \quad \alpha -_{\bullet} \beta := \alpha +_{\bullet} (-\beta) \ .$$

Soit X un ensemble. Pour tout $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ et $x \in X$, on définit

$$(f +^{\bullet} g)(x) := f(x) +^{\bullet} g(x)$$

et

$$(f +_{\bullet} g)(x) := f(x) +_{\bullet} g(x)$$

LEMME *Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \overline{\mathbb{R}}$, on a*

(i)

$$\alpha +_{\bullet} \beta \leqslant \alpha +^{\bullet} \beta \ .$$

(ii)

$$\alpha +^{\bullet} \beta = \min(\alpha, \beta) +^{\bullet} \max(\alpha, \beta) \ ,$$

$$\alpha +_{\bullet} \beta = \min(\alpha, \beta) +_{\bullet} \max(\alpha, \beta) \ ,$$

$$\gamma \leqslant \alpha +^{\bullet} \beta \iff \gamma -_{\bullet} \beta \leqslant \alpha \ ,$$

et

$$\alpha +_{\bullet} \beta \leqslant \gamma \iff \alpha \leqslant \gamma -^{\bullet} \beta \ .$$

(iii) $-\alpha$ est le plus petit nombre $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\alpha +^{\bullet} \beta \geqslant 0$, et le plus grand tel que $\alpha +_{\bullet} \beta \leqslant 0$.

(iv)

$$\inf_{j \in J} (\alpha +^{\bullet} \alpha_j) = \alpha +^{\bullet} \inf_{j \in J} \alpha_j$$

et

$$\sup_{j \in J} (\alpha +_{\bullet} \alpha_j) = \alpha +_{\bullet} \sup_{j \in J} \alpha_j \ .$$

Les vérifications sont également laissée au lecteur. ——— □

EXEMPLE 2 On n'a pas $\sup_{j \in J} (\alpha +^{\bullet} \alpha_j) = \alpha +^{\bullet} \sup_{j \in J} \alpha_j$, comme le montre l'exemple $\alpha := -\infty$ et $(\alpha_j)_{j \in J} = (k)_{k \in \mathbb{N}}$.

COROLLAIRE *Soit X un ensemble. Alors $\left(\overline{\mathbb{R}}^X, +^{\bullet}\right)$ et $\left(\overline{\mathbb{R}}^X, +_{\bullet}\right)$ sont des conoïdes ordonnés.*

En outre, pour tout $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, on a

$$f +^{\bullet} g = \min(f, g) +^{\bullet} \max(f, g) \quad , \quad f = f_- +^{\bullet} f^+ = f^+ -^{\bullet} f^-$$

et

$$|f| = f^+ +^{\bullet} f^- \ .$$

DEFINITION 5 Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par

$$\mathcal{F}_{\widetilde{\mathbb{R}}} \quad , \quad \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \quad , \quad \mathcal{F}_+ \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_-$$

le sous-ensemble de celles qui sont à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\mathbb{R}_-$ respectivement.

Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est dit *réticulé* si

$$f, g \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \min(f, g)\ ,\ \max(f, g) \in \mathcal{F}\ .$$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dit *involutif* si

$$f \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \overline{f} \in \mathcal{F}\ .$$

PROPOSITION *Un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de fonctions réelles est réticulé si, et seulement si,*

$$f \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad |f| \in \mathcal{F}\ .$$

Dans ce cas, pour tout $f, g \in \mathcal{F}$, on a

$$\min(f, g) = \frac{1}{2} \cdot (f + g - |f - g|) \quad , \quad \max(f, g) = \frac{1}{2} \cdot (f + g + |f - g|) \quad \in \quad \mathcal{F}\ .$$

C'est immédiat. □

Ceci nous conduit à poser la définition

DEFINITION 6 Un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de fonctions complexes est dit *réticulé* si

$$f \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad |f| \in \mathcal{F}\ .$$

Dans ce cas $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est réticulé au sens ci-dessus.

14.2 Fonctions s.c.i.

DEFINITION Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) sur X si, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{f > \gamma\}$ est ouvert.

Il est équivalent de dire que, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f \leqslant \gamma\}$ est fermé.

REMARQUE La semi-continuité inférieure signifie qu'en s'approchant d'un point on ne peut sauter que vers le bas, comme le montre l'exercice ci-dessous.

EXEMPLE 1 Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est s.c.i.

En effet $\{f > \gamma\} = \overset{-1}{f}(]\gamma, \infty[)$, et $]\gamma, \infty[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. □

EXEMPLE 2 Si G est une partie ouverte et F une partie fermée de X , alors 1_G et -1_F sont s.c.i.

En effet

$$\{1_G > \gamma\} = \begin{cases} \emptyset & 1 \leqslant \gamma \\ G \quad \text{si} & 0 \leqslant \gamma < 1 \\ X & \gamma < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \{-1_F > \gamma\} = \begin{cases} \emptyset & 0 \leqslant \gamma \\ \complement F \quad \text{si} & -1 \leqslant \gamma < 0 \\ X & \gamma < -1 \end{cases} .$$

□

EXEMPLE 3 Si F est une partie fermée de $\mathbb{R}$ telle que $F \neq \emptyset, \mathbb{R}$, alors la fonction 1_F sur $\mathbb{R}$ n'est pas s.c.i.

En effet $\left\{1_F > \frac{1}{2}\right\} = F$ n'est pas un ouvert. □

EXEMPLE 4 Soient Y un ouvert de X et $f : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction s.c.i. Alors son prolongement f_0 sur X par 0 hors de Y est s.c.i.

Si $\gamma < 0$, on a $\{f_0 > \gamma\} = X$. Si $\gamma \geqslant 0$, alors $\{f_0 > \gamma\} = \{f > \gamma\}$ est une partie ouverte de Y , donc aussi de X . □

PROPOSITION *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions s.c.i. et $\mathcal{F} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ un ensemble de fonctions s.c.i. Alors les fonctions*

$$\alpha \cdot f \quad , \quad \min(f, g) \quad , \quad \max(f, g) \quad \textit{et} \quad \sup \mathcal{F}$$

sont s.c.i.

La fonction $f +_{\bullet} g$ est s.c.i. Il en est de même de $f \cdot g$ si $f, g \geqslant 0$.

Pour la première partie, il suffit d'utiliser les formules

$$\{\alpha \cdot f > \gamma\} = \left\{f > \frac{\gamma}{\alpha}\right\} \quad \text{si } \alpha > 0 \ ,$$

$$\{\min(f,g) > \gamma\} = \{f > \gamma\} \cap \{g > \gamma\} \quad , \quad \{\max(f,g) > \gamma\} = \{f > \gamma\} \cup \{g > \gamma\}$$

et

$$\{\sup \mathcal{F} > \gamma\} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f > \gamma\} \ .$$

Pour la seconde, on a

$$\{f +_{\bullet} g > \gamma\} = \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}, \alpha+\beta \geqslant \gamma} \{f > \alpha\} \cap \{g > \beta\} \ ,$$

car si $f(x) +_{\bullet} g(x) > \gamma > -\infty$, on a $f(x), g(x) \neq -\infty$ et

$$\sup\nolimits_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}, \alpha < f(x), \beta < g(x)} (\alpha + \beta) = \sup\nolimits_{\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha < f(x)} \alpha + \sup\nolimits_{\beta \in \mathbb{Q}, \beta < g(x)} \beta = f(x) + g(x) > \gamma \ .$$

Finalement

$$\{f \cdot g > \gamma\} = \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}_+, \alpha \cdot \beta \geqslant \gamma} \{f > \alpha\} \cap \{g > \beta\} \quad \text{si } \gamma \geqslant 0 \ ,$$

puisque

$$\sup\nolimits_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}_+, \alpha < f(x), \beta < g(x)} (\alpha \cdot \beta) = \sup\nolimits_{\alpha \in \mathbb{Q}_+, \alpha < f(x)} \alpha \cdot \sup\nolimits_{\beta \in \mathbb{Q}_+, \beta < g(x)} \beta = f(x) \cdot g(x) \ ,$$

et

$$\{f \cdot g > \gamma\} = X \quad \text{si } \gamma < 0 \ .$$

□

EXEMPLE 5 La fonction $\inf \mathcal{F}$ n'est en général pas s.c.i, comme le montre l'exemple

$$\inf\nolimits_k \mathrm{id}^k = 1_{\{1\}}$$

sur $[0,1]$.

EXEMPLE 6 Les fonctions $f := \frac{1}{\sqrt{\mathrm{id}}}$ et $g := -\frac{1}{\mathrm{id}}$ sont continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (qui est homéomorphe à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ grâce à arctan ; cf. exemple 10.13), donc en particulier s.c.i., ce qu'il est facile de vérifier directement. En 0 elles valent respectivement ∞ et $-\infty$. On a donc

$$(f +^{\bullet} g)(0) = \infty \quad , \text{mais} \quad \lim\nolimits_{x \to 0+} (f +^{\bullet} g)(x) = -\infty \ ,$$

donc $f +^{\bullet} g$ n'est pas s.c.i. On peut aussi constater que $\{f +^{\bullet} g > 0\} = \{0\}$ n'est pas ouvert.

EXEMPLE 7 Les fonctions $-1_{[1,3]}$ et $1_{]0,2[}$ sont s.c.i., mais $-1_{[1,3]} \cdot 1_{]0,2[} = -1_{[1,2[}$ ne l'est pas !

EXERCICE On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *semi-continue inférieurement en* $x \in X$ si, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma < f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(y) > \gamma$ pour tout $y \in U$.

(a) Pour que f soit s.c.i, il faut et il suffit que f soit semi-continue inférieurement en chaque point de X .

(b) Soit X un espace métrique. Pour que f soit semi-continue inférieurement en x , il faut et il suffit que pour toute suite (x_k) convergente vers x , on ait

$$\liminf_k f(x_k) \geqslant f(x) \ .$$

14.3 Théorème de Dini

DEFINITION On dit qu'un ensemble de fonctions $\mathcal{F}$ est *filtrant croissant* si, pour tout $f, g \in \mathcal{F}$ il existe un $h \in \mathcal{F}$ tel que

$$f, g \leqslant h \ .$$

Une suite croissante de fonctions est évidemment filtrante croissante.

THEOREME

(i) Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i, alors pour tout compact $K \subset X$, il existe un $x \in K$ tel que

$$f(x) = \inf f(K) \ .$$

(ii) ***Théorème de Dini*** *Si $\mathcal{F}$ est une famille filtrante croissante de fonctions s.c.i. telle que* $\sup \mathcal{F} = 0$ *et si K un compact de X , alors on a*

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\infty,K} = 0 \ .$$

Démonstration de (i) Considérons pour $\gamma > \inf f(K)$ la famille croissante des ouverts $\{f > \gamma\}$. Elle n'est pas un recouvrement de K , car sinon il existerait par compacité un nombre fini de tels ensembles recouvrant K , donc un $\Gamma > \inf f(K)$ tel que $\{f > \Gamma\} \supset K$. On a par suite $\inf f(K) \geqslant \Gamma > \inf f\{K\}$, ce qui est absurde. Cela prouve que

$$\bigcap_{\gamma > \inf f(K)} \{f \leqslant \gamma\} \cap K = K \setminus \bigcup_{\gamma > \inf f(K)} \{f \leqslant \gamma\} \neq \emptyset \ .$$

En choisissant x dans cet ensemble, on obtient le résultat.

Démonstration de (ii) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in K$, par la propriété d'approximation du supremum, il existe $f_x \in \mathcal{F}$ tel que $f_x(x) > -\varepsilon$. Comme la famille des ouverts $\{f_x > -\varepsilon\}$, pour $x \in K$, est un recouvrement de K , il existe une suite finie $(x_k)_{k=1,\ldots,n}$ de K telle que les ensembles $\{f_{x_k} > -\varepsilon\}$ forment encore un recouvrement de K . Par hypothèse, il existe $g \in \mathcal{F}$ tel que $g \geqslant f_{x_k}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. On en déduit que

$$g \geqslant -\varepsilon \quad \text{sur chaque ensemble } \{f_{x_k} > -\varepsilon\} \ ,$$

donc sur K . Ainsi $\|g\|_{\infty,K} \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $\inf_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\infty,K} = 0$. □

14.4 Espaces complètement réguliers et localement compacts

DEFINITION 1 Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est *complètement régulier* si, pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x , il existe une fonction continue f sur X telle que $f(x) > 0$ et $f = 0$ hors de V . On peut supposer que $f(x) = 1$ et que $0 \leqslant f \leqslant 1$ en remplaçant au besoin f par $\min\left[\max\left(\frac{f}{f(x)}, 0\right), 1\right]$.

On dit que X est *localement compact* si tout point de X possède un voisinage compact.

EXEMPLE 1 Un espace métrique est complètement régulier.

On peut supposer, en remplaçant par exemple V par une boule ouverte contenant x , que la fonction $f := dist\left(\diamond, \complement V\right)$ est bien définie. Elle répond à la question. ——— □

EXEMPLE 2 $\mathbb{R}^n$ est localement compact, mais $\mathbb{Q}$ n'est pas localement compact.

En effet, les boules de $\mathbb{R}^n$ sont compactes par le théorème de Heine-Borel 10.18. La seconde partie est laissée en exercice. ——— □

EXEMPLE 3 Soit X un espace localement compact. Pour qu'une partie Y de X soit un espace localement compact (pour la topologie induite), il faut et il suffit que cette partie soit l'intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermée de X .

Pour démontrer la suffisance, soit $Y = G \cap F$ avec G ouvert et F fermé dans X . Pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage compact V de y , qui soit contenu dans G ; dans le cas métrique on peut prendre une boule fermée de rayon suffisamment petit. Il est alors clair que $V \cap F$ est un voisinage compact de y dans Y .

Pour la nécessité on peut consulter N. Bourbaki, TG I [9], proposition 5, §3.2, p. 20 et les propositions 12 et 13, §9.7, p. 66. ——— □

EXEMPLE 4 Les espaces vectoriels, de dimension infinie, muni d'une toplogie localement convexe, sont complètement réguliers, mais pas localement compacts. Les espaces de distributions sont de ce type.

EXEMPLE 5 On peut montrer que tout espace localement compact est complètement régulier.

[9] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie générale,* Chap. 1 à 4, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1971.

DEFINITION 2 Nous désignerons par $\mathfrak{K}(X)$ l'ensemble de toutes les parties compactes de X et par $\mathcal{SK}(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions s.c.i.

$$s : X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$$

telles qu'il existe $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que

$$s \geqslant 0 \quad \text{hors de } K \ .$$

Soit $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues φ sur X telles qu'il existe un compact $K \subset X$ et que

$$\varphi = 0 \quad \text{hors de } K \ .$$

Pour toute fonction f sur X , l'ensemble fermé $\operatorname{supp} f := \overline{\{f \neq 0\}}$ s'appelle le *support* de f .

Nous désignerons par $\mathcal{K}(X)_\phi$ l'ensemble de toutes les fonctions de la forme $\sup \mathcal{F}$ avec $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{K}(X)$.

Pour qu'une fonction réelle continue φ appartienne à $\mathcal{K}(X)$, il faut et il suffit que $\operatorname{supp} \varphi \in \mathfrak{K}(X)$.

EXEMPLE 6 Si K est un compact et G un ouvert de X , alors

$$-1_K, 1_G \in \mathcal{SK}(X) \ .$$

Toute fonction s.c.i. positive appartient à $\mathcal{SK}(X)$ et, pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, $\operatorname{supp} s_- = \overline{\{s < 0\}} \in \mathfrak{K}(X)$ et $s \geqslant 0$ hors de $\operatorname{supp} s_-$.

Toutes les assertions sont immédiates, sauf la dernière. Mais si $K \in \mathfrak{K}(X)$ est tel que $s \geqslant 0$ hors de K , on a $\{s < 0\} \subset K$, donc $\operatorname{supp} s_- \subset K$ et par suite $\operatorname{supp} s_- \in \mathfrak{K}(X)$. □

PROPOSITION

(i) $\mathcal{SK}(X)$ *est un conoïde réticulé stable par enveloppe supérieure. Cela signifie que pour tout* $s, t \in \mathcal{SK}(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{SK}(X)$, *on a*

$$\alpha \cdot s \quad , \quad s + t \quad , \quad \min(s,t) \quad , \quad \max(s,t) \quad , \quad \sup \mathcal{F} \quad \in \quad \mathcal{SK}(X) \ .$$

(ii) $\mathcal{K}(X)$ *est un espace vectoriel réticulé.*

La première partie découle immédiatement de la proposition 14.2, en remarquant que l'on peut choisir un $\varphi \in \mathcal{F}$ et que $\sup \mathcal{F} \geqslant \varphi \geqslant 0$ hors de $\operatorname{supp} \varphi$. La seconde partie est bien connue. □

LEMME *Si* X *est localement compact, alors pour tout* $x \in X$ *et tout voisinage* V *de* x , *il existe* $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ *tel que* $\varphi(x) > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ *et* $\operatorname{supp} \varphi \subset V$.

En effet, comme X est complètement régulier d'après l'exemple 5, il existe une fonction continue f telle que $f(x) > 0$ et $f = 0$ hors de V , ainsi qu'un voisinage compact W de x . L'ensemble $\widetilde{W} := W \cap \left\{ f \geqslant \frac{f(x)}{2} \right\}$ est évidemment un voisinage compact de x contenu dans V . Par la régularité complète il existe une fonction continue φ telle que $\varphi(x) > 0$ et $\varphi = 0$ hors de $\widetilde{W}$, mais $\operatorname{supp} \varphi \subset \widetilde{W} \subset V$, d'où notre assertion. □

REMARQUE 1 Si X est un espace métrique localement compact, par exemple $\mathbb{R}^n$, ce lemme est évident puisque $dist\left(\diamond, \complement V\right) \in \mathcal{K}(X)$ et $dist\left(x, \complement V\right) > 0$ si V est un voisinage compact de x !

THEOREME *Si X est un espace localement compact, alors*

$$\mathcal{SK}(X) = \mathcal{K}(X)_\phi \ .$$

On a évidemment $\mathcal{K}(X)_\phi \subset \mathcal{SK}(X)$ d'après la proposition. Réciproquement, soient $s \in \mathcal{SK}(X)$ et K un compact tel que l'on ait $s \geqslant 0$ hors de K . Pour tout $x \in K$, en prenant X comme voisinage de x , il existe par le lemme $\varphi_x \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\varphi_x \leqslant 0$ et

$$\varphi_x(x) < \inf_{y \in X} s(y) =: m \ .$$

Comme $(\{\varphi_x < m\})_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert de K , par compacité il existe une suite $(x_j)_{j=0,\ldots,n} \subset K$ telle que $\left(\left\{\varphi_{x_j} < m\right\}\right)_{j=0,\ldots,n}$ soit un recouvrement de K . On a alors

$$\psi := \min_{j=0,\ldots,n} \varphi_{x_j} \in \mathcal{K}(X) \quad \text{et} \quad \psi \leqslant -m \cdot 1_K \leqslant s \cdot 1_K \leqslant s \ .$$

En considérant $s - \psi$, on peut supposer que $s \geqslant 0$. Il nous suffit donc de montrer que

$$s = \sup\left\{\varphi \in \mathcal{K}_+(X) \ \middle| \ \varphi \leqslant s\right\} \ .$$

On a évidemment

$$0 \leqslant \sup\left\{\varphi \in \mathcal{K}_+(X) \ \middle| \ \varphi \leqslant s\right\} \leqslant s \ .$$

Soit $x \in X$ et nous pouvons évidemment supposer que $s(x) > 0$. Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < s(x)$, l'ensemble $\{s > r\}$ étant un voisinage ouvert de x , par le lemme il existe $\psi \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\psi(x) = r$ et $\psi = 0$ hors de $\{s > r\}$. Posons $\varphi := \min(\psi, r) \in \mathcal{K}_+(X)$; on a $\varphi \leqslant s$ et $\varphi(x) = r$, d'où le résultat. □

REMARQUE 2 Si X est complètement régulier, mais n'est pas localement compact, on peut avoir $\mathcal{K}(X) = \{0\}$. Si X n'est pas complètement régulier, on peut avoir $\mathcal{C}(X) = \{0\}$.

EXERCICE 1 Soit X un ensemble muni de la métrique discrète. Montrer que X est localement compact et caractériser $\mathfrak{K}(X)$, ainsi que les fonctions de $\mathcal{K}(X)$ et $\mathcal{SK}(X)$.

EXERCICE 2 Si X est un espace complétement régulier et $\mathcal{U}$ une base stable par réunion finie de la topologie de X, nous désignerons par $\mathcal{K}_\mathcal{U}(X)$ l'ensemble des fonctions continues bornées φ sur X dont le support $\operatorname{supp}\varphi$ est contenu dans un $U \in \mathcal{U}$.

(a) On a

$$\mathcal{SK}(X) \subset \mathcal{K}_\mathcal{U}(X)_\phi \ .$$

(b) Si X est localement compact, alors l'ensemble $\mathcal{U}$ des ouverts U relativement compact, i.e. tels que $\overline{U}$ soit compact, est une base stable par réunion finie de la topologie de X et $\mathcal{K}_\mathcal{U}(X) = \mathcal{K}(X)$.

14.5 Intégrales de Radon

DEFINITION Soit $\mu : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$. On dit que c'est une *fonctionnelle linéaire* si elle est *positivement homogène* , i.e.

$$\mu(\alpha \cdot s) = \alpha \cdot \mu(s) \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{SK}(X) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}_+ \ ,$$

et *additive* , i.e.

$$\mu(s+t) = \mu(s) + \mu(t) \quad \text{pour tout } s, t \in \mathcal{SK}(X) \ .$$

Elle est dite *croissante* si

$$s, t \in \mathcal{SK}(X) \text{ et } s \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad \mu(s) \leqslant \mu(t) \ .$$

On dit qu'une fonctionnelle linéaire μ est une *intégrale de Radon* sur X si elle est *régulière* , i.e. telle que pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on ait

$$\mu(s) = \sup\nolimits_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant s} -\mu(t) \ .$$

Nous désignerons par $\mathcal{M}_+(X)$ l'ensemble des intégrales de Radon sur X .

Une intégrale de Radon est évidemment croissante par la régularité.

EXEMPLE Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on a

$$s = \sup\{-t \mid t \in \mathcal{SK}(X) \text{ et } -t \leqslant s\} \ ,$$

et pour tout $x \in X$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la fonctionnelle

$$\alpha \cdot \varepsilon_x : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} : s \longmapsto \alpha \cdot s(x)$$

est une intégrale de Radon. On dit que $\alpha \cdot \varepsilon_x$ est une *masse ponctuelle* en x et que ε_x est l' *intégrale de Dirac* en x .

Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $-m \leqslant s$ d'après le théorème 14.3.i. Pour tout $x \in X$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que $-m + \gamma \leqslant s(x)$, on a alors

$$m - \gamma \cdot 1_{\{x\}} \in \mathcal{SK}(X) \quad , \quad -\left(m - \gamma \cdot 1_{\{x\}}\right) \leqslant s \quad \text{et} \quad -\left(m - \gamma \cdot 1_{\{x\}}\right)(x) = -m + \gamma \ ,$$

ce qui prouve la formule, ainsi que la régularité de ε_x . La linéarité de ε_x est évidente. Il est alors clair que $\alpha \cdot \varepsilon_x$ est aussi une intégrale de Radon. □

Nous allons maintenant démontrer la propriété fondamentale satisfaite par une intégrale de Radon. Celle-ci est en fait à la base de toute la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue.

THEOREME *Soient μ une intégrale de Radon sur X et $\mathcal{F}$ une partie filtrante croissante non-vide de $\mathcal{SK}(X)$. Alors μ satisfait à la* ***propriété de Bourbaki***

$$\mu(\sup \mathcal{F}) = \sup\nolimits_{s \in \mathcal{F}} \mu(s) \ .$$

On a évidemment

$$\mu(\sup \mathcal{F}) \geqslant \sup\nolimits_{s \in \mathcal{F}} \mu(s) \ .$$

Pour prouver l'autre inégalité, remarquons tout d'abord que

$$\mu(\sup \mathcal{F}) = \sup_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant \sup \mathcal{F}} -\mu(t)$$

par la régularité de μ . Pour un tel t , l'ensemble $\left\{[s+t]_- \mid s \in \mathcal{F}\right\}$ est filtrant croissant et

$$\sup_{s \in \mathcal{F}} [s+t]_- = 0 \ .$$

Nous allons montrer que

$$\sup_{s \in \mathcal{F}} \mu\left([s+t]_-\right) = 0 \ .$$

En effet, pour un $s_0 \in \mathcal{F}$ fixé , on a $s_0 + t = 0$ hors d'un certain compact K . Pour tout $s \in \mathcal{F}$ tel que $s \geqslant s_0$, il vient alors

$$[s+t]_- \geqslant -\left\|[s+t]_-\right\|_{\infty,K} \cdot 1_K \ ,$$

donc

$$0 \geqslant \sup_{s \in \mathcal{F}, s \geqslant s_0} \mu\left([s+t]_-\right) \geqslant \inf_{s \in \mathcal{F}, s \geqslant s_0} \left\|[s+t]_-\right\|_{\infty,K} \cdot \mu(-1_K) = 0$$

par le théorème de Dini 14.3.ii. On en déduit que

$$\sup_{s \in \mathcal{F}} \mu(s) + \mu(t) = \sup_{s \in \mathcal{F}} \mu(s+t) \geqslant \sup_{s \in \mathcal{F}} \mu\left([s+t]_-\right) \geqslant 0 \ ,$$

c'est-à-dire $-\mu(t) \leqslant \sup_{s \in \mathcal{F}} \mu(s)$. Finalement nous obtenons

$$\mu(\sup \mathcal{F}) = \sup_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant \sup \mathcal{F}} -\mu(t) \leqslant \sup_{s \in \mathcal{F}} \mu(s) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

EXERCICE Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X . Montrer que

$$\mu + \nu : s \longmapsto \mu(s) + \nu(s) : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$$

est une intégrale de Radon sur X .

14.6 Intégrales de Radon sur un espace localement compact

Dans beaucoup de cas, on est confronté à la situation suivante : X est un espace localement compact et le problème étudié conduit à une forme linéaire τ sur $\mathcal{K}(X)$ qui est positive au sens de la définition qui suit. En outre, il est nécessaire de considérer des fonctions n'appartenant pas à $\mathcal{K}(X)$ et de les "intégrer" par rapport à τ . Le résultat suivant nous permet de considérer τ comme une intégrale de Radon, puis de lui appliquer la théorie de l'intégration que nous développerons plus loin.

DEFINITION On dit qu'une forme linéaire τ sur $\mathcal{K}(X)$ est *positive* si, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$, on a $\tau(\varphi) \geqslant 0$.

THEOREME *Soit X un espace localement compact. Alors toute forme linéaire positive τ sur $\mathcal{K}(X)$ possède un unique prolongement μ à $\mathcal{SK}(X)$ qui soit une intégrale de Radon. On a*

$$\mu(s) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\varphi\leqslant s} \tau(\varphi) \ .$$

Si μ est une intégrale de Radon prolongeant τ , pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, la proposition 14.4 et la propriété de Bourbaki 14.5 montrent que

$$\mu(s) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\varphi\leqslant s} \mu(\varphi) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\varphi\leqslant s} \tau(\varphi) \ .$$

Ceci prouve l'unicité.

Pour l'existence, nous prenons évidemment cette formule pour définir μ . Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on pose donc

$$\mu(s) := \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\varphi\leqslant s} \tau(\varphi) \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

Ceci définit un prolongement de τ , car pour $s \in \mathcal{K}(X)$, si $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ est tel que $\varphi \leqslant s$, on a $s - \varphi \geqslant 0$, donc $0 \leqslant \tau(s-\varphi) = \tau(s) - \tau(\varphi)$ et par suite $\tau(\varphi) \leqslant \tau(s)$. Comme l'ensemble d'indice n'est pas vide par le théorème 14.4, μ est à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. Cette fonctionnelle est évidemment croissante.

Pour montrer que μ est positivement homogène, constatons tout d'abord que le cas $\alpha = 0$ est trivial, puisque $\mu(0) = \tau(0) = 0$. Si $\alpha > 0$, alors

$$\mu(\alpha\cdot s) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\varphi\leqslant \alpha s} \tau(\varphi) = \alpha\cdot\sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\frac{\varphi}{\alpha}\leqslant s} \tau\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) =$$

$$= \alpha\cdot\sup_{\psi\in\mathcal{K}(X),\psi\leqslant s} \tau(\psi) = \alpha\cdot\mu(s) \ .$$

Quant à l'additivité, pour tout $s,t \in \mathcal{SK}(X)$, il vient premièrement

$$\mu(s+t) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\varphi\leqslant s+t} \tau(\varphi) \geqslant \sup_{\psi,\eta\in\mathcal{K}(X),\psi\leqslant s,\eta\leqslant t} \tau(\psi) + \tau(\eta) =$$

$$= \sup_{\psi\in\mathcal{K}(X),\psi\leqslant s} \tau(\psi) + \sup_{\eta\in\mathcal{K}(X),\eta\leqslant t} \tau(\eta) = \mu(s) + \mu(t) \ .$$

Remarquons maintenant que, pour $\psi_0, \eta_0 \in \mathcal{K}(X)$ fixés satisfaisant à $\psi_0 \leqslant s$ et $\eta_0 \leqslant t$ et tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\varphi \leqslant s+t$, l'ensemble

$$\left\{[\psi+\eta-\varphi]_- \mid \psi,\eta\in\mathcal{K}(X) \ , \ \psi_0\leqslant\psi\leqslant s \ , \ \eta_0\leqslant\eta\leqslant t\right\} \subset \mathcal{K}_-(X)$$

est filtrant croissant et d'enveloppe supérieure 0 . On a $[\psi_0 + \eta_0 - \varphi]_- = 0$ hors d'un certain compact K et il existe $\chi \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\chi \geqslant 1$ sur K d'après le théorème 14.4. Pour tout les ψ et η comme ci-dessus, on obtient

$$[\psi + \eta - \varphi]_- \geqslant - \left\| [\psi + \eta - \varphi]_- \right\|_\infty \cdot \chi \ ,$$

donc

$$\tau(\psi) + \tau(\eta) - \tau(\varphi) = \tau(\psi + \eta - \varphi) \geqslant \tau\left([\psi + \eta - \varphi]_-\right) \geqslant - \left\| [\psi + \eta - \varphi]_- \right\|_\infty \cdot \tau(\chi) \ .$$

Ainsi

$$\mu(s) + \mu(t) - \tau(\varphi) = \sup\nolimits_{\psi \in \mathcal{K}(X), \psi \leqslant s} \tau(\psi) + \sup\nolimits_{\eta \in \mathcal{K}(X), \eta \leqslant t} \tau(\eta) - \tau(\varphi) =$$

$$= \sup\nolimits_{\psi, \eta \in \mathcal{K}(X), \psi \leqslant s, \eta \leqslant t} \tau(\psi) + \tau(\eta) - \tau(\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant - \inf\nolimits_{\psi, \eta \in \mathcal{K}(X), \psi \leqslant s, \eta \leqslant t} \left\| [\psi + \eta - \varphi]_- \right\|_\infty \cdot \tau(\chi) = 0 \ ,$$

par le théorème de Dini 14.3.ii , ce qui prouve l'autre inégalité. Nous avons en fait démontrer dans un cas particulier que τ satisfait à la propriété de Bourbaki dans $\mathcal{K}(X)$!

Montrons maintenant que μ est régulière. On a

$$\sup\nolimits_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant s} -\mu(t) \leqslant \mu(s) = \sup\nolimits_{\varphi \in \mathcal{K}(X), \varphi \leqslant s} \tau(\varphi) \leqslant \sup\nolimits_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant s} -\mu(t) \ ,$$

par le lemme qui suit et le fait que $-\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{SK}(X)$. ☐

LEMME *Si μ est une fonctionnelle linéaire croissante sur $\mathcal{SK}(X)$, alors*

$$\sup\nolimits_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant s} -\mu(t) \leqslant \mu(s)$$

pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$.

En effet, pour tout $s, t \in \mathcal{SK}(X)$ tels que $-t \leqslant s$, on a $s + t \geqslant 0$, donc

$$0 \leqslant \mu(s + t) = \mu(s) + \mu(t) \ ,$$

puisque μ est croissante et additive, et par suite $-\mu(t) \leqslant \mu(s)$. ☐

EXEMPLE 1 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann définit une forme linéaire positive τ_J sur $\mathcal{K}(J)$ par

$$\tau_J : \mathcal{K}(J) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \int_J \varphi := \int_a^b \varphi$$

avec $a, b \in J$ tels que $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$; ceci ne dépend pas des a, b choisis.

On désigne par λ_J l'intégrale de Radon sur J correspondante et on dit que c'est l' *intégrale de Lebesgue* sur J . L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est désignée par λ .

EXEMPLE 2 Soit ρ une fonction croissante sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Comme pour l'intégrale de Riemann, on peut montrer (cf. remarque 9.2.2 et l'exercice 3 ci-dessous) que

$$\varphi \longmapsto \int_a^b \varphi \, d\rho$$

définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(J)$.

L'intégrale de Radon correspondante λ_ρ sur J s'appelle l' *intégrale de Lebesgue-Stieltjes* associée à ρ . Pour tout $a, b \in J$ tels que $a < b$, on a

$$\lambda_\rho\left(-1_{[a,b]}\right) = \rho(a-) - \rho(b+) \quad \text{et} \quad \lambda_\rho\left(1_{]a,b[}\right) = \rho(b-) - \rho(a+) \ ,$$

en posant $\rho(\inf J-) := \rho(\inf J)$ et $\rho(\sup J+) := \rho(\sup J)$ si $\inf J$, resp. $\sup J$, appartient à J . On dit que ρ est une *fonction de répartition* de λ_ρ; elle mesure la variation de masse répartie sur J de gauche à droite. Un saut représente une masse ponctuelle, puisque

$$\lambda_\rho\left(-1_{\{a\}}\right) = \rho(a-) - \rho(a+) \ .$$

Remarquons que l'on peut modifier la valeur de ρ en un saut, pour autant que l'on ait

$$\rho(a) \in [\rho(a-), \rho(a+)] \ .$$

Une fonction de répartition de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est id . On peut montrer que toute intégrale de Radon sur J est de la forme λ_ρ .

EXERCICE 1 Soit X un espace localement compact.

(a) Si μ est une intégrale de Radon sur X , alors pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$ tel que $-s \in \mathcal{SK}(X)$, on a $s + (-s) = 0$ et $\mu(-s) = -\mu(s)$.

(b) L'application $\mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{K}(X)}$ est une bijection de $\mathcal{M}_+(X)$ sur l'ensemble des formes linéaires positives sur $\mathcal{K}(X)$.

EXERCICE 2 Soit X un espace métrique discret (cf. exercice 14.4).

Montrer que, pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on peut donner un sens à $\sum_{x\in X} s(x)$ et que

$$\# : s \longmapsto \sum_{x\in X} s(x)$$

est une intégrale de Radon. On dit que c'est l' *intégrale de comptage* sur X .

EXERCICE 3 Soit ρ une fonction croissante sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Si $\Delta = (x_j)_{j=0,\ldots,m}$ est une subdivision de $[a, b] \subset J$, alors on dit que

$$fin(\Delta) := \max\nolimits_{j=1,\ldots,m}(x_j - x_{j-1})$$

est la *finesse* de Δ .

Etant donné $\varphi \in \mathcal{K}(J)$, pour tout intervalle $[a, b] \subset J$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$ et toute subdivision Δ de $[a, b]$, on pose

$$S_\Delta(\varphi) := \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot [\rho(x_{j+1}-) - \rho(x_j-)] \ .$$

Montrer

(a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$|S_\Delta(\varphi) - S_\Theta(\varphi)| \leqslant \varepsilon$$

pour toutes subdivisions Δ, Θ de $[a, b]$ de finesse $\leqslant \delta$.

(b) Si $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que $\lim_k fin(\Delta_k) = 0$, alors

$$\int_a^b \varphi \, d\rho := \lim\nolimits_k S_{\Delta_k}(\varphi) \quad \text{existe dans } \mathbb{R} \ .$$

En outre cette limite ne dépend pas, ni de l'intervalle $[a, b]$, ni de la suite de subdivisions choisis.

(c) L'application

$$\varphi \longmapsto \int_a^b \varphi \, d\rho : \mathcal{K}(J) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme linéaire positive.

14.7 Intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

PROPOSITION *Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique localement compact. Si $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, alors pour tout $\eta \in Y$, on a*

$$\lim_{y \to \eta} f(\cdot, y) = f(\cdot, \eta) \quad \textit{uniformément sur } X \ .$$

Soit V un voisinage compact de η . Puisque $f_{|X \times V}$ est uniformément continue (théorème 10.21), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$|f(x,y) - f(u,v)| \leqslant \varepsilon$$

si $x, u \in X$, $y, v \in V$ et $d_\infty((x,y),(u,v)) \leqslant \delta$. Si $d_Y(y,\eta) \leqslant \delta$, pour tout $x \in X$, on a

$$d_\infty((x,y),(x,\eta)) \leqslant d_Y(y,\eta) \ ,$$

et nous pouvons supposer que $B(\eta,\delta) \subset V$. On obtient alors

$$\|f(\cdot,y) - f(\cdot,\eta)\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x,y) - f(x,\eta)| \leqslant \varepsilon \ .$$

□

COROLLAIRE *Soient $[a,b]$ et J des intervalles de $\mathbb{R}$.*

(i) Si $f : [a,b] \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, alors

$$y \longmapsto \int_a^b f(x,y)\, dx : Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

l'est aussi.

(ii) Soit $f : [a,b] \times J \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $f(\cdot,y)$ est continue pour tout $y \in J$, si f est dérivable par rapport à la seconde variable et si

$$\partial_2 f : [a,b] \times J \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, alors $\int_a^b f(x,\cdot)\, dx$ est continûment dérivable et

$$\partial \int_a^b f(x,\cdot)\, dx = \int_a^b \partial_2 f(x,\cdot)\, dx \ .$$

Démonstration de (i) En effet, on a

$$\lim_{y \to \eta} \int_a^b f(x,y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to \eta} f(x,y)\, dx = \int_a^b f(x,\eta)\, dx \ ,$$

puisque la convergence est uniforme (théorème 10.6).

Démonstration de (ii) Soit $\eta \in Y$ et $y \in Y \smallsetminus \{\eta\}$. On a

$$\frac{1}{y-\eta} \cdot \left(\int_a^b f(x,y)\, dx - \int_a^b f(x,\eta)\, dx \right) = \int_a^b \frac{f(x,y) - f(x,\eta)}{y - \eta}\, dx \ .$$

D'après la seconde inégalité de la moyenne 11.2, p. 373, on a en outre

$$\left|\frac{f(x,y)-f(x,\eta)}{y-\eta}-\partial_2 f(x,\eta)\right| \leqslant \sup_{|v-\eta|\leqslant\delta}|\partial_2 f(x,v)-\partial_2 f(x,\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|v-\eta|\leqslant\delta}\|\partial_2 f(\cdot,v)-\partial_2 f(\cdot,\eta)\|_\infty$$

si $|y-\eta|\leqslant\delta$. On en déduit que

$$\lim_{\eta\neq y\to\eta}\frac{f(\cdot,y)-f(\cdot,\eta)}{y-\eta}=\partial_2 f(\cdot,\eta) \quad \text{uniformément sur } [a,b]$$

par le lemme appliqué à $\partial_2 f$. Le théorème 10.6 montre alors que $\int_a^b f(x,\cdot)\,dx$ est dérivable en η et que

$$\partial\left(\int_a^b f(x,\cdot)\,dx\right)(\eta)=\int_a^b \lim_{\eta\neq y\to\eta}\frac{f(x,y)-f(x,\eta)}{y-\eta}\,dx=\int_a^b \partial_2 f(x,\eta)\,dx\ .$$

Finalement $\int_a^b \partial_2 f(x,\eta)\,dx$ est continue par (i). □

REMARQUE 1 Les hypothèses de (ii) entraînent en fait que f est (globalement) continue.

En effet, pour tout $x,u\in[a,b]$ et $y,v\in J$, on a

$$|f(x,y)-f(u,v)|\leqslant|f(x,y)-f(u,y)|+|f(u,y)-f(u,v)|=$$

$$=|f(x,y)-f(u,y)|+|\partial_2 f(u,\xi_u)\cdot(y-v)|$$

pour un ξ_u entre y et v .

Il suffit alors de remarquer que $\partial_2 f$ est bornée dans un voisinage de (x,y) . □

THEOREME *Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{K}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy\ .$$

On considère la fonction

$$F:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{K}:(x,t)\longmapsto\int_c^t f(x,y)\,dy\ .$$

Pour tout $t\in[c,d]$, la fonction $F(\cdot,t)$ est continue par le corollaire (i) en permutant les variables. D'autre part $\partial_2 F(x,t)=f(x,t)$. Les hypothèses du corollaire (ii) sont donc satisfaites par F . En définissant $\varphi:[c,d]\longrightarrow\mathbb{K}$ par

$$\varphi(t):=\int_a^b\left(\int_c^t f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b F(x,t)\,dx\ ,$$

on en déduit que φ est continûment dérivable et que

$$\varphi'(t)=\int_a^b \partial_2 F(x,t)\,dx=\int_a^b f(x,t)\,dx\ .$$

Comme $\varphi(c)=0$, par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral on obtient

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d \varphi'(y)\,dy=\varphi(d)=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

LEMME *Soient Y un ouvert de X . Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(Y)$, on a $\varphi_0 \in \mathcal{K}(X)$ en désignant par φ_0 le prolongement de φ par 0 hors de Y .*

La continuité de φ_0 en chaque point de Y est évidente puisque Y est ouvert. En outre $\operatorname{supp}\varphi$ est une partie compacte de Y , donc de X ; cette partie est par suite fermée dans X et, pour tout $x \notin Y$, on a $x \notin \operatorname{supp}\varphi$ et il existe un voisinage V de x dans X tel que $V \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$. Comme $\varphi_0 = 0$ sur V le résultat en découle. □

REMARQUE 2 Le prolongement φ_0 de φ est canonique; pour simplifier nous considérons $\mathcal{K}(Y)$ comme une partie de $\mathcal{K}(X)$.

Etant donné un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, on peut donc définir

$$\int_X \varphi := \int_{a_1}^{b_1} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \right) \cdots \right) dx_1$$

avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, \ldots, n$ tels que

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \ .$$

Ceci ne dépend pas des a_j, b_j choisis.

Le théorème montre que l'on peut permuter l'ordre dans lequel on intègre, i.e.

$$\int_X \varphi = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} \left(\cdots \left(\int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{\sigma(n)} \right) \cdots \right) dx_{\sigma(1)}$$

pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$.

On vérifie immédiatement que

$$\tau_X : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \int_X \varphi$$

est une forme linéaire positive.

DEFINITION On désigne par λ_X l'intégrale de Radon sur X correspondante et on dit que c'est l' *intégrale de Lebesgue* sur X .

EXERCICE Le but de cet exercice est de généraliser le corollaire (ii) à un intervalle non-borné, mais aussi de constater que la méthode proposée, basée sur la convergence uniforme, est lourde à employer. Nous y reviendrons lorsque nous aurons démontré le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (cf. 15.8).

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \times J \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que $f(\cdot, y)$ soit continue et l'intégrale $\int_0^\infty f(x, y)\, dx$ convergente pour tout $y \in J$. On suppose en outre que f est continûment dérivable par rapport à la seconde variable.

(a) Etant donné $y \in J$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $y + s \in J$, on pose

$$I(a, s) := \int_0^a \frac{f(x, y+s) - f(x, y)}{s}\, dx \ .$$

Si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$|s|\,,|t| \leqslant \delta \text{ et } a,b \geqslant M \quad\Longrightarrow\quad |I\,(a,s) - I\,(b,t)| \leqslant \varepsilon\ ,$$

alors

$$\partial \int_0^\infty f\,(x,y)\ dx = \int_0^\infty \partial_2 f\,(x,y)\ dx\ .$$

(b) Supposons qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_0^\infty g$ soit convergente et que

$$|\partial_2 f\,(\cdot,y)| \leqslant g \quad \text{pour tout } y \in J\ .$$

Sous quelles conditions supplémentaires peut-on appliquer (a) ?

(c) On admet que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer en utilisant l'équation différentielle

$$f' = -\frac{\mathrm{id}}{2} \cdot f$$

que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot \cos\,(xy)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\frac{y^2}{4}}\ .$$

14.8 La notion d'intégrabilité

Dans tout ce qui suit μ est une intégrale de Radon sur X .

DEFINITION 1 Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on définit son *intégrale supérieure* par

$$\int^{*} f \; d\mu := \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), s \geqslant f} \mu(s)$$

et son *intégrale inférieure* par

$$\int_{*} f \; d\mu := -\int^{*} (-f) \; d\mu \; .$$

PROPOSITION *On a*

$$\int_{*} f \; d\mu = \sup_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant f} -\mu(t)$$

et

$$\int_{*} f \; d\mu \leqslant \int^{*} f \; d\mu \; .$$

En effet,

$$\int_{*} f \; d\mu = -\inf_{t \in \mathcal{SK}(X), t \geqslant -f} \mu(t) = \sup_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant f} -\mu(t)$$

et, pour tout $s, t \in \mathcal{SK}(X)$ tels que $-t \leqslant f \leqslant s$, on a $0 \leqslant s + t$, donc

$$0 \leqslant \mu(s+t) = \mu(s) + \mu(t) \; ,$$

et par suite $-\mu(t) \leqslant \mu(s)$, d'où le résultat. $\square$

DEFINITION 2 Une fonction $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est dite *μ-intégrable* si l'on a

$$-\infty < \int_{*} f \; d\mu = \int^{*} f \; d\mu < \infty \; .$$

Dans ce cas on dit que

$$\int f \; d\mu := \int^{*} f \; d\mu = \int_{*} f \; d\mu$$

est l' *intégrale* de f par rapport à μ .

Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *μ-intégrable* si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. Dans ce cas, on dit que

$$\int f \; d\mu := \int \operatorname{Re} f \; d\mu + i \cdot \int \operatorname{Im} f \; d\mu$$

est l' *intégrale* de f par rapport à μ .

REMARQUE 1 L'intégrabilité d'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est équivalente à :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s, t \in \mathcal{SK}(X)$ tels que $-t \leqslant f \leqslant s$ et $\mu(s+t) \leqslant \varepsilon$.

Cela découle immédiatement des propriétés d'approximation de sup et inf . ☐

EXEMPLE 1 Pour tout $s \in \mathcal{SK}(X)$, on a

$$\int_* s\, d\mu = \mu(s) = \int^* s\, d\mu \; .$$

En particulier, s est $\mu-$intégrable si, et seulement si $\mu(s) < \infty$. Dans ce cas $\int s\, d\mu = \mu(s)$.

En effet

$$\int^* s\, d\mu = \inf\nolimits_{t\in\mathcal{SK}(X), t\geqslant s} \mu(t) = \mu(s) = \sup\nolimits_{t\in\mathcal{SK}(X), -t\leqslant s} -\mu(t) = \int_* s\, d\mu \; .$$

☐

EXEMPLE 2 Remarquons que la fonction ∞ appartient à $\mathcal{SK}(X)$ et on a $\mu(\infty) = \infty$ si $\mu \neq 0$.

En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a $\alpha \cdot \mu(\infty) = \mu(\alpha\cdot\infty) = \mu(\infty)$, donc $\mu(\infty) = 0$ si $\mu(\infty) < \infty$. On obtient alors $\mu(s) = 0$ tout d'abord pour $s \in \mathcal{SK}_+(X)$ par la croissance de μ , puis pour $s \in \mathcal{SK}_-(X)$ par la régularité et finalement $\mu = 0$ par linéarité. ☐

EXEMPLE 3 Soient $x \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\int^* f\; d(\alpha\cdot\varepsilon_x) = \alpha\cdot f(x) \; .$$

Pour que f soit $\alpha\cdot\varepsilon_x$-intégrable, il faut et il suffit que f soit finie en x . Dans ce cas, on a

$$\int f\; d(\alpha\cdot\varepsilon_x) = \alpha\cdot f(x) \; .$$

C'est immédiat et laissé en exercice. Il suffit de remarquer que, pour tout $\beta \in \widetilde{\mathbb{R}}$, la fonction

$$X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} : y \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \infty & \text{si} & y \neq x \\ \beta & & y = x \end{array} \right.$$

appartient à $\mathcal{SK}(X)$. ☐

REMARQUE 2 Lorsque l'espace est grand par rapport à l'intégrale de Radon μ , i.e. μ n'est pas modérée (cf. défnition 15.12), il est nécessaire d'introduire la notion d' *intégrale supérieure essentielle*

$$\int^\bullet f\, d\mu := \inf\nolimits_{k\in\mathbb{N}, K\in\mathfrak{K}(X)} \sup\nolimits_{l\in\mathbb{N}, L\in\mathfrak{K}(X)} \int^* \max\left(\min\left(f, l\cdot 1_L\right), -k\cdot 1_K\right)\, d\mu$$

et celle d' *intégrale inférieure essentielle*

$$\int_\bullet f\, d\mu := -\int^\bullet (-f)\; d\mu = \sup\nolimits_{k\in\mathbb{N}, K\in\mathfrak{K}(X)} \inf\nolimits_{l\in\mathbb{N}, L\in\mathfrak{K}(X)} \int_* \min\left(\max\left(f, -l\cdot 1_L\right), k\cdot 1_K\right)\, d\mu \; .$$

On défnit de manière analogue l' *intégrabilité essentielle* d'une fonction par rapport à μ , ainsi que son intégrale essentielle.

Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\int_* f \, d\mu \leqslant \int_\bullet f \, d\mu \leqslant \int^\bullet f \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu \ .$$

En particulier toute fonction μ-intégrable est essentiellement μ-intégrable et les intégrales sont égales.

Ceci justifie la notation $\int f \, d\mu$ pour l'intégrale essentielle d'une fonction essentiellement μ-intégrable.

On peut en outre montrer que

$$\int^* f \, d\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int^\bullet f \, d\mu = \int^* f \, d\mu \ .$$

EXERCICE 1 Soient X un espace métrique discret et $\#$ l'intégrale de comptage (cf. exercice 14.6.2).

(a) Montrer que, pour tout $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\int^* f \, d\# = \sum_{f(x)>0} f(x) +^\bullet \sum_{f(x)<0} f(x) \ ,$$

où

$$\sum_{f(x)>0} f(x) = \sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(X)} \sum_{x\in K, f(x)>0} f(x) \quad \text{et} \quad \sum_{f(x)<0} f(x) = \inf\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(X)} \sum_{x\in K, f(x)<0} f(x) \ .$$

(b) Montrer que

$$\int^* \diamond \, d\# = \int^\bullet \diamond \, d\# \ .$$

Utiliser le lemme 14.1.iv.

EXERCICE 2 Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Nous savons d'après l'exercice 14.5 que $\mu + \nu$ est une intégrale de Radon sur X . Montrer

(a) On a

$$\int^* f \ d(\mu + \nu) = \int^* f \ d\mu +^\bullet \int^* f \ d\nu \ .$$

(b) Pour que f soit $(\mu + \nu)$-intégrable, il faut et il suffit que f soit μ- et ν-intégrable. Dans ce cas, on a

$$\int f \ d(\mu + \nu) = \int f \ d\mu + \int f \ d\nu \ .$$

14.9 La relation entre les intégrales de Lebesgue et Riemann

Nous allons maintenant étudier le cas de l'intégrale de Lebesgue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ plus en détail. Rappelons que $\int_a^{b*}$ désigne l'intégrale supérieure de Darboux sur $[a, b]$ (cf. 9.3).

LEMME *Soit $[a, b]$ un intervalle compact de J . Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée et f_0 est son prolongement à J par 0 hors de $[a, b]$, alors*

$$\int^* f_0 \, d\lambda_J \leqslant \int_a^{b*} f \ .$$

En effet,

$$\int^* f_0 \, d\lambda_J = \inf_{s \in \mathcal{SK}(J), s \geqslant f_0} \lambda_J(s) \leqslant \inf_{\varphi \in \mathcal{K}(J), \varphi \geqslant f_0} \int \varphi \leqslant \inf_{t \in \mathcal{E}([a,b]), t \geqslant f} \int_a^b t = \int_a^{b*} f \ ,$$

car, pour tout $t \in \mathcal{E}([a, b])$, on a

$$\int_a^b t = \inf_k \int \varphi_k \ ,$$

où (φ_k) est une suite (décroissante) de fonctions affines par morceaux, à support compact dans J et telle que $\varphi_k \geqslant t$ pour tout k . Par linéarité, il suffit de prouver ce résultat pour les fonctions du type

$$1_{[x,y[} \quad , \quad -1_{[x,y[} \quad , \quad 1_{\{b\}} \quad \text{et} \quad -1_{\{b\}}$$

(cf. définition 9.1). □

COROLLAIRE *Si f est intégrable au sens de Riemann, alors f_0 est λ_J-intégrable et on a*

$$\int f_0 \, d\lambda_J = \int_a^b f \ .$$

En particulier, toutes les fonctions de $\mathcal{C}([a, b])$ et $\mathcal{E}([a, b])$ prolongées par 0 hors de $[a, b]$ sont λ_J-intégrables.

Il suffit d'écrire la suite d'égalités et d'inégalités

$$\int_{a*}^b f = -\int_a^{b*} (-f) \leqslant -\int^* (-f_0) \, d\lambda_J = \int_* f_0 \, d\lambda_J \leqslant$$

$$\leqslant \int^* f_0 \, d\lambda_J \leqslant \int_a^{b*} f = \int_{a*}^b f \ .$$

□

PROPOSITION *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction continue* ***positive*** *f sur*

J , on a

$$\lambda_J(f) = \sup_{a,b\in J, a<b} \int_a^b f \ .$$

En outre, pour que f soit λ_J-intégrable, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ soit convergente. Dans ce cas, on a

$$\int f \, d\lambda_J = \int_{\inf J}^{\sup J} f \ .$$

Pour tout $a, b \in J$ tels que $a < b$, on a $1_{]a,b[} \cdot f \in \mathcal{SK}(J)$ par l'exemple 14.2.4 et

$$f = \sup_{a,b\in J, a<b} 1_{]a,b[} \cdot f \ .$$

Remarquons que l'intégrale de Lebesgue de

$$1_{]a,b[} \cdot f = 1_{[a,b]} \cdot f - f(a) \cdot 1_{\{a\}} - f(b) \cdot 1_{\{b\}}$$

est égale à l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ par le corollaire (cf. exercice 9.5). La propriété de Bourbaki montre alors que

$$\lambda_J(f) = \sup_{a,b\in J, a<b} \lambda_J\left(1_{]a,b[} \cdot f\right) = \sup_{a,b\in J, a<b} \int_a^b f \ .$$

La proposition découle donc de l'exemple 14.8.1 et de la caractérisation de la convergence de l'intégrale $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ (cf. proposition 9.17). □

EXEMPLE La *fonction gamma* est définie par

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

(a) Pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \text{et} \quad \Gamma(1) = 1 \ .$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ .$$

(b) Pour tout $x > 1$, on a la formule

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(x) \cdot \zeta(x) \ .$$

Rappelons (cf. exemple 6.2.2) que la fonction zéta est définie par

$$\zeta(x) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^x} \quad \text{pour } x > 1 \ .$$

Démonstration Remarquons tout d'abord que cette intégrale est convergente. En effet, on a $\lim_{t\to\infty} t^{x+1} \cdot e^{-t} = 0$, donc $t^{x+1} \cdot e^{-t} \leqslant 1$ si $t \geqslant t_0$ pour un certain t_0 assez grand, et par suite

$$t^{x-1} \cdot e^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2} \quad \text{sur } [t_0, \infty[\ .$$

D'autre part

$$t^{x-1} \cdot e^{-t} \leqslant t^{x-1} \quad \text{sur }]0, t_0] \ .$$

(a) Si $0 < \varepsilon < R < \infty$, en intégrant par partie on obtient

$$\int_\varepsilon^R t^x \cdot e^{-t}\, dt = \left[-t^x \cdot e^{-t}\right]_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R x \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \ ,$$

d'où $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. D'autre part,

$$\Gamma(1) = \sup_R \int_0^R e^{-t} dt = \sup_R \left[-e^{-t}\right]_0^R = 1 \ .$$

La dernière formule s'obtient alors par récurrence.

(b) Pour tout $t > 0$, on peut écrire

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1 - e^{-t}} = t^{x-1}e^{-t} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l \cdot t} = \sup_k \sum_{l=1}^{k} t^{x-1} e^{-l \cdot t} \ .$$

Utilisant la propriété de Bourbaki et l'additivité sur $\mathcal{SK}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ de l'intégrale de Lebesgue, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt = \lambda_{]0,\infty[}\left(\frac{\mathrm{id}^{x-1}}{\exp - 1}\right) = \lambda_{]0,\infty[}\left(\sup_k \sum_{l=1}^{k} \mathrm{id}^{x-1}\, e^{-l\cdot\mathrm{id}}\right) =$$

$$= \sup_k \sum_{l=1}^{k} \lambda_{]0,\infty[}\left(\mathrm{id}^{x-1}\, e^{-l\cdot\mathrm{id}}\right) = \sup_k \sum_{l=1}^{k} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-l\cdot t}\, dt \ .$$

Finalement

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-l\cdot t}\, dt = \sup_{0<\varepsilon<R} \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-l\cdot t}\, dt = \sup_{0<\varepsilon<R} \int_{l\varepsilon}^{lR} \left(\frac{s}{l}\right)^{x-1} e^{-s}\, \frac{ds}{l} =$$

$$= \frac{1}{l^x} \cdot \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s}\, ds = \frac{1}{l^x} \cdot \Gamma(x) \ ,$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \sup_k \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l^x} \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x) \cdot \zeta(x) \ .$$

□

REMARQUE En particulier

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^5\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right)}\, dt = \int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1}\, dt = \Gamma(4) \cdot \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \ ,$$

puisque $\Gamma(4) = 3! = 6$ et $\zeta(4) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^5\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right)}$ est liée à la radiation du corps noir. Dans le livre de Forster, Analysis I, p. 170-171, on trouve une démonstration élémentaire, mais évidemment plus compliquée, qui n'utilise pas la propriété de Bourbaki.

EXERCICE

(a) Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_k \frac{k! \cdot k^x}{x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Etant donné $x > 0$, considérer pour $k \geqslant 1$ les fonctions f_k sur $\mathbb{R}_+^*$ définies par

$$f_k(t) := t^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k \quad \text{si } 0 < t < k \quad \text{et} \quad f_k(t) = 0 \quad \text{si } t \geqslant k \ ,$$

en se rappelant que l'on a

$$\left(1 + \frac{t}{k}\right)^k \leqslant \left(1 + \frac{t}{k+1}\right)^{k+1} \quad \text{si } t \geqslant -k$$

et que

$$\lim_k \left(1 + \frac{t}{k}\right)^k = e^t \ .$$

(b) Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi} \ .$$

Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$ à l'aide du produit de Wallis (cf. 9.13) :

$$\prod_{l=1}^{\infty} \frac{4l^2}{4l^2 - 1} = \lim_k \frac{\left(2^k \cdot k!\right)^4}{(2k)!\,(2k+1)!} = \frac{\pi}{2} \ .$$

14.10 Les propriétés de l'intégrale supérieure

PROPOSITION *Pour tout $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a*

(i)

$$\int^* \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int^* f \, d\mu \quad et \quad \int_* \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int_* f \, d\mu \; .$$

(ii)

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int^* f \, d\mu \leqslant \int^* g \, d\mu \quad et \quad \int_* f \, d\mu \leqslant \int_* g \, d\mu \; .$$

(iii) ***Sous-modularité***

$$\int^* \min(f,g) \, d\mu +^\bullet \int^* \max(f,g) \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu +^\bullet \int^* g \, d\mu \; .$$

et ***surmodularité***

$$\int_* f \, d\mu +_\bullet \int_* g \, d\mu \leqslant \int_* \min(f,g) \, d\mu +_\bullet \int_* \max(f,g) \, d\mu \; .$$

En particulier

$$\int^* f \, d\mu \, , \int^* g \, d\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int^* \max(f,g) \, d\mu < \infty \; .$$

(iv) ***Sous-additivité***

$$\int^* (f +^\bullet g) \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu +^\bullet \int^* g \, d\mu \; .$$

et ***suradditivité***

$$\int_* f \, d\mu +_\bullet \int_* g \, d\mu \leqslant \int_* (f +_\bullet g) \, d\mu \; .$$

En particulier

$$\int^* f \, d\mu \, , \int^* g \, d\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int^* (f +^\bullet g) \, d\mu < \infty \; .$$

Démonstration de (i) Pour $\alpha > 0$, on a

$$\int^* \alpha \cdot f \, d\mu = \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), s \geqslant \alpha f} \mu(s) = \alpha \cdot \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), s/\alpha \geqslant f} \mu\left(\frac{s}{\alpha}\right) =$$

$$= \alpha \cdot \inf_{u \in \mathcal{SK}(X), u \geqslant f} \mu(u) = \alpha \cdot \int^* f \, d\mu \; ,$$

et cette formule est triviale si $\alpha = 0$. D'autre part

$$\int_* \alpha \cdot f \, d\mu = -\int^* \alpha \cdot (-f) \, d\mu = -\alpha \cdot \int^* (-f) \, d\mu = \alpha \cdot \int_* f \, d\mu \; .$$

Démonstration de (ii) Si $f \leqslant g$, pour tout $u \in \mathcal{SK}(X)$ tel que $u \geqslant g$, on a $u \geqslant f$, donc

$$\int^* f \, d\mu = \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), s \geqslant f} \mu(s) \leqslant \inf_{u \in \mathcal{SK}(X), u \geqslant g} \mu(u) = \int^* g \, d\mu \ .$$

D'autre part comme $-g \leqslant -f$, il vient

$$\int_* f \, d\mu = -\int^* (-f) \, d\mu \leqslant -\int^* (-g) \, d\mu = \int_* g \, d\mu \ .$$

Démonstration de (iii) Pour tout $s, t \in \mathcal{SK}(X)$ tels que $f \leqslant s$ et $g \leqslant t$, on a

$$\min(s,t), \max(s,t) \in \mathcal{SK}(X)$$

et

$$\min(f,g) \leqslant \min(s,t) \quad , \quad \max(f,g) \leqslant \max(s,t) \ ,$$

donc

$$\int^* \min(f,g) \, d\mu +^\bullet \int^* \max(f,g) \, d\mu \leqslant \mu(\min(s,t)) + \mu(\max(s,t)) =$$

$$= \mu(s+t) = \mu(s) + \mu(t) = \mu(s) +^\bullet \mu(t) \ .$$

Grâce au lemme 14.1.iii on obtient la sous-modularité :

$$\int^* \min(f,g) \, d\mu +^\bullet \int^* \max(f,g) \, d\mu \leqslant \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), f \leqslant s} \inf_{t \in \mathcal{SK}(X), g \leqslant t} [\mu(s) +^\bullet \mu(t)] =$$

$$= \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), f \leqslant s} \left[\mu(s) +^\bullet \inf_{t \in \mathcal{SK}(X), g \leqslant t} \mu(t)\right] = \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), f \leqslant s} \left[\mu(s) +^\bullet \int^* g \, d\mu\right] =$$

$$= \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), f \leqslant s} \mu(s) +^\bullet \int^* g \, d\mu = \int^* f \, d\mu +^\bullet \int^* g \, d\mu \ .$$

D'autre part

$$\int_* f \, d\mu +_\bullet \int_* g \, d\mu = \left[-\int^* (-f) \, d\mu\right] +_\bullet \left[-\int^* (-g) \, d\mu\right] =$$

$$= -\left[\int^* (-f) \, d\mu +^\bullet \int^* (-g) \, d\mu\right] \leqslant$$

$$\leqslant -\left[\int^* \min(-f,-g) \, d\mu +^\bullet \int^* \max(-f,-g) \, d\mu\right] =$$

$$= \left[\int_* -\min(-f,-g) \, d\mu\right] +_\bullet \left[\int_* -\max(-f,-g) \, d\mu\right] =$$

$$= \int_* \min(f,g) \, d\mu +_\bullet \int_* \max(f,g) \, d\mu \ .$$

Démonstration de (iv) Pour tout $s, t \in \mathcal{SK}(X)$ tels que $f \leqslant s$ et $g \leqslant t$, on a $s + t \in \mathcal{SK}(X)$ et $f +^\bullet g \leqslant s + t$, donc

$$\int^* (f +^\bullet g) \, d\mu \leqslant \mu(s) + \mu(t) \ ,$$

d'où la sous-additivité grâce au lemme 14.1.iii. D'autre part

$$\int_* (f +_\bullet g)\ d\mu = -\int^* [(-f) +^\bullet (-g)]\ d\mu \geqslant$$

$$\geqslant -\left[\int^* (-f)\ d\mu +^\bullet \int^* (-g)\ d\mu\right] = \int_* f\, d\mu +_\bullet \int_* g\, d\mu\ .$$

□

COROLLAIRE *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On a*

$$\int^* |f|\ d\mu < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad -\infty < \int_* f\ d\mu \leqslant \int^* f\ d\mu < \infty$$

et

$$\int^* f\ d\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int^* f^+\, d\mu < \infty\ .$$

La nécessité de la première partie découle, puisque $\pm f \leqslant |f|$, de (ii) : on a

$$\int^* (\pm f)\ d\mu \leqslant \int^* |f|\ d\mu\ ,$$

donc

$$\int^* f\, d\mu \leqslant \int^* |f|\ d\mu \quad \text{et} \quad \int_* f\, d\mu = -\int^* (-f)\ d\mu \geqslant -\int^* |f|\ d\mu\ .$$

Pour la suffisance, puisque $|f| = \max(f, -f)$, grâce à (iii) on obtient

$$\int^* |f|\ d\mu = \int^* \max(f, -f)\ d\mu < \infty\ .$$

Quant à la seconde partie, il suffit d'appliquer (iii) à f et 0 puisque $f^+ = \max(f, 0)$. □

EXERCICE Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions. Alors

$$\int_* f\ d\mu +_\bullet \int^* g\ d\mu \leqslant \int^* (f +_\bullet g)\, d\mu\ .$$

Si f est μ-intégrable, on a même

$$\int f\ d\mu + \int^* g\ d\mu = \int^* (f +^\bullet g)\, d\mu\ .$$

REMARQUE On peut montrer que les intégrales supérieure et inférieure essentielles satisfont aux mêmes propriétés que les intégrales supérieure et inférieure.

14.11 La propriété de Daniell

La propriété de Bourbaki satisfaite par une intégrale de Radon conduit à la propriété suivante de l'intégrale supérieure.

THEOREME *Si (f_k) est une suite croissante de fonctions sur X telle que $\int^* f_k \, d\mu > -\infty$ pour tout k , alors on a la* ***propriété de Daniell***

$$\int^* \sup_k f_k \, d\mu = \sup_k \int^* f_k \, d\mu \ .$$

On a évidemment

$$\sup_k \int^* f_k \, d\mu \leqslant \int^* \sup_k f_k \, d\mu \ .$$

Pour prouver l'autre inégalité, on peut supposer que $\sup_k \int^* f_k \, d\mu < \infty$ et que l'ensemble d'indices est $\mathbb{N}^*$. Etant donné $\varepsilon > 0$, soit $s_k \in \mathcal{SK}(X)$ tel que $s_k \geqslant f_k$ et

$$\int^* f_k \, d\mu \leqslant \mu(s_k) \leqslant \int^* f_k \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2^k} \ ,$$

et remarquons que

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^l} = \varepsilon \, !$$

Posons $t_k := \max_{1 \leqslant l \leqslant k} s_l \in \mathcal{SK}(X)$. La suite (t_k) est croissante et nous allons montrer par récurrence que

$$\mu(t_k) \leqslant \int^* f_k \, d\mu + \varepsilon \cdot \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} \ .$$

Comme $t_1 = s_1$, cette formule est vraie pour $k = 1$. Puisque $t_{k+1} = \max[t_k, s_{k+1}]$ et $\min[t_k, s_{k+1}] \geqslant f_k$, il vient

$$\int^* f_k \, d\mu + \mu(t_{k+1}) \leqslant \int^* \min[t_k, s_{k+1}] \, d\mu + \mu(\max[t_k, s_{k+1}]) =$$

$$= \mu(\min[t_k, s_{k+1}]) + \mu(\max[t_k, s_{k+1}]) = \mu(t_k + s_{k+1}) =$$

$$= \mu(t_k) + \mu(s_{k+1}) \leqslant \int^* f_k \, d\mu + \varepsilon \cdot \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} + \int^* f_{k+1} \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

si la formule est vraie pour k . Comme $\int^* f_k d\mu \in \mathbb{R}$, on en déduit la formule pour $k+1$. Finalement, on a

$$\sup_k f_k \leqslant \sup_k t_k \in \mathcal{SK}(X) \ ,$$

et utilisant la propriété de Bourbaki 14.5, il vient

$$\int^* \sup_k f_k \, d\mu \leqslant \mu(\sup_k t_k) = \sup_k \mu(t_k) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \left(\int^* f_k \, d\mu + \varepsilon \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \right) = \sup_k \int^* f_k \, d\mu + \varepsilon$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, d'où l'on tire

$$\int^* \sup_k f_k \, d\mu \leqslant \sup_k \int^* f_k \, d\mu \ .$$

$\square$

EXEMPLE 1 On vérifie rapidement que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int^* \left(-\frac{1}{k \cdot \mathrm{id}} \right) d\lambda_{\mathbb{R}_+^*} = -\int_* \frac{1}{k \cdot \mathrm{id}} \, d\lambda_{\mathbb{R}_+^*} = -\lambda_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{1}{k \cdot \mathrm{id}} \right) = -\infty$$

par l'exemple 14.8.1 et la proposition 14.9, et que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} -\frac{1}{k \cdot \mathrm{id}} = 0 \ .$$

Ceci montre que l'on ne peut pas supprimer la condition de finitude.

COROLLAIRE *Pour toute suite (f_k) de fonctions positives, on a* ***sous-additivité dénombrable***

$$\int^* \sum_{l=0}^{\infty} f_l \, d\mu \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \int^* f_l \, d\mu \ .$$

En effet, comme

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_l = \sup_k \sum_{l=0}^{k} f_l \ ,$$

il vient

$$\int^* \sum_{l=0}^{\infty} f_l \, d\mu = \sup_k \int^* \sum_{l=0}^{k} f_l \, d\mu \leqslant \sup_k \sum_{l=0}^{k} \int^* f_l \, d\mu = \sum_{l=0}^{\infty} \int^* f_l \, d\mu \ . \ \square$$

EXEMPLE 2 Pour toute fonction $f \geqslant 0$, on a

$$\int^* \infty \cdot f \ d\mu = \infty \cdot \int^* f \ d\mu \ .$$

En effet

$$\int^* \infty \cdot f \ d\mu = \int^* \sup_k k \cdot f \ d\mu = \sup_k k \cdot \int^* f \ d\mu = \infty \cdot \int^* f \ d\mu \ .$$

$\square$

Ce genre d'arguments jouera un rôle important par la suite (cf. 15.2).

REMARQUE L'intégrale supérieure essentielle satisfait également à la propriété de Daniell.

14.12 Le théorème de Beppo Levi

Voici le premier résultat permettant de décider si une fonction est intégrable et de calculer son intégrale.

THEOREME *Si (f_k) est une suite croissante de fonctions μ-intégrables, alors $\sup_k f_k$ est μ-intégrable si, et seulement si, on a*

$$\sup_k \int f_k \, d\mu < \infty \quad \text{ou bien} \quad \int^* \sup_k f_k \, d\mu < \infty \ .$$

Dans ce cas on a

$$\int \sup_k f_k \, d\mu = \sup_k \int f_k \, d\mu \ .$$

Par la propriété de Daniell 14.11, on a

$$-\infty < \sup_k \int f_k \, d\mu = \sup_k \int^* f_k \, d\mu = \int^* \sup_k f_k \ ,$$

puisque par hypothèse f_k est μ-intégrable, donc $\int^* f_k \, d\mu = \int f_k \, d\mu > -\infty$. Les conditions sont donc nécessaires, et la formule est démontrée.

Réciproquement, on a

$$-\infty < \int^* \sup_k f_k \, d\mu = \sup_k \int f_k \, d\mu = \sup_k \int_* f_k \, d\mu \leqslant \int_* \sup_k f_k \, d\mu \leqslant \int^* \sup_k f_k \, d\mu < \infty \ ,$$

ce qui finit de prouver que $\sup_k f_k$ est μ-intégrable. □

REMARQUE 1 Si (f_k) est une suite décroissante de fonctions μ-intégrables, alors $\inf_k f_k$ est μ-intégrable si, et seulement si, on a

$$\inf_k \int f_k \, d\mu > -\infty \quad \text{ou bien} \quad \int_* \inf_k f_k \, d\mu > -\infty \ .$$

Dans ce cas on a

$$\int \inf_k f_k \, d\mu = \inf_k \int f_k \, d\mu \ .$$

EXEMPLE Rappelons que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Par contre elle est $\lambda_{\mathbb{R}}$- et $\lambda_{[0,1]}$-intégrable et son intégrale de Lebesgue est 0 .

En effet, il existe une suite croissante (A_k) de parties finies de $\mathbb{Q}$ telle que

$$\mathbb{Q} = \bigcup A_k \ .$$

Mais comme 1_{A_k} est intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a,b]$ contenant A_k et d'intégrale 0 , le corollaire 14.9 montre que 1_{A_k} est $\lambda_{\mathbb{R}}$-intégrable et que $\int 1_{A_k} d\lambda_{\mathbb{R}} = 0$. Finalement, on a $1_{\mathbb{Q}} = \sup_k 1_{A_k}$ et le résultat découle du théorème de Beppo Levi. □

REMARQUE 2 Le théorème de Beppo Levi est également valable dans le cadre de l'intégration essentielle.

EXERCICE 1 Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : J \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on désigne par f_0 son prolongement à $\mathbb{R}$ par 0 hors de J . Montrer

(a) Si $s \in \mathcal{SK}(J)$, alors $s_0 \in \mathcal{SK}(\mathbb{R})$ et on a $\lambda_J(s) = \lambda(s_0)$.

(b) Pour que $f : J \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) soit λ_J-intégrable, il faut et il suffit que f_0 soit λ-intégrable. Dans ce cas on a

$$\int f \, d\lambda_J = \int f_0 \, d\lambda \ .$$

EXERCICE 2 A l'aide d'un développement en série de Taylor on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \, dx = -\frac{\pi^2}{6} \ .$$

14.13 L'espace des fonctions intégrables

DEFINITION On désigne par

$$\mathcal{L}^1(\mu) \quad , \quad \mathcal{L}^1_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\mu) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$$

l'ensemble des fonctions

$$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{resp.} \quad \widetilde{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \ ,$$

qui sont μ-intégrables.

THEOREME

(i) Pour tout $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions

$$\alpha \cdot f \quad , \quad \min(f,g) \quad , \quad \max(f,g) \quad , \quad |f| \quad , \quad f^{\pm} \quad , \quad f_-$$

et

$$f +_{\bullet} g \quad , \quad f +^{\bullet} g$$

sont intégrables et on a les formules

$$\int \alpha \cdot f \ d\mu = \alpha \cdot \int f \ d\mu \ ,$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int f \ d\mu \leqslant \int g \ d\mu \ ,$$

$$\left| \int f \ d\mu \right| \leqslant \int |f| \ d\mu$$

et

$$\int (f +_{\bullet} g) \ d\mu = \int f \ d\mu + \int g \ d\mu = \int (f +^{\bullet} g) \ d\mu \ .$$

(ii) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un espace vectoriel réticulé involutif sur lequel $\int \diamond \, d\mu$ est une forme linéaire positive. Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on a

$$\int \overline{f} \, d\mu = \overline{\int f \, d\mu} \quad \text{et} \quad \left| \int f \ d\mu \right| \leqslant \int |f| \ d\mu \ .$$

Démonstration de (i) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la proposition 14.10.i montre que

$$-\infty < \alpha \cdot \int_* f \ d\mu = -\alpha \cdot \int^* (-f) \ d\mu = -\int^* (-\alpha \cdot f) \ d\mu = \int_* \alpha \cdot f \ d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int^* \alpha \cdot f \ d\mu = \alpha \cdot \int^* f \ d\mu = \alpha \cdot \int_* f \ d\mu < \infty \ ,$$

donc $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int f \, d\mu$. En outre

$$-\infty < -\int^* f \, d\mu = \int_* (-f) \, d\mu \leqslant \int^* (-f) \, d\mu = -\int_* f \, d\mu = -\int^* f \, d\mu \ ,$$

donc $-f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int (-f) \, d\mu = -\int f \, d\mu$. On en déduit que $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et que $\int \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int f \, d\mu$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Grâce à la proposition 14.10.iii, on peut écrire

$$-\infty < \int_* f \, d\mu +_\bullet \int_* g \, d\mu \leqslant \int_* \min(f,g) \, d\mu +_\bullet \int_* \max(f,g) \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int^* \min(f,g) \, d\mu +^\bullet \int^* \max(f,g) \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu +^\bullet \int^* g \, d\mu = \int_* f \, d\mu +^\bullet \int_* g \, d\mu < \infty \ ,$$

donc

$$\int_* \min(f,g) \, d\mu + \int_* \max(f,g) \, d\mu = \int^* \min(f,g) \, d\mu + \int^* \max(f,g) \, d\mu \in \mathbb{R} \ .$$

On en déduit que

$$\int_* \min(f,g) \, d\mu = \int^* \min(f,g) \, d\mu \ , \ \int_* \max(f,g) \, d\mu = \int^* \max(f,g) \, d\mu \in \mathbb{R} \ ,$$

ce qui prouve que $\min(f,g), \max(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Il vient alors $|f|, f^{\pm}, f_- \in \mathcal{L}^1(\mu)$. La croissance de $\int \diamond \, d\mu$ découle de la proposition 14.10.ii. Comme $\pm f \leqslant |f|$, on obtient alors

$$\pm \int f \, d\mu \leqslant \int |f| \, d\mu \ ,$$

donc

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| \, d\mu \ .$$

Grâce à la proposition 14.10.iv, on peut écrire

$$-\infty < \int_* f \, d\mu +_\bullet \int_* g \, d\mu \leqslant \int_* (f +_\bullet g) \, d\mu \leqslant \left\{ \begin{array}{c} \int^* (f +_\bullet g) \, d\mu \\ \int_* (f +^\bullet g) \, d\mu \end{array} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int^* (f +^\bullet g) \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu +^\bullet \int^* g \, d\mu = \int_* f \, d\mu +^\bullet \int_* g \, d\mu < \infty \ ,$$

ce qui montre que $f +_\bullet g$, $f +^\bullet g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et la formule.

Démonstration de (ii) Cela découle immédiatement de (i) et (ii) à part le fait que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ soit réticulé, ainsi que l'inégalité. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z| = e^{-i \cdot \arg z} \cdot z = [\cos(\arg z) - i \cdot \sin(\arg z)] \cdot (\operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z) =$$

$$= \cos(\arg z) \cdot \operatorname{Re} z + \sin(\arg z) \cdot \operatorname{Im} z = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\cos \alpha \cdot \operatorname{Re} z + \sin \alpha \cdot \operatorname{Im} z) =$$

$$= \sup_{\alpha \in \mathbb{Q}} (\cos \alpha \cdot \operatorname{Re} z + \sin \alpha \cdot \operatorname{Im} z) \ ,$$

puisque

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{Re} z + \sin \alpha \cdot \operatorname{Im} z = \operatorname{Re}\left(e^{-i \cdot \alpha} \cdot z\right) \leqslant \left|e^{-i \cdot \alpha} \cdot z\right| = |z| \ .$$

Si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une énumération de $\mathbb{Q}$, on a alors

$$|f| = \sup_k \max_{l=0,\ldots,k} (\cos \alpha_l \cdot \operatorname{Re} f + \sin \alpha_l \cdot \operatorname{Im} f) \ .$$

Comme

$$\max\nolimits_{l=1,\ldots,k} (\cos \alpha_l \cdot \mathrm{Re}\, f + \sin \alpha_l \cdot \mathrm{Im}\, f) \in \mathcal{L}^1(\mu) \ ,$$

le théorème de Beppo Levi 14.12 montre que $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$, puisque

$$\int^* |f|\, d\mu \leqslant \int^* (|\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|)\; d\mu < \infty$$

d'après (i). Finalement, l'inégalité s'obtient en considérant $u \in \mathbb{U}$ tel que

$$\left|\int f\ d\mu\right| = u \cdot \int f\ d\mu = \int \mathrm{Re}\,(uf)\ d\mu + i \cdot \int \mathrm{Im}\,(u \cdot f)\ d\mu = \int \mathrm{Re}\,(uf)\ d\mu \leqslant \int |f|\ d\mu \ ,$$

puisque $\int u \cdot f\ d\mu \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Re}\,(uf) \leqslant |u \cdot f| = |f|$. □

REMARQUE On désigne par

$$\mathcal{L}^{\bullet 1}(\mu) \quad , \quad \mathcal{L}^{\bullet 1}_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\mu) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{\bullet 1}_{\mathbb{C}}(\mu)$$

l'ensemble des fonctions

$$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{resp.} \quad \widetilde{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \ ,$$

qui sont essentiellement μ-intégrables.

Les résultats ci-dessus sont encore valables dans le cadre de l'intégration essentielle.