Chapitre 15

THÉORÈME DE LEBESGUE, MESURABILITÉ ET ESPACES $\mathbf{L}^p$

Dans tout ce qui suit μ est une intégrale de Radon sur X .

Version du 16 janvier 2006

15.1 Parties négligeables

DEFINITION Pour toute partie A de X nous poserons

$$\mu^*(A) := \int^* 1_A \, d\mu \ ,$$

et nous dirons que c'est la *mesure extérieure* de A par rapport à μ .

Nous désignerons par $\mathfrak{J}(\mu)$ l'ensemble de toutes les parties *μ-intégrables* A , i.e. telles que $1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$, et nous dirons que

$$\mu(A) := \int 1_A \, d\mu$$

est la *mesure* de A par rapport à μ .

Nous dirons qu'une partie N est *μ-négligeable* si

$$N \in \mathfrak{J}(\mu) \quad \text{et} \quad \mu(N) = 0 \ .$$

L'ensemble de toutes ces parties sera désigné par $\mathfrak{N}(\mu)$.

Pour toute partie A de X on pose

$$\infty_A := \infty \cdot 1_A \ .$$

THEOREME *Soient $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ et $N \subset X$.*

(i) *Si $\int^* f \, d\mu = 0$, alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int f \, d\mu = 0$.*

(ii) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(a)* $\int^* f \, d\mu = 0$.
- *(b)* $\int^* \infty_{\{f>0\}} \, d\mu < \infty$.
- *(c)* $\{f > 0\}$ *est μ-négligeable.*

Dans ce cas $\infty_{\{f>0\}} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int \infty_{\{f>0\}} \, d\mu = 0$.

(iii) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(a)* *N est μ-négligeable.*
- *(b)* $\mu^*(N) = 0$.
- *(c)* $\int^* \infty_N \, d\mu < \infty$.

Dans ce cas $\infty_N \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int \infty_N \, d\mu = 0$.

Démonstration de (i) C'est immédiat puisque

$$0 \leqslant \int_* f \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu = 0 \ .$$

Démonstration de (ii) On a

$$\infty \cdot 1_{\{f>0\}} = \infty_{\{f>0\}} = \infty \cdot f \ ,$$

donc

$$\infty \cdot \mu^* \left(\{f > 0\}\right) = \infty \cdot \int^* 1_{\{f>0\}} \, d\mu = \int^* \infty_{\{f>0\}} \, d\mu =$$

$$= \int^* \infty \cdot f \, d\mu = \infty \cdot \int^* f \, d\mu$$

par l'exemple 14.11.2. La démonstration circulaire est alors immédiate et la dernière assertion découle de (i).

Démonstration de (iii) Il suffit d'appliquer (ii) à 1_N puisque

$$\{1_N > 0\} = N \qquad \text{et} \qquad \infty_{\{1_N>0\}} = \infty_N \ .$$

□

COROLLAIRE

(i) Soit $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles μ-négligeables. Si $N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$, alors N est μ-négligeable.

(ii) Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction telle que $\int^* f \, d\mu < \infty$. Alors $\{f = \infty\}$ est μ-négligeable. En particulier, si $\int_* f \, d\mu > -\infty$ et $\int^* f \, d\mu < \infty$, alors $\{f \notin \mathbb{R}\}$ est μ-négligeable.

Démonstration de (i) En effet, par le corollaire 14.11 on a

$$\mu^* (N) \leqslant \int^* 1_{\cup N_k} \, d\mu \leqslant \int^* \sum 1_{N_k} \, d\mu \leqslant \sum \int^* 1_{N_k} \, d\mu = 0 \ .$$

Démonstration de (ii) On a

$$\infty_{\{f=\infty\}} \leqslant f^+ \ ,$$

donc

$$\int^* \infty_{\{f=\infty\}} d\mu \leqslant \int^* f^+ \, d\mu = \int^* \max{(f,0)} \, d\mu < \infty$$

par la proposition 14.10.iii, ce qui montre que $\{f = \infty\}$ est μ-négligeable par le théorème (iii). La dernière assertion découle alors des formules

$$\{f \notin \mathbb{R}\} = \{f = \infty\} \cup \{f = -\infty\} \ ,$$

$$\{f = -\infty\} = \{-f = \infty\} \quad \text{et} \quad \int^* (-f) \, d\mu = -\int_* f \, d\mu < \infty \ .$$

□

EXEMPLE 1 Toute partie compacte K et toute partie ouverte G telle que $\mu^*(G) < \infty$ sont μ-intégrables, i.e.

$$\mathfrak{K}(X)\ ,\ \mathfrak{T}(X) \cap \{\mu^* < \infty\} \subset \mathfrak{I}(\mu)\ .$$

D'après les exemples 14.4.6 et 14.8.1, les fonctions -1_K et 1_G sont μ-intégrables, ce qu'il fallait démontrer. □

EXEMPLE 2 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in J$, l'ensemble $\{x\}$ est λ_J-négligeable. En particulier $\mathbb{Q} \cap J$ est λ_J-négligeable.

EXEMPLE 3 Soient $x \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Alors toute partie $A \subset X$ est $\alpha \cdot \varepsilon_x$-intégrable et on a

$$\alpha \cdot \varepsilon_x(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \phantom{\text{si}} \quad x \notin A \end{cases} \ .$$

En particulier

$$\varepsilon_x(\{x\}) = \alpha \quad , \quad \varepsilon_x(X \smallsetminus \{x\}) = 0\ ,$$

donc

$$\varepsilon_x(\{y\}) = 0 \quad \text{si } y \neq x\ .$$

C'est immédiat par l'exemple 14.8.3. □

REMARQUE Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, on a

$$\int^\bullet f\, d\mu := \sup\nolimits_{l \in \mathbb{N}, L \in \mathfrak{K}(X)} \int^* \min(f, l \cdot 1_L)\ d\mu\ .$$

Pour tout $A \subset X$, nous dirons que

$$\mu^\bullet(A) := \int^\bullet 1_A\, d\mu$$

est la *mesure extérieure essentielle* de A .

Nous désignerons par $\mathfrak{J}^\bullet(\mu)$ l'ensemble de toutes les parties *essentiellement μ-intégrables* A , i.e. telles que $1_A \in \mathcal{L}^{\bullet 1}(\mu)$, et nous dirons que

$$\mu(A) := \int 1_A\, d\mu$$

est la *mesure* de A par rapport à μ .

Il est justifié de ne pas préciser que c'est la mesure essentielle de A , puisqu'on a évidemment $\mathfrak{I}(\mu) \subset \mathfrak{J}^\bullet(\mu)$ et que les mesures coïncident sur $\mathfrak{I}(\mu)$ (cf. remarque 14.8.2).

Nous dirons qu'une partie N est *localement μ-négligeable* si

$$N \in \mathfrak{J}^\bullet(\mu) \quad \text{et} \quad \mu(N) = 0\ .$$

L'ensemble de toutes ces parties sera désigné par $\mathfrak{N}^\bullet(\mu)$.

Pour une justification de cette expression voir la remarque 15.12.

On a $\mathfrak{N}(\mu) \subset \mathfrak{N}^\bullet(\mu)$ et les résultats ci-dessus sont encore valables dans le cadre de l'intégration essentielle.

EXERCICE 1 Soit $\varepsilon > 0$ donné. Donner explicitement une partie ouverte G de $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{Q} \subset G \quad \text{et} \quad \lambda^*(G) \leqslant \varepsilon \ ,$$

puis montrer que $\mathbb{Q}$ est λ-négligeable en revenant à l'idée fondamentale de la démonstration de la propriété de Daniell 14.11.

EXERCICE 2 Soit ρ une fonction croissante sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ (cf. exercice 14.6.3) et λ_ρ l'intégrale de Radon correspondante.

(a) Pour tout $a, b \in J$ tels que $a \leqslant b$ calculer

$$\lambda_\rho\left(1_{]a,b[}\right) \quad \text{et} \quad \lambda_\rho\left(_{[a,b]}\right) \ .$$

(b) Si I est un intervalle contenu dans J , montrer que I est une partie λ_ρ-négligeable si, et seulement si, ρ est constante sur I .

15.2 Presque partout

DEFINITION Nous dirons qu'une propriété P dépendant de $x \in X$ est vraie μ*-presque partout* (μ-p.p.), si l'ensemble des $x \in X$ tels que $P(x)$ soit fausse est μ-négligeable.

PROPOSITION *La relation $f = g$ μ-p.p. est une relation d'équivalence sur $\overline{\mathbb{R}}^X$.*

Il suffit de constater que $\{f \neq h\} \subset \{f \neq g\} \cup \{g \neq h\}$, puisque

$$\{f = g\} \cap \{g = h\} \subset \{f = h\} \ .$$

$\square$

THEOREME *Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

(i) *Si $f \leqslant g$ μ-p.p. , alors $\int^* f\ d\mu \leqslant \int^* g\ d\mu$ et $\int_* f\ d\mu \leqslant \int_* g\ d\mu$.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $g = f$ μ-p.p. , alors $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int g\ d\mu = \int f\ d\mu$.*

(iii) *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \leqslant g$ μ-p.p. et si $\int f\ d\mu = \int g\ d\mu$, alors $f = g$ μ-p.p. .*

(iv) *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a*

$$f_{\mathbb{R}} := 1_{\{f \in \mathbb{R}\}} \cdot f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \quad , \quad f_{\mathbb{R}} = f \ \mu\text{-p.p.} \quad \text{et} \quad \int f_{\mathbb{R}}\, d\mu = \int f\ d\mu \ .$$

Démonstration de (i) Posons $N := \{f > g\}$. C'est une partie μ-négligeable par hypothèse. On a $f \leqslant s +^\bullet \infty_N$, donc

$$\int^* f\ d\mu \leqslant \int^* (g +^\bullet \infty_N)\ d\mu \leqslant \int^* g\ d\mu +^\bullet \int^* \infty_N\, d\mu = \int^* g\, d\mu \ .$$

D'autre part, on a $-g \leqslant -f$ μ-p.p. , donc

$$\int_* f\, d\mu = -\int^* (-f)\ d\mu \leqslant -\int^* (-g)\ d\mu = \int_* g\, d\mu \ .$$

Démonstration de (ii) Par hypothèse, on a $f \leqslant g$ μ-p.p. et $g \leqslant f$ μ-p.p. , donc

$$-\infty < \int_* f\ d\mu \leqslant \int_* g\ d\mu \leqslant \int^* g\ d\mu \leqslant \int^* f\ d\mu = \int_* f\ d\mu < \infty \ .$$

Démonstration de (iii) La partie $N := \{f > g\}$ est μ-négligeable par hypothèse. On a donc $f \leqslant g +^\bullet \infty_N$, puis

$$0 \leqslant g +^\bullet \infty_N +^\bullet (-f)$$

et

$$0 \leqslant \int^* [g +^\bullet \infty_N +^\bullet (-f)]\ d\mu \leqslant \int^* g\, d\mu +^\bullet \int^* \infty_N\, d\mu +^\bullet \int^* (-f)\ d\mu =$$

$$= \int^* g\, d\mu +^\bullet \int^* (-f)\ d\mu = 0 \ ,$$

donc

$$\{f < g\} = \{g +^{\bullet} (-f) > 0\} \subset \{g +^{\bullet} \infty_N +^{\bullet} (-f) > 0\}$$

est μ-négligeable par le théorème 15.1.ii. Ainsi $\{f \neq g\} = \{f > g\} \cup \{f < g\}$ est μ-négligeable, ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de (iv) Cela découle immédiatement du corollaire 15.1.ii et de (ii). □

REMARQUE 1 (iv) montre comment remplaçer des fonctions intégrables quelconques par des fonctions intégrables finies.

REMARQUE 2 Nous dirons qu'une propriété P dépendant de $x \in X$ est vraie *localement μ-presque partout* (localement μ-p.p.), si l'ensemble des $x \in X$ tels que $P(x)$ soit fausse est localement μ-négligeable.

Les résultats ci-dessus sont encore valables dans le cadre de l'intégration essentielle.

EXERCICE Soit $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction λ-intégrable. Montrer que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f(x+k)$$

est absolument convergente pour λ-presque tous les $x \in [0, 1[$, en considérant la fonction

$$F : [0, 1[\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : x \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(x+k)| \ .$$

15.3 Théorème de Lebesgue

Nous allons maintenant prouver le théorème central de la théorie de l'intégration. Mais tout d'abord un lemme souvent utile.

LEMME (de Fatou) *Soit $(f_k) \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ une suite de fonctions minorées par une fonction μ-intégrable. Alors*

$$\int^* \liminf f_k \, d\mu \leqslant \liminf \int^* f_k \, d\mu \ .$$

Posons $g_k := \inf_{l \geqslant k} f_l$. La suite (g_k) est croissante et par définition on a

$$\liminf_k f = \sup_k g_k \ .$$

Si $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est la minorante des f_k , on a $g_k \geqslant g$, donc

$$\int^* g_k \, d\mu \geqslant \int^* g \ d\mu > -\infty \ .$$

Grâce à la propriété de Daniell 14.11, on obtient finalement

$$\int^* \liminf f_k \, d\mu = \int^* \sup_k g_k \, d\mu = \sup_k \int^* g_k \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \inf_{l \geqslant k} \int^* f_l \, d\mu = \liminf \int^* f_k \, d\mu \ .$$

□

REMARQUE 1 Soit (f_k) une suite de fonctions majorées par une fonction μ-intégrable. Alors

$$\int_* \limsup f_k \, d\mu \geqslant \limsup \int_* f_k \, d\mu \ .$$

THEOREME (de la convergence dominée de Lebesgue) *Soit (f_k) une suite de $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ convergente ponctuellement μ-p.p. vers une fonction f . S'il existe une fonction μ-intégrable g telle que, pour tout k , on ait*

$$|f_k| \leqslant g \quad \mu\text{-p.p.} \ ,$$

alors f est μ-intégrable et

$$\int f \ d\mu = \lim_k \int f_k \, d\mu \ .$$

Puisque $|\mathrm{Re}\, f_k| , |\mathrm{Im}\, f_k| \leqslant |f_k|$, on se ramène au cas réel. Nous pouvons supposer, en changeant les f_k et f sur un ensemble négligeable (cf. 15.2), que (f_k) converge ponctuellement vers f . Comme $-g \leqslant f_k \leqslant g$ μ-p.p. , on a

$$-\infty < -\int g \ d\mu \leqslant \int f_k \, d\mu \leqslant \int g \ d\mu < \infty \quad \text{pour tout } k \ .$$

Ainsi, par le lemme de Fatou et la remarque, nous obtenons

$$-\infty < -\int g \, d\mu \leqslant \limsup \int f_k \, d\mu \leqslant \int_* \limsup f_k \, d\mu = \int_* f \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int^* f \, d\mu = \int^* \liminf f_k \, d\mu \leqslant \liminf \int f_k \, d\mu \leqslant \limsup \int f_k \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu < \infty \ ,$$

ce qui montre que f est μ-intégrable et que

$$\int f \, d\mu = \liminf \int f_k \, d\mu = \limsup \int f_k \, d\mu = \lim \int f_k \, d\mu \ .$$

□

EXEMPLE Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $A \subset X$ sont μ-intégrables, alors $1_A \cdot f$ est μ-intégrable.

Cela découle immédiatement de la formule

$$1_A \cdot f = \lim_k \min \left[\max \left(f, -k \cdot 1_A \right), k \cdot 1_A \right] \quad \text{ponctuellement}$$

grâce au théorème 14.13.(i) et à celui de Lebesgue, puisqu'on a

$$\left| \min \left[\max \left(f, -k \cdot 1_A \right), k \cdot 1_A \right] \right| \leqslant |f| \ .$$

□

REMARQUE 2 Le lemme de Fatou et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue sont encore valables dans le cadre de l'intégration essentielle.

EXERCICE 1 Utilisant un développement en série de Taylor on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx = \frac{\pi^2}{12} \ .$$

EXERCICE 2 Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{\sqrt{k}}{1+kx^2}$. Montrer que $f_k \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ et que la suite (f_k) converge ponctuellement vers une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ telle que

$$\int f \, d\lambda \neq \lim_k \int f_k \, d\lambda \ .$$

Sans utiliser ce résultat, montrer que la suite (f_k) ne possède pas de majorante λ-intégrable. Prouver tout d'abord que, pour tout $x \in [-1, 1] \smallsetminus \{0\}$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$f_k(x) \geqslant \frac{1}{3|x|} \ .$$

EXERCICE 3 Soit (f_k) une suite de $\mathcal{L}^1(\mu)$ telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int |f_k| \, d\mu < \infty \ .$$

(a) Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ est absolument convergente pour μ-presque tous les $x \in X$.

(b) On note $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ la fonction définie en x par $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ si la série est convergente, et par 0 sinon. Montrer que cette fonction est μ-intégrable et que

$$\int \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\right) d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f_k \, d\mu \; .$$

15.4 Intégrales absolument convergentes

PROPOSITION *Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur J . Pour que f soit λ_J-intégrable, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_{\inf J}^{\sup J} |f|$ soit convergente. Dans ce cas, l'intégrale $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ est convergente et on a*

$$\int f \, d\lambda_J = \int_{\inf J+}^{\sup J-} f := \lim_{a \to \inf J+, b \to \sup J-} \int_a^b f \ .$$

En effet, si f est λ_J-intégrable, il en est de même de $|f|$, donc $\int_{\inf J}^{\sup J} |f|$ est convergente par la proposition 14.9. Réciproquement, si $\int_{\inf J}^{\sup J} |f|$ est convergente, alors $|f|$ est λ_J-intégrable. Pour toutes suites $(a_k), (b_k) \subset J$ telles que

$$\inf J = \lim_k a_k \quad \text{et} \quad \sup J = \lim_k b_k \ ,$$

en posant $f_k := 1_{[a_k, b_k]} \cdot f$, pour k assez grand tel que $a_k < b_k$, on a $|f_k| \leqslant |f|$. D'après le corollaire 14.9, les fonctions f_k sont λ_J-intégrables et on a

$$\int f_k \, d\lambda_J = \int_{a_k}^{b_k} f_k \ .$$

Finalement $f = \lim_k f_k$ et le théorème de Lebesgue montre que f est λ_J-intégrable et que

$$\int f \, d\lambda_J = \lim \int f_k \, d\lambda_J = \lim_k \int_{a_k}^{b_k} f_k = \lim_k \int_{a_k}^{b_k} f \ .$$

Ceci prouve que $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ est convergente, ainsi que la formule. □

REMARQUE Il existe des intégrales convergentes, par exemple $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$, mais telle que les fonctions considérées ne soient pas intégrables au sens de Lebesgue !

EXERCICE Sur $[1, \infty[$ on considère les fonctions

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot 1_{[k,k+1[} \quad \text{et} \quad s := |f| - \frac{1}{\mathrm{id}} \ .$$

Montrer que $\int_1^\infty f$ est convergente, mais que f n'est pas $\lambda_{[1,\infty[}$-intégrable. On a $s \in \mathcal{SK}([1, \infty[)$ et

$$\lambda_{[1,\infty[}(s) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) =: \gamma < \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} - \ln j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. On dit que γ est la *constante d'Euler-Mascheroni* .

On remarquera que

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[k,k+1[} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\mathrm{id}} \right) \ .$$

15.5 Dépendance d'un paramètre.

THEOREME (de continuité) *Soient X, Y des espaces métriques, ν une intégrale de Radon sur Y ,*

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$$

et $\xi \in X$. Supposons qu'il existe un voisinage U de ξ tel que

(i) $f(x, \cdot) : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *est ν-intégrable pour tout $x \in U$.*

(ii) $f(\cdot, y) : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *est continue en ξ pour ν-presque tous les $y \in Y$.*

(iii) Il existe une fonction ν-intégrable $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que, pour tout $x \in U$, on ait

$$|f(x, \cdot)| \leqslant g \quad \nu\text{-presque partout .}$$

Alors la fonction

$$\int f(\cdot, y)\ d\nu(y) : x \longmapsto \int f(x, \cdot)\ d\nu : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

est continue en ξ .

En effet, si (x_k) est une suite de U telle que $\lim_k x_k = \xi$, la suite de fonctions $(f(x_k, \cdot))_{k \geqslant N}$ satisfait aux conditions du théorème de Lebesgue et $\lim_k f(x_k, \cdot) = f(\xi, \cdot)$ ν-p.p. . Ceci nous permet d'écrire

$$\int f(\xi, \cdot)\ d\nu = \lim_k \int f(x_k, \cdot)\ d\nu$$

et montre bien que $\int f(\cdot, y)\ d\nu(y)$ est continue en ξ . □

THEOREME (de dérivabilité) *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, Y un espace métrique, ν une intégrale de Radon sur Y ,*

$$f : J \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$$

et $\tau \in J$. Supposons qu'il existe un voisinage U de τ tel que

(i) $f(t, \cdot) : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *est ν-intégrable pour tout $t \in U$.*

(ii) $f(\cdot, y) : J \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dérivable dans U , de dérivée $\partial_1 f(\cdot, y)$ pour ν-presque tous les $y \in Y$.*

(iii) Il existe une fonction ν-intégrable $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que l'on ait

$$\sup_{t \in U} |\partial_1 f(t, \cdot)| \leqslant g \quad \nu\text{-presque partout.}$$

Alors $\partial_1 f(t, \cdot)$ est ν-intégrable pour tout $t \in U$, et la fonction

$$\int f(\cdot, y)\ d\nu(y) : t \longmapsto \int f(t, \cdot)\ d\nu : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

est dérivable en τ et de dérivée

$$\partial \left(\int\ f(\cdot, y)\ d\nu(y) \right)(\tau) = \int \partial_1 f(\tau, \cdot)\ d\nu\ .$$

Pour toute suite (t_k) de J telle que $\tau = \lim_k t_k$, la fonction

$$g_k := \frac{1}{t_k - \tau} \cdot [f(t_k, \cdot) - f(\tau, \cdot)]$$

est ν-intégrable. D'autre part l'inégalité de la moyenne (proposition 9.9) montre que

$$|g_k(y)| \leqslant \sup_{t \in U} |\partial_1 f(t, y)| \leqslant g(y) \quad \text{pour } \nu\text{-presque tous les } y \in Y \ ,$$

et comme

$$\lim_k g_k = \partial_1 f(\tau, \cdot) \quad \nu\text{-p.p.} \ ,$$

le théorème de Lebesgue nous permet de conclure :

$$\partial \left(\int f(\cdot, y)\, d\nu(y) \right)(\tau) = \lim_k \frac{1}{t_k - \tau} \cdot \left[\int f(t_k, \cdot)\, d\nu - \int f(\tau, \cdot)\, d\nu \right] =$$

$$= \lim_k \int g_k \, d\nu = \int \partial_1 f(\tau, \cdot)\, d\nu \ .$$

□

Ce théorème est généralisé dans l'exercice 16.4. Voir aussi les exemples 4 et 5 de 16.4.

REMARQUE Les résultats ci-dessus sont encore valables dans le cadre de l'intégration essentielle.

EXEMPLE 1 La fonction Γ est dérivable dans $]0, \infty[$ et

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln t \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \ .$$

Pour tout $\xi \in \left]0, \infty\right[$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\xi \in \left]\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right[$. Posons

$$f(x, t) := t^{x-1} \cdot e^{-t} \ .$$

Nous savons (cf. 14.9, exemple et proposition) que $f(x, \cdot)$ est $\lambda_{]0,\infty[}$-intégrable. D'autre part

$$\partial_1 f(x, t) = \ln t \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t} \ .$$

Finalement, il nous suffit de trouver une fonction $\lambda_{]0,\infty[}$-intégrable dominant toute les fonctions $\partial_1 f(x, \cdot)$, pour $x \in \left]\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right[$.

Pour $t \in \left]0, 1\right]$, on a

$$|\partial_1 f(x, t)| = \left| t^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \ln t \cdot t^{x-1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot e^{-t} \right| \leqslant M \cdot t^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \cdot e^{-t} = M \cdot f\left(\tfrac{\varepsilon}{2}, t\right) \ .$$

En effet, la fonction $t \longmapsto t^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \ln t$ possède un prolongement continu sur $[0, 1]$, donc est bornée par $M \in \mathbb{R}_+$, et

$$\left| t^{x-1-\frac{\varepsilon}{2}} \right| \leqslant t^{\varepsilon-1-\frac{\varepsilon}{2}} = t^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \ ,$$

puisque $x > \varepsilon$.

Pour $t \in [1, \infty[$, on a

$$\partial_1 f(x, t) = \frac{\ln t}{t} \cdot t^x \cdot e^{-t} \leqslant t^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot e^{-t} = f\left(\tfrac{1}{\varepsilon} + 1, t\right) \ ,$$

puisque $x < \frac{1}{\varepsilon}$ et $\ln t \leqslant t$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right[$, on a

$$|\partial_x f(x,\cdot)| \leqslant \max\left[M \cdot f\left(\tfrac{\varepsilon}{2},\cdot\right), f\left(\tfrac{1}{\varepsilon}+1,\cdot\right)\right] \in \mathcal{L}^1(\lambda) \ .$$

□

EXERCICE 1 Montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $]0,\infty[$ et que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^k \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \ .$$

EXEMPLE 2 Pour tout $a, b > 0$, on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a} \ .$$

La fonction $t \longmapsto \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est évidemment intégrable sur $[0,\infty[$, puisqu'elle possède un prolongement continu en 0 . Considérons la fonction

$$F :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : a \longmapsto \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt \ .$$

On a $F(b) = 0$ et

$$\partial_a \left(\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right) = -e^{-at} \ .$$

Etant donné $\alpha \in]0,\infty[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha \in]\varepsilon,\infty[$, on a

$$\sup_{a\in]\varepsilon,\infty[} \left|-e^{-at}\right| \leqslant e^{-\varepsilon t} \quad \text{pour tout } t > 0 \ .$$

La fonction F est ainsi dérivable en α et

$$F'(a) = -\int_0^\infty e^{-at}\, dt = \left[\frac{1}{a} \cdot e^{-at}\right]_{t=0}^\infty = -\frac{1}{a} \ .$$

On en déduit que $F(a) = -\ln a + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, puis que $c = \ln b$, donc que $F(a) = \ln \frac{b}{a}$, ce qu'il fallait démontrer. □

EXEMPLE 3 Soit $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ continûment dérivable de vecteurs. Si v *dérive d'un potentiel* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, i.e. $v = \operatorname{grad} f$, alors

$$\partial_j v_k = \partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f = \partial_k v_j \ .$$

Si $n = 3$ cela signifie que $\operatorname{rot} v = 0$ (cf. exemple 11.6).

Réciproquement, nous allons montrer que cette condition est suffisante. Il suffit de poser

$$f(x) := \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 v_j(t\cdot x)\, dt\right) \cdot x_j \ .$$

Puisque

$$|t \cdot \partial_k v_j(t\cdot x)| \leqslant \|\partial_k v_j\|_{\infty, B(0,|x|+1)} < \infty \ ,$$

le théorème de dérivabilité montre immédiatement que

$$\partial_k f(x) = \sum_{j=1}^n \partial_k \left(\int_0^1 v_j(t\cdot x)\, dt\right) \cdot x_j + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 v_j(t\cdot x)\, dt\right) \cdot \partial_k x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \partial_k \left[v_j \left(t \cdot x \right) \right] \, dt \right) \cdot x_j + \int_0^1 v_k \left(t \cdot x \right) \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t \cdot \partial_k v_j \left(t \cdot x \right) \, dt \right) \cdot x_j + \int_0^1 v_k \left(t \cdot x \right) \, dt \; .$$

Mais comme

$$\partial_t \left[t \cdot v_k \left(t \cdot x \right) \right] = v_k \left(t \cdot x \right) + t \cdot D \left(v_k \circ [\mathrm{id} \cdot x] \right) (t) = v_k \left(t \cdot x \right) + t \cdot D v_k \left(t \cdot x \right) D \left(\mathrm{id} \cdot x \right) (t) =$$

$$= v_k \left(t \cdot x \right) + t \cdot \left(\partial_1 v_k \left(t \cdot x \right), \ldots, \partial_n v_k \left(t \cdot x \right) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v_k \left(t \cdot x \right) + t \cdot \sum_{j=1}^{n} \partial_k v_j \left(t \cdot x \right) \cdot x_j \; ,$$

il vient

$$\partial_k f \left(x \right) = \int_0^1 \partial_t \left[t \cdot v_k \left(t \cdot x \right) \right] \, dt = \Big[t \cdot v_k \left(t \cdot x \right) \Big]_{t=0}^{1} = v_k \left(x \right) \; .$$

Nous avons ainsi prouvé :

PROPOSITION *Un champ continûment dérivable $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérive d'un potentiel si, et seulement si, on a $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ pour tout $j, k = 1, \ldots, n$.*

Cela tient au fait que $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe. Par exemple, un calcul simple montre que

$$v : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{|x|^2} \\ \frac{x_1}{|x|^2} \end{pmatrix}$$

est un champ satisfaisant à la condition, mais il ne dérive pas d'un potentiel. En effet, dans le cas contraire, en considérant la courbe paramétrée

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \; ,$$

on aurait d'une part

$$\int_0^{2\pi} \left(v \left(\gamma \left(t \right) \right) \middle| \, \gamma' \left(t \right) \right) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t \right) \, dt = 2\pi \; .$$

D'autre part, si $v = \operatorname{grad} f$, il viendrait

$$\int_0^{2\pi} \left(\operatorname{grad} f \left(\gamma \left(t \right) \right) \middle| \, \gamma' \left(t \right) \right) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(f \circ \gamma \right)' (t) \, dt = \Big[f \circ \gamma \left(t \right) \Big]_0^{2\pi} = 0 \; ,$$

ce qui est absurde. $\square$

EXERCICE 2 Le but de cet exercice est de montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler-Mascheroni (cf. exercice 15.4).

(a) Les fonctions

$$f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \frac{1 - e^{-t}}{t} \quad \text{et} \quad g : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

sont $\lambda_{]0,1[}$- resp. $\lambda_{[1,\infty[}$-intégrables et on a

$$\Gamma'(1) = -\int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^\infty g(t)\ dt\ .$$

(b) Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \lim_k \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{k}\right)^k}{t}\, dt \quad \text{et} \quad \int_1^\infty g(t)\ dt = \lim_k \int_1^k \frac{\left(1-\frac{t}{k}\right)^k}{t}\, dt\ ,$$

en prouvant tout d'abord que pour $k \geqslant 1$, on a

$$1-\left(1-\frac{t}{k}\right)^k \leqslant t \quad \text{pour } t \in \left]0,1\right[\quad \text{et} \quad \left(1-\frac{t}{k}\right)^k \leqslant e^{-t} \quad \text{pour } t \in [1,\infty[\ .$$

(c) Montrer finalement que

$$\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{k}\right)^k}{t}\, dt - \int_1^k \frac{\left(1-\frac{t}{k}\right)^k}{t}\, dt = \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} - \ln k\ ,$$

en utilisant la formule donnant la somme d'une suite géométrique.

EXERCICE 3 Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \left(\int_0^t \exp\left(-x^2\right)\ dx\right)^2 + \int_0^1 \frac{\exp\left(-t^2 \cdot [x^2+1]\right)}{x^2+1}\, dx$$

est constante, puis que

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-x^2\right)\ dx = \sqrt{\pi}\ .$$

EXERCICE 4 Pour $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ on considère la fonction

$$f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \exp\left(-e^{2it} \cdot x^2\right)\ .$$

Montrer que $f_t \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, puis que

$$F(t) := \int_{-\infty}^\infty e^{-e^{2i\cdot t}\cdot x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{-it}\ ,$$

en montrant que F satisfait à l'équation différentielle

$$F'(t) = -i \cdot F(t)\ ,$$

et en utilisant l'exercice précédent. Utiliser ce résultat pour calculer les intégrales

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cdot \cos\left(ax^2\right)\ dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cdot \sin\left(ax^2\right)\ dx$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

15.6 Théorème d'approximation

THEOREME *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *, il existe une suite décroissante* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *de* $\mathcal{SK}(X)$ *telle que*

$$\mu(s_k) < \infty \quad , \quad f \leqslant \inf_k s_k \quad \textit{et} \quad f = \inf_k s_k \ \mu\textit{-p.p.} \ .$$

En particulier $\inf_k s_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *et*

$$\int f \, d\mu = \int \inf_k s_k \, d\mu = \inf_k \int s_k \, d\mu \ .$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe $s_k \in \mathcal{SK}(X)$ tel que $s_k \geqslant f$ et

$$\int f \, d\mu \leqslant \mu(s_k) \leqslant \int f \, d\mu + \frac{1}{k} \ .$$

On peut évidemment supposer que (s_k) est décroissante, en remplaçant au besoin s_k par $\min_{l=1,\ldots,k} s_l$. On a $\inf_k s_k \geqslant f$, donc $\int_* \inf_k s_k \, d\mu \geqslant \int_* f \, d\mu > -\infty$. Comme $\mu(s_k) < \infty$, l'exemple 14.8.1 montre que $s_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Par le théorème de Beppo Levi (cf. remarque 14.12), on en déduit que $\inf_k s_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et que

$$\int \inf_k s_k \, d\mu = \inf_k \int s_k \, d\mu = \int f \, d\mu \ .$$

Finalement, le théorème 15.2.iii montre que $f = \inf_k s_k$ μ-p.p. . □

COROLLAIRE *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *. Alors* $\min(f,s) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *pour tout* $s \in \mathcal{SK}(X)$ *.*

Remarquons tout d'abord que $s_- \in \mathcal{L}^1(\mu)$ par l'exemple 14.8.1, puisque $\mu(s_-) \leqslant 0$. Avec les notations du théorème et en posant $g := \inf_k s_k$, on a

$$\min(g,s) = \inf_k \min(s_k,s) \quad \text{et} \quad \min(g,s) = \min(f,s) \ \ \mu\text{-p.p.} \ .$$

Mais comme

$$\min(f,s_-) \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad , \quad \min(s_k,s) \in \mathcal{SK}(X) \quad \text{et} \quad \min(f,s_-) \leqslant \min(s_k,s) \leqslant s_k \in \mathcal{L}^1(\mu) \ ,$$

on a

$$-\infty < \int \min(f,s_-) \, d\mu \leqslant \mu(\min(s_k,s)) \leqslant \mu(s_k) < \infty \ ,$$

ce qui montre que $\min(s_k,s)$ est μ-intégrables par l'exemple 14.8.1. Le théorème de Beppo Levi (cf. remarque 14.12) entraîne alors l'intégrabilité de $\min(g,s)$, donc aussi celle de $\min(f,s)$ par le théorème 15.2.ii. □

REMARQUE On peut montrer qu'une fonction est essentiellement μ-intégrable si, et seulement si, elle coïncide localement μ-p.p. avec une fonction μ-intégrable.

Le théorème d'approximation est encore valable dans le cadre de l'intégration essentielle, mais en supprimant la condition $f \leqslant \inf_k s_k$, à moins que la fonction soit $\leqslant 0$!

EXERCICE 1 Une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann si, et seulement si, elle est continue en $\lambda_{[a,b]}$-presque tous les points.

Utiliser le théorème 15.2.iii, ou le théorème 15.1.ii, et une construction analogue à celle du théorème d'approximation.

EXERCICE 2 Démontrer ou trouver un contre-exemple aux six implications possibles entre les trois propriétés d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

(a) f est λ-p.p. continue.

(b) Il existe une fonction continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = g$ λ-p.p. .

(c) Il existe un ensemble λ-négligeable N tel que $f_{|\mathbb{R} \setminus N}$ soit continue.

15.7 Parties intégrables

Dans ce qui précède nous avons prouvé l'intégrabilité de certaines fonctions en utilisant le théorème de Beppo Levi ou celui de Lebesgue. Nous allons maintenant introduire la notion de mesurabilité (cf. 15.8 et 15.9) permettant à l'aide du critère d'intégrabilité (cf. 15.10) de simplifier certaines de ces démonstrations (cf. théorème 14.13.ii et exemple 15.3). Le corollaire 15.6 est à la base de ces considérations. Mais tout d'abord voici les propriétés fondamentales satisfaites par les ensembles μ-intégrables. Rappelons que

$$\mathfrak{K}(X) \ , \ \mathfrak{T}(X) \cap \{\mu^* < \infty\} \subset \mathfrak{I}(\mu) \ .$$

THEOREME *Soient $A, B \in \mathfrak{I}(\mu)$ et (A_k) une suite dans $\mathfrak{I}(\mu)$. Alors*

(i) On a

$$\emptyset \ , \ A \cup B \ , \ A \cap B \ , \ A \smallsetminus B \in \mathfrak{I}(\mu)$$

et

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad , \quad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

(ii) Si (A_k) est croissante, respectivement disjointe, alors $\bigcup A_k \in \mathfrak{I}(\mu)$ si, et seulement si, on a

$$\mu^*\left(\bigcup A_k\right) < \infty$$

ou

$$\sup_k \mu(A_k) < \infty \quad , \textit{resp.} \quad \sum \mu(A_k) < \infty \ .$$

Dans ce cas on a

$$\mu\left(\bigcup A_k\right) = \sup_k \mu(A_k) < \infty \quad , \textit{resp.} \quad \mu\left(\bigcup A_k\right) = \sum \mu(A_k) \ .$$

(iii) On a $\bigcap A_k \in \mathfrak{I}(\mu)$ et si (A_k) est décroissante, alors

$$\mu\left(\bigcap A_k\right) = \inf_k \mu(A_k) \ .$$

(iv) Soit C une partie de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) C est μ-intégrable.

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert μ-intégrable G et un compact K tels que

$$K \subset C \subset G \quad \textit{et} \quad \mu(G \smallsetminus K) \leqslant \varepsilon \ .$$

(c) Il existe une suite (K_l) croissante ou disjointe de parties compactes contenues dans C telle que

$$\mu^*\left(\bigcup K_l\right) < \infty \quad \textit{et} \quad \mu^*\left(C \smallsetminus \bigcup K_l\right) = 0 \ .$$

Démonstration de (i) Cela découle immédiatement des propriétés de l'intégrale et des formules suivantes :

$$1_{A \cup B} = \max(1_A, 1_B) \quad , \quad 1_{A \cap B} = \min(1_A, 1_B) \ ,$$

$$1_{A \smallsetminus B} = 1_A - \min(1_A, 1_B) \quad , \quad 1_{A \cup B} + 1_{A \cap B} = 1_A + 1_B \ .$$

Démonstration de (ii) Cette partie découle du théorème de Beppo Levi 14.12 et des formules :

$$1_{\cup A_k} = \sup\nolimits_k 1_{A_k} \quad \text{si } (A_k) \text{ est croissante,}$$

$$1_{\cup A_k} = \sum 1_{A_k} \quad \text{si } (A_k) \text{ est disjointe.}$$

Démonstration de (iii) Ici il suffit d'utiliser les formules

$$\bigcap_k A_k = \bigcap_k \left(\bigcap_{l=1}^k A_l \right)$$

et

$$1_{\cap A_k} = \inf\nolimits_k 1_{A_k} \quad \text{si } (A_k) \text{ est décroissante,}$$

ainsi que le théorème de Beppo Levi (remarque 14.12).

Démonstration de (iv)

(a) $\Rightarrow$ (b) Si C est μ-intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s, t \in \mathcal{SK}(X)$ tels que

$$-t \leqslant 1_C \leqslant s \qquad \text{et} \qquad \mu(s+t) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

On peut supposer que $t \leqslant 0$ en remplaçant t au besoin par t_- . Comme $\sup_{k \geqslant 1} \max\left[t, -\frac{1}{k}\right] = 0$, on a

$$\sup\nolimits_{k \geqslant 1} \mu\left(\max\left[t, -\frac{1}{k}\right]\right) = 0$$

par la propriété de Daniell. Il existe donc un $k \geqslant 1$ tel que

$$\mu\left(\max\left[t, -\frac{1}{k}\right]\right) \geqslant -\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k} \cdot \mu(s) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Posons alors

$$K := \left\{ t \leqslant -\frac{1}{k} \right\} \quad \text{et} \quad G := \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot s > 1 \right\} \ .$$

Il est clair que K est fermée, donc compacte, puisque t est s.c.i. et s'annule hors d'une partie compacte, et que G est ouverte. Puisque $-t \leqslant 1_C \leqslant s$, on a évidemment

$$K \subset C \subset G \quad , \quad \max\left(t, -\frac{1}{k}\right) - 1_K \leqslant t \quad \text{et} \quad 1_G \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot s \ ,$$

donc G est μ-intégrable et

$$\mu(G \smallsetminus K) = \mu(1_G) + \mu(-1_K) \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \mu(s) + \mu(t) - \mu\left(\max\left[t, -\frac{1}{k}\right]\right) \leqslant \varepsilon \ .$$

(b) $\Rightarrow$ (c) On construit la suite croissante, respectivement disjointe $(K_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence de sorte que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$K_l \subset C \quad \text{et} \quad \mu(C \smallsetminus K_l) \leqslant \frac{1}{l} \quad \text{, resp.} \quad \mu\left(C \smallsetminus \bigcup_{j=1}^l K_j\right) \leqslant \frac{1}{l} \ .$$

Il vient alors

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) \leqslant \mu(C) < \infty$$

et

$$\mu\left(C \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) = \inf_l \mu(C \smallsetminus K_l) = 0 \quad \text{, resp.} \quad \mu\left(C \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) = \inf_l \mu\left(C \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{l} K_j\right) = 0$$

à l'aide de (iii).

(c) $\Rightarrow$ (a) Par (ii) on obtient $\bigcup K_l \in \mathfrak{I}(\mu)$, donc C est μ-intégrable par (i) et le théorème 15.1.iii, puisque $1_C = 1_{\cup K_l}$ μ-p.p. . □

REMARQUE 1 On dit qu'ensemble $\mathfrak{A}$ de parties de X est un *δ-clan* si $\mathfrak{A}$ est stable par réunion finie, différence et intersection dénombrable. On dit qu'une fonction $m : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une *mesure* si $m(\emptyset) = 0$,

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B) \quad \text{pour tout } A, B \in \mathfrak{A}$$

et

$$m\left(\bigcap A_k\right) = \inf_k m(A_k)$$

pour toute suite décroissante $(A_k) \subset \mathfrak{A}$.

Les propriétés (i) et (iii) du théorème montrent que $\mathfrak{I}(\mu)$ est un δ-clan et que $\mu : \mathfrak{I}(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure. Mais cette mesure satisfait en outre à la propriété de régularité (iv). On dit que c'est une *mesure de Radon* . Elle est en particulier *localement finie* , i.e. pour tout $x \in X$, il existe un voisinage μ-intégrable (ouvert) V_x de x .

PROPOSITION *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ et $\gamma \in \mathbb{R}^*_+$, les ensembles $\{f > \gamma\}$ et $\{f \geqslant \gamma\}$ sont μ-intégrables et on a*

$$\gamma \cdot \mu(\{f \geqslant \gamma\}) \leqslant \int f \, d\mu \ .$$

Puisque la fonction constante positive γ appartient à $\mathcal{SK}(X)$, on a $\min(f, \gamma) \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, donc

$$\min(k \cdot [f - \min(f, \gamma)], 1] \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$$

par le corollaire 15.6 et le théorème 14.13.i. Le théorème de Beppo Levi 14.12 montre alors que

$$1_{\{f>\gamma\}} = \sup_k \min(k \cdot [f - \min(f, \gamma)], 1] \in \mathcal{L}^1_+(\mu) \ ,$$

puisque

$$\int^* 1_{\{f>\gamma\}} d\mu \leqslant \int^* 1_{\{f\geqslant\gamma\}} d\mu \leqslant \int^* \frac{f}{\gamma} \, d\mu < \infty \ .$$

Ceci prouve que $\{f > \gamma\} \in \mathfrak{I}(\mu)$. Finalement,

$$\{f \geqslant \gamma\} = \bigcap_{k>\frac{1}{\gamma}} \left\{f > \gamma - \frac{1}{k}\right\} \in \mathfrak{I}(\mu)$$

par le théorème (iii). □

REMARQUE 2 Les assertions (i)-(iii) du théorème sont encore valable dans le cadre de l'intégration essentielle. Quant à la partie (iv), si C est une partie de X les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) C est essentiellement μ-intégrable.

(b) Il existe une partie μ-intégrable $A \subset C$ telle que $\mu^\bullet(C \smallsetminus A) = 0$.

(c) Il existe une suite (K_l) croissante ou disjointe de parties compactes contenues dans C telle que

$$\mu^*\left(\bigcup K_l\right) < \infty \quad \text{et} \quad \mu^\bullet\left(C \smallsetminus \bigcup K_l\right) = 0 .$$

On a $\mu^*\left(\bigcup K_l\right) = \mu^\bullet\left(\bigcup K_l\right)$ d'après la remarque 14.8.2.

EXERCICE 1 Par récurrence on définit une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des parties de $[0,1]$ de la manière suivante : $C_0 := [0,1]$, C_k est la réunion de 2^k intervalles fermés deux à deux disjoints de longueur 3^{-k} et C_{k+1} s'obtient en enlevant à chacun des intervalles de C_k son tiers médian ouvert. Ainsi

$$C_1 = [0,1] \smallsetminus \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] .$$

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$C_k = \bigcup_{(a_j)_{j=1,\ldots,k}\in\{0,2\}^k} \left[\sum_{j=1}^k a_j \cdot 3^{-j}, \sum_{j=1}^k a_j \cdot 3^{-j} + \frac{1}{3^k}\right] .$$

(b) Montrer que l' *ensemble de Cantor*

$$C := \bigcap_{k=1}^\infty C_k$$

est un ensemble fermé de mesure 0 .

(c) Montrer que l'application

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \longrightarrow C : (a_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \longmapsto \sum_{j=1}^\infty a_j \cdot 3^{-j}$$

est une bijection, puis que C n'est pas dénombrable.

EXERCICE 2 On dit qu'ensemble $\mathfrak{A}$ de parties de X est un *lattice* si $\mathfrak{A}$ est stable par réunion finie et intersection finie non-vide. On a donc $\emptyset \in \mathfrak{A}$, mais en général $X \notin \mathfrak{A}$.

(a) Montrer que tout élément $f \in \mathrm{lin}_{\mathbb{R}_+}(1_A)_{A\in\mathfrak{A}}$ est de la forme

$$f = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\gamma_{j+1} - \gamma_j\right) \cdot 1_{\{f \geqslant \gamma_j\}} ,$$

où $\left(\gamma_j\right)_{j=0,\ldots,n}$ est une énumération croissante de $f(X) \cup \{0\}$. On dit que c'est la *décomposition pyramidale* de f . En déduire que $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}_+}(1_A)_{A\in\mathfrak{A}}$ est un cône convexe réticulé.

(b) Montrer que $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(1_A)_{A\in\mathfrak{A}} = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}_+}(1_A)_{A\in\mathfrak{A}} - \mathrm{lin}_{\mathbb{R}_+}(1_A)_{A\in\mathfrak{A}}$ est un espace vectoriel réticulé.

15.8 La notion de tribu

DEFINITION Un ensemble $\mathfrak{A}$ de parties de X s'appelle une *tribu* si $\emptyset \in \mathfrak{A}$, et si pour tout $A \in \mathfrak{A}$ et toute suite (A_k) de $\mathfrak{A}$, on a

$$\complement A \ , \ \bigcup A_k \in \mathfrak{A} \ .$$

Une partie A de X est dite $\mathfrak{A}$-*mesurable* si $A \in \mathfrak{A}$. Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite $\mathfrak{A}$-*mesurable* si l'on a

$$\{f > \gamma\} \in \mathfrak{A} \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathfrak{A}$-mesurable si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

On désigne par

$$\mathcal{M}(\mathfrak{A}) \quad , \quad \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$$

les ensembles des fonctions $\mathfrak{A}$-mesurables qui prennent leurs valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, respectivement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

PROPOSITION *Soit $\mathfrak{A}$ une tribu. On a $X \in \mathfrak{A}$ et, pour toute suite (A_k) de $\mathfrak{A}$ et tout $A, B \in \mathfrak{A}$,*

$$\bigcap_k A_k \ , \ A \smallsetminus B \in \mathfrak{A} \ .$$

En effet, il suffit d'écrire

$$X = \complement\emptyset \quad , \quad \bigcap_k A_k = \complement\left(\bigcup_k \complement A_k\right) \quad \text{et} \quad A \smallsetminus B = A \cap \complement B \ .$$

□

THEOREME *Soit $\mathfrak{A}$ une tribu. Alors*

(i) *On a $A \in \mathfrak{A}$ si, et seulement si, $1_A \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$.*
En particulier $0 = 1_\emptyset$ et $1 = 1_X$ appartiennent à $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$.

(ii) *Si $f, g \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, les parties*

$$\{f \geqslant \gamma\} \quad , \quad \{f \leqslant \gamma\} \quad , \quad \{f < \gamma\} \quad , \quad \{f < g\} \quad , \quad \{f \leqslant g\}$$

$$\{f = g\} \quad , \quad \{f \neq g\} \quad , \quad \{f = \infty\} \quad \textit{et} \quad \{f = -\infty\}$$

sont $\mathfrak{A}$-mesurables.

(iii) *Pour tout $f, g \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions*

$$\alpha \cdot f \quad , \quad f +_\bullet g \quad , \quad f +^\bullet g \quad , \quad \min(f,g) \quad , \quad \max(f,g) \quad , \quad f^\pm \quad , \quad f_- \quad , \quad |f|$$

$$|f|^p \quad , \quad \frac{1}{f} \quad , \quad f \cdot g$$

sont $\mathfrak{A}$-mesurables.

(iv) Si $(f_k) \subset \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ *, alors*

$$\sup_k f_k \quad , \quad \inf_k f_k \quad , \quad \liminf_k f_k \quad , \quad \limsup_k f_k \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}) \ .$$

Si $\lim_k f_k$ *existe, alors* $\lim_k f_k \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$.

Cela découle des propriétés d'une tribu et, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, des formules suivantes :

Démonstration de (i)

$$\{1_A > \gamma\} = \begin{cases} \emptyset & \gamma \geqslant 1 \\ A \quad \text{si} & 0 \leqslant \gamma < 1 \\ X & \gamma < 0 \end{cases} \ ,$$

Démonstration de (ii)

$$\{f \geqslant \gamma\} = \bigcap_{k \geqslant 1} \left\{ f > \gamma - \frac{1}{k} \right\} \ ,$$

$$\{f \leqslant \gamma\} = \complement \{f > \gamma\} \quad , \quad \{f < \gamma\} = \complement \{f \geqslant \gamma\} \ ,$$

$$\{f < g\} = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Q}} \{f < \gamma\} \cap \{g > \gamma\} \ ,$$

$$\{f \leqslant g\} = \complement \{g < f\} \quad , \quad \{f = g\} = \{f \leqslant g\} \cap \{g \leqslant f\} \quad , \quad \{f \neq g\} = \complement \{f = g\} \ ,$$

$$\{f = \infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > k\} \quad , \quad \{f = -\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f \leqslant -k\} \ ,$$

Démonstration de (iii)

$$\{\alpha \cdot f > \gamma\} = \left\{ f > \frac{\gamma}{\alpha} \right\} \text{ si } \alpha > 0 \quad , \quad 0 \cdot f = 0 \quad , \quad \{-f > \gamma\} = \{f < -\gamma\} \ ,$$

$$\{f +_{\bullet} g > \gamma\} = \bigcup_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha + \beta \geqslant \gamma} \{f > \alpha\} \cap \{g > \beta\}$$

(cf. démonstration de la proposition 14.2),

$$\{f +^{\bullet} g > \gamma\} = \{(-f) +_{\bullet} (-g) < -\gamma\} \ ,$$

$$\{\min(f, g) > \gamma\} = \{f > \gamma\} \cap \{g > \gamma\} \ ,$$

$$\max(f, g) = -\min(-f, -g) \quad , \quad f^{\pm} = \max(\pm f, 0) \ ,$$

$$f_- = \min(f, 0) \quad , \quad |f| = \max(f, -f) \ ,$$

$$\{|f|^p > \gamma\} = \begin{cases} \left\{ |f| > \gamma^{\frac{1}{p}} \right\} & \gamma \geqslant 0 \\ & \text{si} \\ X & \gamma < 0 \end{cases} \ ,$$

$$\left\{ \frac{1}{f} > \gamma \right\} = \begin{cases} \left\{ f < \frac{1}{\gamma} \right\} \cap \{f > 0\} & \gamma \geqslant 0 \\ & \text{si} \\ \left\{ f < \frac{1}{\gamma} \right\} \cup \{f \geqslant 0\} & \gamma < 0 \end{cases} \ .$$

Si $\gamma \geqslant 0$, on a

$$\{f \cdot g > \gamma\} = \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}_+ , \alpha\cdot\beta \geqslant \gamma} \Big(\{f > \alpha\} \cap \{g > \beta\} \Big) \cup \Big(\{f < -\alpha\} \cap \{g < -\beta\} \Big) \ ,$$

puisque $f(x), g(x)$ ou $-f(x), -g(x)$ sont > 0 et dans le premier cas

$$\sup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}_+ , \alpha < f(x), \beta < g(x)} (\alpha \cdot \beta) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Q}_+ , \alpha < f(x)} \alpha \cdot \sup_{\beta \in \mathbb{Q}_+ , \beta < g(x)} \beta = f(x) \cdot g(x) \ .$$

Si $\gamma < 0$, on a

$$\{f \cdot g > \gamma\} = \complement \{f \cdot g \leqslant \gamma\} = \complement \left[\bigcap_{\gamma + \frac{1}{k} \leqslant 0} \left\{ f \cdot g < \gamma + \frac{1}{k} \right\} \right] =$$

$$= \bigcup_{\gamma + \frac{1}{k} \leqslant 0} \complement \left\{ (-f) \cdot g > - \left(\gamma + \frac{1}{k} \right) \right\} \ ,$$

Démonstration de (iv)

$$\{\sup_k f_k > \gamma\} = \bigcup_k \{f_k > \gamma\} \ ,$$

et finalement

$$\inf_k f_k = - \sup_k - f_k \quad , \quad \liminf_k f_k = \sup_k \inf_{l \geqslant k} f_l \quad , \quad \limsup_k f_k = - \liminf_k - f_k \ ,$$

$$\lim_k f_k = \limsup_k f_k \quad \text{si } \lim_k f_k \text{ existe} \ .$$

□

EXERCICE 1 Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est $\mathfrak{A}$-mesurable si, et seulement si, $f^{\pm}$ sont $\mathfrak{A}$-mesurables.

EXERCICE 2 Si (f_k) est une suite de fonctions $\mathfrak{A}$-mesurables, alors

$$\{x \in X \mid \lim_k f_k(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\} \in \mathfrak{A}$$

et la fonction f , définie par $f(x) := \lim_k f_k(x)$ si x appartient à cet ensemble et par 0 sinon, est $\mathfrak{A}$-mesurable.

COROLLAIRE *$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$ est une algèbre réticulée involutive, i.e. pour tout $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a*

$$\alpha \cdot f \ , \ f + g \ , \ f \cdot g \ , \ |f| \ , \ \overline{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}) \ .$$

Si $f \neq 0$ partout, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$, et pour toute suite $(f_k) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$, qui est ponctuellement convergente, on a $\lim_k f_k \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$.

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on voit facilement que $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A})$ est une algèbre involutive. Elle est réticulée, puisque

$$|f| = \left[(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \ .$$

Si $f \neq 0$ partout, alors $\frac{1}{|f|^2} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A})$, donc

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{|f|^2} \cdot \overline{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}) \ .$$

La dernière assertion est évidente. □

15.9 Ensembles et fonctions mesurables

DEFINITION 1 Nous désignerons par $\mathfrak{M}(\mu)$ l'ensemble des parties M dites *μ-mesurables* , i.e. telles que

$$M \cap A \in \mathfrak{I}(\mu) \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{I}(\mu) \ .$$

REMARQUE 1 Une partie μ-mesurable contenue dans une partie μ-intégrable est μ-intégrable.

PROPOSITION *L'ensemble $\mathfrak{M}(\mu)$ des parties μ-mesurables est une tribu contenant $\mathfrak{I}(\mu)$, ainsi que toutes les parties ouvertes ou fermées de X .*

Soient $M \in \mathfrak{M}(\mu)$ et (M_k) une suite de $\mathfrak{M}(\mu)$. Pour tout $A \in \mathfrak{I}(\mu)$, on a

$$\complement M \cap A = A \smallsetminus (M \cap A) \in \mathfrak{I}(\mu)$$

et

$$\left(\bigcup M_k\right) \cap A = \bigcup (M_k \cap A) = \bigcup_k \left[\bigcup_{l \leqslant k} (M_l \cap A)\right] \in \mathfrak{I}(\mu)$$

par le théorème 15.7, i et ii, puisque

$$\sup_k \mu\left(\bigcup_{l \leqslant k} (M_l \cap A)\right) \leqslant \mu(A) < \infty \ .$$

Ceci montre que $\complement M$ et $\bigcup M_k$ appartiennent à $\mathfrak{M}(\mu)$.

Il est clair qu'une partie μ-intégrable est μ-mesurable par le théorème 15.7.i. Si G est une partie ouverte, on a $1_G \in \mathcal{SK}_+(X)$ et le corollaire 15.6 montre que

$$1_{G \cap A} = \min(1_A, 1_G) \in \mathcal{L}^1(\mu) \ ,$$

donc que $G \cap A \in \mathfrak{I}(\mu)$, et par suite que $G \in \mathfrak{M}(\mu)$. Si F est une partie fermée, on a

$$F = \complement(\complement F) \in \mathfrak{M}(\mu) \ ,$$

puisque $\complement F$ est ouverte. □

DEFINITION 2 Les fonctions $\mathfrak{M}(\mu)$-mesurables sont dites *μ-mesurables* et l'ensemble de ces fonctions qui sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, respectivement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sera noté

$$\mathcal{M}(\mu) \quad , \quad \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mu) \quad \text{et resp.} \quad \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

Une fonction f est dit *μ-intégrable sur tout compact* si, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ la fonction $1_K \cdot f$ est μ-intégrable.

THEOREME *Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$).*

(i) Pour que f soit μ-mesurable, il faut et il suffit que $1_K \cdot f$ soit μ-mesurable pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$. En particulier, une partie M est μ-mesurable si, et seulement si, $M \cap K \in \mathfrak{I}(\mu)$ pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$.

(ii) Si f est μ-mesurable et si $g = f$ μ-p.p., alors g est μ-mesurable.

(iii) Si f est μ-intégrable sur tout compact, en particulier si f est μ-intégrable, alors f est μ-mesurable.

Le cas complexe se déduit immédiatement du cas réel, en séparant partie réelle et partie imaginaire.

Démonstration de (i) La condition est nécessaire par le théorème 15.8.iii. Démontrons qu'elle est suffisante. Pour tout compact K , l'ensemble

$$\{f > \gamma\} \cap K = \{1_K \cdot f > \gamma\} \cap K$$

est μ-intégrable. Mais pour tout ensemble μ-intégrable A , il existe d'après le théorème 15.7.iv une suite croissante $(K_l) \subset \mathfrak{K}(X)$ et une partie μ-négligeable N telles que

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l \cup N \ .$$

Ceci montre, puisque $\{f > \gamma\} \cap N$ est une partie μ-négligeable d'après le corollaire 15.1.i, que

$$\{f > \gamma\} \cap A = \left[\bigcup_{l=1}^{\infty} \{f > \gamma\} \cap K_l\right] \cup (\{f > \gamma\} \cap N)$$

est une partie μ-mesurable, donc μ-intégrable, car elle est contenue dans la partie μ-intégrable A .

Démonstration de (ii) Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\{g > \gamma\} = [\{f > \gamma\} \smallsetminus (\{f > \gamma\} \cap \{g \leqslant \gamma\})] \cup [\{f \leqslant \gamma\} \cap \{g > \gamma\}] \in \mathfrak{M}(\mu) \ ,$$

car

$$\{f > \gamma\} \cap \{g \leqslant \gamma\} \subset \{f > g\} \quad \text{et} \quad \{f \leqslant \gamma\} \cap \{g > \gamma\} \subset \{f < g\}$$

sont des parties μ-négligeables, donc μ-mesurables.

Démonstration de (iii) Supposons tout d'abord que f est μ-intégrable. Par la proposition 15.7 et la proposition ci-dessus, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\{f > \gamma\}, \{-f \geqslant \gamma\} \in \mathfrak{I}(\mu) \subset \mathfrak{M}(\mu) \quad \text{et} \quad \{f > -\gamma\} = \complement\{-f \geqslant \gamma\} \in \mathfrak{M}(\mu) \ .$$

D'autre part

$$\{f > 0\} = \bigcup_{k \geqslant 1} \left\{f > \frac{1}{k}\right\} \in \mathfrak{M}(\mu) \ .$$

Ceci montre que f est μ-mesurable.

Si maintenant pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ la fonction $1_K \cdot f$ est μ-intégrable, elle est μ-mesurable et il suffit d'appliquer (i). □

REMARQUE 2 On montre que l'ensemble des parties M telles que

$$M \cap A \in \mathfrak{I}^{\bullet}(\mu) \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{I}^{\bullet}(\mu)$$

est égale $\mathfrak{M}(\mu)$ et que les résultats ci-dessus sont encore valables dans le cadre de l'intégration essentielle.

EXERCICE Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas λ-mesurable.

(a) Montrer tout d'abord que $x - y \in \mathbb{Q}$ est une relation d'équivalence sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

(b) Soit $A \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ un système de représentants, i.e. A contient exactement un élément de chaque classe d'équivalence. Si (q_k) est une énumération de $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $A_k := q_k + A$, alors les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] .$$

(c) Montrer que l'ensemble A n'est pas λ-mesurable et que $\mu^*(A) > 0$.

Pour cela utiliser le fait que l'intégrale de Lebesgue λ est invariante par translation (cf. exemple 16.6.1), donc en particulier que si A est λ-intégrable, alors A_k l'est aussi et $\lambda(A_k) = \lambda(A)$.

(d) Montrer qu'il existe une suite décroissante $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$ telle que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = \emptyset$ et $\mu^*(B_k) \geqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

15.10 Critère d'intégrabilité

THEOREME *Pour qu'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) soit μ-intégrable, il faut et il suffit que f soit μ-mesurable et que*

$$\int^* |f| \ d\mu < \infty \quad \text{ou bien} \quad -\infty < \int_* f \ d\mu \leqslant \int^* f \ d\mu < \infty \ .$$

L'équivalence des conditions de finitude a été démontrée dans le corollaire 14.10 et il suffit de considérer le cas réel car

$$\int^* |\mathrm{Re}\, f| \ d\mu \ , \ \int^* |\mathrm{Im}\, f| \ d\mu \leqslant \int^* |f| \ d\mu \leqslant \int^* |\mathrm{Re}\, f| \ d\mu + \int^* |\mathrm{Im}\, f| \ d\mu \ .$$

La condition est nécessaire. En effet, si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$, donc $\int^* |f| \ d\mu < \infty$, et f est μ-mesurable par le théorème 15.9.iii.

Réciproquement, comme $f^{\pm}$ est aussi μ-mesurable par le théorème 15.8.iii, que

$$\int^* f^{\pm} \, d\mu \leqslant \int^* |f| \ d\mu < \infty$$

et que $f = f^+ -^{\bullet} f^-$ est μ-intégrable si $f^{\pm}$ le sont, nous sommes ramenés au cas $f \geqslant 0$.

Définissons alors

$$f_k := \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{l=1}^{k \cdot 2^k} 1_{\left\{f > \frac{l}{2^k}\right\}} \ .$$

On dit que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une *approximation pyramidale* de f . En effet on a $\left\{f > \frac{l}{2^k}\right\} \in \mathfrak{M}(\mu)$. Mais puisque $\int^* f \ d\mu < \infty$, on a

$$\left\{f > \frac{l}{2^k}\right\} \subset \left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}$$

pour un $s \in \mathcal{SK}(X)$ tel que $s \geqslant f$ et $\mu(s) < \infty$. Comme $\left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}$ est μ-intégrable par la proposition 15.7, on en déduit que $\left\{f > \frac{l}{2^k}\right\}$ est μ-intégrable par la remarque 15.9.1. Ceci prouve que f_k est μ-intégrable. Il suffit alors de constater que $f = \sup_k f_k$ et d'appliquer le théorème de Beppo Levi 14.12, puisque $\int^* f \ d\mu < \infty$. ☐

EXEMPLE 1 Le critère d'intégrabilité permet de démontrer simplement que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ est réticulé (cf. théorème 14.13.iii).

En effet si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, alors f est μ-mesurable par le théorème 15.9.i, donc $|f|$ est μ-mesurable par le corollaire 15.8. Mais comme $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont μ-intégrables, donc aussi $|\mathrm{Re}\, f|$ et $|\mathrm{Im}\, f|$ par le théorème 14.13.i, on obtient

$$\int^* |f| \ d\mu \leqslant \int^* (|\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|) \ d\mu < \infty \ ,$$

ce qui finit de prouver que $|f|$ est μ-intégrable. ☐

EXEMPLE 2 Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) des fonctions μ-mesurables. Pour que $f \cdot g$ soit μ-intégrable, il faut et il suffit que que

$$\int^* |f \cdot g| \, d\mu < \infty \ .$$

C'est immédiat, puisque $f \cdot g$ est μ-mesurable par le théorème 15.8.iii. $\square$

Ceci montre le progrès réalisé en comparaison de l'exemple 15.3 : si f et $A \subset X$ sont μ-intégrables, il suffit même que A soit μ-mesurable, alors f et 1_A sont évidemment μ-mesurables et

$$\int^* |1_A \cdot f| \, d\mu \leqslant \int^* |f| \, d\mu < \infty \, !$$

REMARQUE Le critère d'intégrabilité est encore valable dans le cadre de l'intégration essentielle.

EXERCICE 1 Déterminer l'ensemble des $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tels que

(a)
$$\mathrm{id}^q \cdot e^{p \cdot \mathrm{id}} \in \mathcal{L}^1\left(\lambda_{]1,\infty[}\right)$$

(b)
$$(-\ln)^q \cdot \sin^p \in \mathcal{L}^1\left(\lambda_{]0,\frac{1}{2}[}\right) \ .$$

EXERCICE 2 Soit f une fonction μ-mesurable.

(a) On suppose que $\{|f| > 0\}$ est μ-intégrable. Pour que f soit μ-intégrable, il faut et il suffit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(\{|f| \geqslant k\}\right) < \infty \ .$$

(b) On suppose que f est bornée. Pour que f soit μ-intégrable, il faut et il suffit que

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot \mu^*\left(\left\{|f| \geqslant 2^{-k}\right\}\right) < \infty \ .$$

(c) Formuler un critère d'intégrabilité analogue pour une fonction μ-mesurable quelconque.

15.11 Mesurabilité au sens de Lusin

Nous allons maintenant donner une condition suffisante de mesurabilité, essentiellement topologique. Le théorème de Lusin montre que c'est en fait une caractérisation de la mesurabilité.

DEFINITION On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est *μ-mesurable au sens de Lusin* si, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $L \in \mathfrak{K}(X)$ tel que

$$L \subset K \quad , \quad \mu(K \setminus L) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad f_{|L} \text{ soit s.c.i.}$$

PROPOSITION *Une fonction μ-mesurable au sens de Lusin est μ-mesurable.*

En particulier, les fonctions s.c.i. sont μ-mesurables. Plus généralement, soient M une partie μ-mesurable et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Si f est nulle hors de M et telle que $f_{|M}$ soit s.c.i., alors f est μ-mesurable.

Démontrons tout d'abord le cas particulier. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\{f > \gamma\} = \begin{cases} \{f_{|M} > \gamma\} & \text{si} \quad 0 \leqslant \gamma \\ X \setminus \{f_{|M} \leqslant \gamma\} & \phantom{\text{si}} \quad \gamma < 0 \end{cases} .$$

Comme $\{f_{|M} > \gamma\}$ est ouvert dans M , il existe un ouvert G de X tel que

$$\{f_{|M} > \gamma\} = G \cap M ,$$

ce qui montre que $\{f_{|M} > \gamma\}$ est μ-mesurable. Il en est de même de

$$\{f_{|M} \leqslant \gamma\} = M \setminus \{f_{|M} > \gamma\} ,$$

donc de $X \setminus \{f_{|M} \leqslant \gamma\}$. Si maintenant f est μ-mesurable au sens de Lusin, quel que soit le compact K de X , il existe par hypothèse une suite croissante (L_k) de compacts contenus dans K telle que $\mu(K \setminus \bigcup L_k) = 0$ et que chaque $f_{|L_k}$ soit s.c.i. On en déduit que

$$1_K \cdot f = \lim_k 1_{L_k} \cdot f \quad \mu\text{-p.p.} ,$$

et comme $1_{L_k} \cdot f$ est μ-mesurable par ce qui précède, $1_K \cdot f$ est μ-mesurable par les théorèmes 15.8.iv et 15.9.ii. Finalement, il suffit d'appliquer le théorème 15.9.i. □

La réciproque de cette proposition est vraie (cf. H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, 41.4).

THEOREME (de Lusin) *Pour qu'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) soit μ-mesurable, il faut et il suffit que f soit μ-mesurable au sens de Lusin.*

REMARQUE La démonstration de ce théorème montre que l'on peut renforcer la définition de la mesurabilité au sens de Lusin en remplaçant " $f_{|L}$ est s.c.i." par " $f_{|L}$ est continue".

15.12 Fonctions et intégrales modérées

DEFINITION Nous dirons qu'une fonction f est μ-*modérée* s'il existe une suite (croissante) (A_k) d'ensembles μ-intégrables tels que f s'annule hors de $\bigcup A_k$. Une partie A de X est dite μ-modérée si 1_A est μ-modérée. L'intégrale de Radon μ est dite modérée si X est μ-modérée.

EXEMPLE 1 Une fonction μ-intégrable est μ-modérée.

En effet $|f|$ est μ-intégrable, les ensembles $\left\{|f| > \frac{1}{k}\right\}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont μ-intégrables par la proposition 15.7 et f s'annule hors de leur réunion. □

EXEMPLE 2 Si μ est modérée, alors toute fonction sur X est μ-modérée.

EXEMPLE 3 Si X est réunion d'une suite (K_l) d'ensembles compacts, alors toute intégrale de Radon sur X est modérée.

En particulier toute intégrale de Radon sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ est modérée.

En effet X est la réunion des ensembles compacts

$$\left\{dist\left(\cdot, \complement X\right) \leqslant \frac{1}{k}\right\} \cap B\left(0, k\right)$$

pour $k \geqslant 1$. □

PROPOSITION *Soit f une fonction sur X .*

(i) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est μ-modérée.

(b) Il existe une suite (G_k) d'ensembles ouverts μ-intégrables telle que f s'annule hors de

$$\bigcup G_k \ .$$

(c) Il existe une suite $(K_l) \subset \mathfrak{K}(X)$ et une partie μ-négligeable N telles que f s'annule hors de

$$\left(\bigcup K_l\right) \cup N \ .$$

(ii) Si f est μ-modérée et $\geqslant 0$, alors

$$\int^* f \ d\mu = \sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X)} \int^* 1_K \cdot f \ d\mu \ .$$

(iii) Si f est μ-modérée, μ-mesurable et $\int_* f \, d\mu > -\infty$, alors

$$\int_* f \ d\mu = \int^* f \, d\mu \ .$$

(iv) Si A est une partie μ-mesurable et μ-modérée, alors

$$\mu^*(A) = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X), K\subset A} \mu(K) \ .$$

Démonstration de (i) Cela découle immédiatement du théorème 15.7.iv, puisque d'une part une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (théorème 6.12) et d'autre part une réunion dénombrable d'ensemble μ-négligeables est μ-négligeable (Corollaire 15.1.i).

Démonstration de (ii) Par (i), en supposant que (K_l) est croissante, on a évidemment

$$f = \sup_l 1_{K_l} \cdot f \quad \mu\text{-p.p.} \ ,$$

donc

$$\int^* f \, d\mu = \sup_l \int^* 1_{K_l} \cdot f \, d\mu \leqslant \sup_{K\in\mathfrak{K}(X)} \int^* 1_K \cdot f \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu$$

grâce à la propriété de Daniell 14.11.

Démonstration de (iii) Par (i), en supposant que (K_l) est croissante, on a évidemment

$$f = \sup_l \min(f, l\cdot 1_{K_l}) \ .$$

Puisque $\min(f, l\cdot 1_{K_l})$ est μ-mesurable et $f_- \leqslant \min(f, l\cdot 1_{K_l}) \leqslant l\cdot 1_{K_l}$, le critère d'intégrabilité 15.10 montre que cette fonction est μ-intégrable. On a donc

$$\int_* f \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu = \sup_{l\in\mathbb{N}} \int^* \min(f, l\cdot 1_K) \, d\mu = \sup_{l\in\mathbb{N}} \int_* \min(f, l\cdot 1_K) \, d\mu \leqslant \int_* f \, d\mu \ ,$$

en ayant à nouveau utilisé la propriété de Daniell 14.11.

Démonstration de (iv) C'est immédiat, puisque $1_K \cdot 1_A = 1_{K\cap A}$, en appliquant le théorème 15.7.iv. □

REMARQUE Les propriétés (ii)-(iv) sont automatiquement vraies, sans hypothèse de modération, dans le cadre de l'intégration essentielle :

(a) Si f est une fonction $\geqslant 0$, on a

$$\int^\bullet f \, d\mu = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X)} \int^* 1_K \cdot f \, d\mu \ .$$

En particulier, pour tout $x \in X$, soit V_x un voisinage μ-intégrable de x . Si A est une partie de X , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathfrak{J}^\bullet(\mu)$.

(ii) $A \cap V_x$ est μ-négligeable pour tout $x \in X$.

(iii) $A \cap K$ est μ-négligeable pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$.

Il est donc justifié de dire qu'une telle partie est localement μ-négligeable (cf. remarque 15.1)

(b) Si f est μ-mesurable et $\int_\bullet f \, d\mu > -\infty$, alors

$$\int_\bullet f \, d\mu = \int^\bullet f \, d\mu \ .$$

(c) Si f est μ-mesurable et $\int_* f \, d\mu > -\infty$, alors

$$\int_* f \; d\mu = \int^\bullet f \, d\mu \ .$$

(d) Si A est une partie μ-mesurable, alors

$$\mu^\bullet (A) = \sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X), K \subset A} \mu (K) \ .$$

Si μ est modérée, alors l'intégrale supérieur et l'intégrale supérieure essentielle coïncident.

15.13 Espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$

Dans tout ce qui suit soit $p \in [1, \infty]$ sauf mention expresse du contraire.

DEFINITION Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$), on pose

$$\|f\|_p := \left(\int^* |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \text{si } p \in [1, \infty[$$

et

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}}_+ \;\middle|\; |f| \leqslant M \ \mu\text{-p.p.} \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

On désigne par $\mathcal{L}^p(\mu)$, respectivement $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, l'ensemble des fonctions μ-mesurables f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p < \infty$, et on dit qu'elles sont de *puissance p-ème intégrables* si $p \in [1, \infty[$, respectivement *μ-bornées* si $p = \infty$.

REMARQUE 1 Le critère d'intégrabilité 15.10 montre que dans le cas $p = 1$ cette définition coïncide bien avec celle de 14.8.

REMARQUE 2 Si $p \in [1, \infty[$, une fonction de puissance p-ème intégrable est μ-modérée.

REMARQUE 3 Rappelons que $\mathcal{C}^b_{\mathbb{C}}(X)$ est un espace de Banach pour la norme uniforme

$$f \longmapsto \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \ .$$

Il faut évidemment faire attention aux deux significations du symbole $\|\cdot\|_\infty$. On écrit $\|\cdot\|_{\infty,\mu}$ s'il faut préciser.

PROPOSITION *Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) . Alors*

(i)
$$\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ (ou } \mathbb{C} \textit{).}$$

(ii)
$$\|f\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \ \mu\textit{-p.p.} \ .$$

(iii)
$$|f| \leqslant |g| \ \mu\textit{-p.p.} \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_p \leqslant \|g\|_p \ .$$

(iv)
$$|f| \leqslant \|f\|_\infty \quad \mu\textit{-p.p.} \ .$$

(v) Si $\|f\|_p < \infty$, alors f est finie μ-p.p. .

(vi) ***Inégalité de Hölder :***

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

(vii) ***Inégalité de Minkowski*** *:*

$$\|f +^{\bullet} g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

(viii) ***Sous-additivité dénombrable*** *: Pour toute suite (f_k) de fonctions $\geqslant 0$, on a*

$$\left\|\sum f_k\right\|_p \leqslant \sum \|f_k\|_p \ .$$

L'assertion (i) est immédiate. Si $p \in [1, \infty[$, (ii) découle du théorème 15.1.ii et (iii) du théorème 15.2.i. Si $p = \infty$, alors (ii) est une conséquence de (iv) et (iii) est triviale. Quant à (iv), par définition il existe une suite (M_k) telle que $\|f\|_\infty = \inf_k M_k$ et

$$|f| \leqslant M_k \quad \mu\text{-p.p. pour tout } k \ .$$

Comme une réunion dénombrable d'ensembles μ-négligeables est μ-négligeable par le corollaire 15.1.i, il vient

$$|f| \leqslant \inf_k M_k = \|f\|_\infty \quad \mu\text{-p.p.} \ .$$

L'assertion (v) découle de (iv) dans le cas $p = \infty$. Si $p \in [1, \infty[$, il suffit d'appliquer le corollaire 15.1.ii, puisque $\int^* |f|^p \, d\mu < \infty$.

Pour démontrer les inégalités de Hölder et Minkowsky, on procède de la même manière que dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) en considérant cet ensemble comme celui des fonctions définies sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et en remplaçant $\sum$ par $\int^* \diamond \, d\mu$.

Finalement, si $p \in [1, \infty[$, on a

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right\|_p = \left[\int^* \left(\sup_k \sum_{l=0}^{k} f_l\right)^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_k \left[\int^* \left(\sum_{l=0}^{k} f_l\right)^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_k \left\|\sum_{l=0}^{k} f_l\right\|_p \leqslant \sup_k \sum_{l=0}^{k} \|f_k\|_p = \sum_{l=0}^{\infty} \|f_k\|_p \ .$$

Si $p = \infty$, alors $|f_k| \leqslant \|f_k\|_\infty$ μ-p.p. , d'où le résultat en sommant. □

COROLLAIRE $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ *est un espace vectoriel.*

C'est immédiat. □

REMARQUE 4 On désigne par $\mathcal{L}^{\bullet p}(\mu)$, respectivement $\mathcal{L}^{\bullet p}_{\mathbb{C}}(\mu)$, l'ensemble des fonctions μ-mesurables f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_p := \left(\int^{\bullet} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{si } p \in [1, \infty[$$

et

$$\|f\|_\infty := \inf\left\{M \in \overline{\mathbb{R}}_+ \;\middle|\; |f| \leqslant M \text{ localement } \mu\text{-p.p.}\right\} < \infty \quad \text{si } p = \infty \ ,$$

et on dit qu'elles sont de *puissance p-ème essentiellement intégrables* si $p \in [1, \infty[$, respectivement *essentiellement μ-bornées* si $p = \infty$.

Les résultats ci-dessus sont encore valables dans ce cas en remplaçant " μ-p.p." par "localement μ-p.p.".

EXERCICE 1 Supposons que $\mu^*(X) < \infty$. Pour tout $p, r \in [1, \infty[$ tels que $p < r$ et toute fonction f , on a

$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{r-p}{p \cdot r}} \cdot \|f\|_r \ .$$

En particulier

$$\mathcal{L}^r_{\mathbb{C}}(\mu) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

EXERCICE 2 Supposons que $0 < \mu^*(X) < \infty$ et soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que

$$\limsup_p \|f\|_p = \|f\|_\infty = \liminf_p \|f\|_p \ ,$$

en prouvant les inégalités

$$\limsup_p \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \liminf_p \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty \ .$$

Pour la seconde utiliser et démontrer que, pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\int^*_{\{f > \gamma\}} f^p \, d\mu \geqslant \gamma^p \cdot \mu^*(\{f > \gamma\}) \ .$$

EXERCICE 3 Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) \cap \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$, alors $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ pour tout $p \in]1, \infty[$ et on a

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \ .$$

EXERCICE 4 (Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff)

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $m := \int f \, d\mu$. Si $f - m \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$, alors en posant $\sigma := \|f - m\|_2$, on a

$$\mu(\{|f - m| \geqslant t\sigma\}) \leqslant \frac{1}{t^2} \ .$$

(b) Soit $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$. Alors

$$\mu(\{|f| \geqslant \gamma\}) \leqslant \frac{\|f\|_2^2}{\gamma^2} \ .$$

(c) Supposons que $\mu(X) = 1$ et soient $\varepsilon, \delta > 0$. Si l'on approxime une fonction μ-mesurable g à l'aide d'une fonction μ-mesurable h de telle manière que $\|h - g\|_2 \leqslant \delta$, montrer que la probabilité, en choisissant $x \in X$ de manière aléatoire (suivant la loi μ), que l'on ait $|g(x) - h(x)| < \varepsilon$ est plus grande que

$$1 - \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \ .$$

En particulier cette probabilité est $\geqslant 0.99$ si $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{10}$.

Cf. proposition 15.7.

15.14 Théorème de Riesz-Fischer

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f = 0$ μ-p.p. .

On a

$$f \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \|f\|_p = 0 \ ,$$

ce qui montre que $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. Remarquons que

$$f - g \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \ \mu\text{-p.p.} \ .$$

DEFINITION 2 On pose

$$\mathbf{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) / \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

C'est un espace vectoriel, formé des classes d'équivalences

$$[f] := \{ g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \mid g = f \ \mu\text{-p.p.} \} = f + \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu)$$

pour $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. Par définition on a

$$g \in [f] \quad \Longleftrightarrow \quad [g] = [f] \ ,$$

$$\alpha \cdot [f] = [\alpha \cdot f] \quad \text{et} \quad [f] + [g] = [f+g] \ .$$

DEFINITION 3 On dit que f est un *représentant* de la classe d'équivalence $[f]$ et on pose

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \ .$$

En effet on a $\|g\|_p = \|f\|_p$ si $g \in [f]$.

THEOREME $\mathbf{L}^p(\mu)$ *est un espace de Banach pour la norme*

$$[f] \longmapsto \|[f]\|_p \ .$$

Plus précisément, si $([f_k])$ *est une suite de Cauchy de* $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ *, il existe une sous-suite* α *de* $\mathbb{N}$ *et une fonction* $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *telles que* $\left(f_{\alpha(l)}\right)$ *converge ponctuellement* μ*-p.p. vers une fonction* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ *et que* $\left|f_{\alpha(l)}\right| \leqslant g$ *pour tout* l *. On a*

$$[f] = \lim_k [f_k] \quad \textit{dans } \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

Il est clair que c'est un espace normé par la proposition 15.13, puisqu'on a $\|[f]\|_p = 0$ si, et seulement si, $f = 0$ μ-p.p. , i.e. $[f] = 0$.

Comme $\lim_{k,l} \|[f_k] - [f_l]\|_p = 0$, pour tout $j \geqslant 0$, il existe $\alpha(j)$ tel que

$$\|[f_k] - [f_l]\|_p \leqslant \frac{1}{2^j} \quad \text{si } k, l \geqslant \alpha(j) \ .$$

On peut supposer que la suite $(\alpha(j))$ est strictement croissante, donc que

$$\left\| \left[f_{\alpha(j+1)}\right] - \left[f_{\alpha(j)}\right] \right\|_p = \left\| f_{\alpha(j+1)} - f_{\alpha(j)} \right\|_p \leqslant \frac{1}{2^j} \quad \text{pour tout } j \ .$$

Posons

$$h := \sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{\alpha(j+1)} - f_{\alpha(j)} \right| : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Pour tout l , on a

$$f_{\alpha(l)} = f_{\alpha(0)} + \sum_{j=0}^{l-1} \left(f_{\alpha(j+1)} - f_{\alpha(j)} \right) \ ,$$

donc

$$\left| f_{\alpha(l)} \right| \leqslant \left| f_{\alpha(0)} \right| + \sum_{j=0}^{l-1} \left| f_{\alpha(j+1)} - f_{\alpha(j)} \right| \leqslant \left| f_{\alpha(0)} \right| + h =: g$$

Par la sous-additivité dénombrable proposition 15.13.viii, il vient

$$\|h\|_p \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left\| f_{\alpha(j+1)} - f_{\alpha(j)} \right\|_p \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty \ .$$

Ceci montre que $h \in \mathcal{L}^p(\mu)$, puisque h est évidemment μ-mesurable. On a donc aussi $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Nous avons également prouver que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \left(f_{\alpha(j+1)}(x) - f_{\alpha(j)}(x) \right)$ converge absolument pour tout $x \in \{h < \infty\}$, donc pour μ-presque tous les $x \in X$ par la proposition 15.13.v. Posons

$$f(x) := f_{\alpha(0)}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(f_{\alpha(j+1)}(x) - f_{\alpha(j)}(x) \right) \quad \text{si } x \in \{h < \infty\} \ ,$$

et

$$f(x) := 0 \quad \text{sinon.}$$

On a alors $f = \lim_l f_{\alpha(l)}$ μ-p.p. , donc f est μ-mesurable. En outre $|f| \leqslant g$, donc

$$\|f\|_p \leqslant \|g\|_p < \infty \ ,$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Finalement, on obtient

$$\left\| [f] - \left[f_{\alpha(j)}\right] \right\|_p = \left\| f - f_{\alpha(j)} \right\|_p = \left\| \sum_{l=j}^{\infty} \left(f_{\alpha(l+1)} - f_{\alpha(l)} \right) \right\|_p \leqslant \left\| \sum_{l=j}^{\infty} \left| f_{\alpha(l+1)} - f_{\alpha(l)} \right| \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=j}^{\infty} \left\| f_{\alpha(l+1)} - f_{\alpha(l)} \right\|_p \leqslant \sum_{l=j}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{j-1}} \ ,$$

puis

$$\|[f] - [f_k]\|_p \leqslant \left\| [f] - \left[f_{\alpha(j)}\right] \right\|_p + \left\| \left[f_{\alpha(j)}\right] - [f_k] \right\|_p \leqslant \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^j} \quad \text{si } k \geqslant \alpha(j) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 Nous ne distinguerons pas une fonction de sa classe, si aucune confusion n'en résulte.

Par exemple, nous considérerons $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, i.e. comme l'ensemble des classes $[\varphi]$ pour $\varphi \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$. Remarquons que le représentant $\varphi \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ n'est pas univoquement déterminé s'il existe $\psi \in \mathcal{K}_+(X)$ tel que $\mu(\psi) = 0$. Dans le cas localement compact cela signifie qu'il existe un ouvert non-vide G de X tel que $\mu(G) = 0$ en utilisant le théorème 14.4 et la propriété de Bourbaki 14.5. Ainsi :

Si pour tout ouvert non-vide G de X , on a $\mu^*(G) > 0$, alors

$$\varphi \longmapsto [\varphi] : \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$$

est injective.

Les intégrales de Lebesgue λ_X , où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou une sous-variété avec bord (cf. § 17), satisfont à cette propriété.

REMARQUE 2 Désignons par $\mathcal{N}^{\bullet}_{\mathbb{C}}(\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f = 0$ localement μ-p.p. .Puisqu'une fonction essentiellement μ-intégrable est égale localement μ-p.p. à une fonction μ-intégrable, on voit facilement que

$$\mathcal{L}^{\bullet p}_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}^{\bullet}_{\mathbb{C}}(\mu) = \mathcal{L}^{p}_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu) = \mathbf{L}^p(\mu) \quad \text{si } p \in [1, \infty[\ .$$

Le cas $p = \infty$ est spécial ! L'application canonique

$$\mathbf{L}^{\infty}(\mu) := \mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu) \longrightarrow \mathcal{L}^{\bullet\infty}_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}^{\bullet}_{\mathbb{C}}(\mu) =: \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\mu)$$

est surjective, mais n'est en général pas injective (cf. exercice 16.3.3).

Si l'on ne veut pas supposer que μ soit modérée, il est préférable dans certaine situation,par exemple dans la théorie du relèvement, de travailler avec $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}_{\mathbb{R}}(\mu)$. Cet espace est complètement réticulé, i.e. toute partie majorée de $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}_{\mathbb{R}}(\mu)$ possède une borne supérieure.

Nous désignerons par

$$\mathbf{M}(\mu) := \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu) \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{\bullet}(\mu) := \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}^{\bullet}_{\mathbb{C}}(\mu)$$

les espaces vectoriels quotients, modulo les fonctions μ-négligeables et respectivement localement μ-négligeables, de celui des fonction μ-mesurables à valeurs complexes.

EXERCICE 1 Soit (f_k) une suite de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ convergente vers $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. Si (f_k) est également une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^b_{\mathbb{C}}(X)$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors il existe une modification de f sur un ensemble μ-négligeable qui soit continue.

EXERCICE 2 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit (j, m) l'unique couple de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$k = 2^j + m \quad \text{et} \quad 0 \leqslant m < 2^j \ ,$$

et définissons $f_k := 1_{\left[\frac{m}{2^j}, \frac{m+1}{2^j}\right]}$. Pour tout $p \in [1, \infty[$, montrer que (f_k) converge dans $\mathbf{L}^p\left(\lambda_{[0,1]}\right)$, mais que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_k(x))$ est divergente. Déterminer une sous-suite convergente $\lambda_{[0,1]}$-p.p. .

15.15 Théorèmes de densité

DEFINITION 1 Une partie A d'un espace normé F est dite *totale* si le sous-espace vectoriel engendré par A est dense dans F , i.e. si

$$\overline{\text{lin}} A = F \ .$$

Etant donné $p \in [1, \infty[$ et $s \in \mathcal{SK}(X)$, on a

$$|s|^p = \left(s^+\right)^p + \left(s^-\right)^p \ ,$$

donc

$$\int^* |s|^p \, d\mu < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int^* \left(s^+\right)^p \, d\mu < \infty$$

puisque $s^- \leqslant M \cdot 1_K$ pour un $M \in \mathbb{R}_+$ et $K \in \mathfrak{K}(X)$.

DEFINITION 2 Nous utiliserons la notation

$$\mathcal{SK}^{p,\mu}(X) := \left\{ s \in \mathcal{SK}(X) \;\middle|\; \int^* |s|^p \, d\mu < \infty \right\} = \left\{ s \in \mathcal{SK}(X) \;\middle|\; \int^* \left|s^+\right|^p \, d\mu < \infty \right\} \ .$$

THEOREME *Soit $p \in [1, \infty[$. Les familles $(1_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)}$, $(1_G)_{G \in \mathfrak{T}(X), \mu^*(G) < \infty}$ et $(1_A)_{A \in \mathfrak{I}(\mu)}$, ainsi que les parties $\mathcal{SK}_-(X)$, $\mathcal{SK}_+^{p,\mu}(X)$ et $\mathcal{SK}^{p,\mu}(X)$ sont totales dans $\mathbf{L}^p(\mu)$.*

Si A désigne l'une de ces familles ou de ces parties, cela signifie que, pour tout $f \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \text{lin}\, A$ tel que

$$\|f - \varphi\|_p \leqslant \varepsilon \ .$$

Le théorème d'approximation 15.6 entraîne immédiatement la densité de $\mathcal{SK}^{1,\mu}(X)$ dans $\mathbf{L}^1(\mu)$. En effet étant donné $f \in \mathbf{L}^1(\mu)$, avec les notations de ce théorème on a $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{SK}^{1,\mu}(X)$ et

$$\lim_k \|s_k - f\|_1 = \lim_k \int (s_k - f) \, d\mu = 0 \ .$$

Mais pour démontrer les autres assertions il est préférable d'utiliser les résultats obtenus entre temps !

Soit $f \in \mathbf{L}^p(\mu)$. En décomposant f en partie réelle et imaginaire, puis en partie positive et négative, nous pouvons supposer que $f \geqslant 0$. Comme dans la démonstration du critère d'intégrabilité 15.10, considérons l'approximation pyramidale $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $f = \sup_k f_k$ définie par

$$f_k := \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{l=1}^{k \cdot 2^k} 1_{\left\{f > \frac{l}{2^k}\right\}} \ ;$$

on montre de la même manière, puisque $f^p \in \mathbf{L}^1(\mu)$, que $\left\{f > \frac{l}{2^k}\right\} = \left\{f^p > \frac{l}{2^{p \cdot k}}\right\}$ est une partie μ-intégrable. On a évidemment $f_k \in \mathbf{L}^p(\mu)$, donc $\mathbf{L}^1(\mu) \ni (f - f_k)^p$ converge ponctuellement en décroissant vers 0 et

$$\lim_k \|f_k - f\|_p^p = \lim_k \int (f - f_k)^p \, d\mu = 0$$

par le théorème de Lebesgue. Ceci montre que $\mathrm{lin}\,(1_A)_{A\in\mathfrak{I}(\mu)}$ est dense dans $\mathbf{L}^p(\mu)$.

Le théorème 15.7.iv montrant que toute partie μ-intégrable est approximable de l'intérieur à l'aide d'un compact et de l'extérieur à l'aide d'une partie ouverte μ-intégrable, on en déduit que $\mathrm{lin}\,(1_K)_{K\in\mathfrak{K}(X)}$ et $\mathrm{lin}\,(1_G)_{G\in\mathfrak{T}(X),\mu^*(G)<\infty}$ sont aussi dense dans $\mathbf{L}^p(\mu)$. Puisque $(1_K)_{K\in\mathfrak{K}(X)} \subset \mathcal{SK}_-(X)$ et $(1_G)_{G\in\mathfrak{T}(X),\mu^*(G)<\infty} \subset \mathcal{SK}_+^{p,\mu}(X)$ le reste est évident. □

DEFINITION 3 Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{C}$. Nous dirons que φ est une fonction en *escalier* sur J s'il existe un intervalle $[a,b] \subset J$ tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [a,b]$ et $\mathrm{Re}\,\varphi_{|[a,b]}, \mathrm{Im}\,\varphi_{|[a,b]} \in \mathcal{E}([a,b])$ (cf. définition 9.1). Nous désignerons par $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(J)$ l'espace vectoriel de ces fonctions.

COROLLAIRE *Soit* $p \in [1,\infty[$.

(i) *Si X est localement compact, alors $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ est dense dans $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.*

(ii) *Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(J)$ est dense dans $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_J)$.*

Démonstration de (i) Le théorème 14.4 et la propriété de Bourbaki 14.5 montrent que pour tout $s \in \mathcal{SK}_+^{p,\mu}(X)$, on a

$$s = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}_+(X),\varphi\leqslant s} \varphi \quad , \text{donc} \quad s^p = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}_+(X),\varphi\leqslant s} \varphi^p \in \mathcal{SK}_+^{1,\mu}(X)$$

et

$$\mu(s^p) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}_+(X),\varphi\leqslant s} \mu(\varphi^p) < \infty\,;$$

il existe une suite croissante $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_+(X)$ telle que $\varphi_k \leqslant s$ et $\mu(s^p) = \sup_k \mu(\varphi_k^p)$. Le théorème 15.2.iii montre alors que $s = \sup_k \varphi_k$ μ-p.p. , donc

$$\lim_k \|\varphi_k - s\|_p^p = \lim_k \int (s - \varphi_k)^p \, d\mu = 0$$

par le théorème de Lebesgue.

Démonstration de (ii) Soient $f \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_J)$ et $\varepsilon > 0$ donnés. Par ce qui précède il existe $\varphi \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(J)$ tel que $\|f - \varphi\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [a,b]$ pour certains $a,b \in J$. D'après la démonstration du théorème 9.5, en séparant partie réelle et partie imaginaire, il existe $\psi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(J)$ tel que $\psi = 0$ hors de $[a,b]$ et $\|\varphi - \psi\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)^{\frac{1}{p}}}$. Il vient alors

$$\|\varphi - \psi\|_p^p = \int_a^b |\varphi - \psi|^p \leqslant \|\varphi - \psi\|_\infty^p \cdot (b-a) \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \ ,$$

puis

$$\|f - \psi\|_p \leqslant \|f - \varphi\|_p + \|\varphi - \psi\|_p \leqslant \varepsilon\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE Le théorème est faux si $p = \infty$.

Par exemple si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$, on a $\|1-\varphi\|_{\infty,\lambda_X} = 1$, ce qui montre que

$$1 \in \mathbf{L}^{\infty}_{\mathbb{C}}(\lambda_X) \smallsetminus \overline{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)} \ .$$

EXERCICE 1 Montrer qu'il existe un plus grand ouvert $G \subset X$ qui soit μ-négligeable. On dit que $\operatorname{supp}\mu := \complement G$ est le *support* de μ .

Soit $x \in X$. Pour que $x \in \operatorname{supp}\mu$, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de x , on ait $\mu^*(V) > 0$.

EXERCICE 2 On suppose que X est localement compact et soit μ une intégrale de Radon sur X .

(a) Montrer que

$$\overline{\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)} = \mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(X) \subsetneq \mathbf{L}^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

(b) Pour que $1 \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(X) \subset \mathbf{L}^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mu)$, il faut et il suffit que $\operatorname{supp}\mu$ soit compact.

EXERCICE 3 Soient X un espace complétement régulier, μ une intégrale de Radon sur X , $\mathcal{U}(\mu)$ l'ensemble des ouverts U de X tels que $\mu^*(U) < \infty$ et $\mathcal{K}^{\mu}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur X ayant un support μ-intégrable. Montrer

(a) $\mathcal{U}(\mu)$ est une base stable par réunion finie de la topologie de X .

(b) $\mathcal{K}^{\mu}(X)) = \mathcal{K}_{\mathcal{U}(\mu)}(X)$ (cf. exercice 14.4.2).

(c) $\mathcal{K}^{\mu}(X)$ est dense dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour tout $p \in [1,\infty[$.

15.16 Espaces de Hilbert

Si $f, g \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$, alors $\overline{f} \cdot g \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ puisque

$$\left\|\overline{f} \cdot g\right\|_1 \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty \ .$$

L'application

$$(f, g) \longmapsto (f|\, g) := \int \overline{f} \cdot g \; d\mu : \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu) \times \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un produit scalaire.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est rien d'autre que l'inégalité de Hölder, puisque

$$|(f|\, g)| \leqslant \left\|\overline{f} \cdot g\right\|_1 \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \ ,$$

et $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un espace de Banach dont la norme provient de ce produit scalaire :

$$\|f\|_2 = (f|\, f)^{\frac{1}{2}} \ .$$

DEFINITION Un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire s'appelle un *espace de Hilbert* .

EXEMPLE Les espaces $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ sont donc des espaces de Hilbert. Dans ce qui suit nous allons étudier l'espace de Hilbert

$$\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1]) := \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}\left(\lambda_{[0,1]}\right)$$

plus en détail.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, définissons

$$e_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto e^{2\pi i k \cdot x} \ .$$

On a $e_k \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$, puisque e_k est continue, et

$$(e_k|\, e_l) = \int_0^1 e^{-2\pi i k \cdot x} \cdot e^{2\pi i l \cdot x} \, dx = \int_0^1 e^{2\pi i (l-k) \cdot x} \, dx = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout } k, l \in \mathbb{Z} \ .$$

On dit que le système $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est *orthonormé* .

Une fonction du type

$$P = \sum_{k \in K} c_k \cdot e_k \ ,$$

où K est une partie finie de $\mathbb{Z}$, i.e.

$$P(x) = \sum_{k \in K} c_k \cdot e^{2\pi i k \cdot x} \quad \text{pour } x \in [0,1] \ ,$$

s'appelle un *polynôme trigonométrique* .

PROBLEME Peut-on approximer toute fonction $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ par des polynômes trigonométriques ?

Nous allons y répondre par l'affirmative lorsque la notion d'approximation est prise au sens de la norme $\|\cdot\|_2$, dite *approximation en moyenne quadratique* . Dans ce qui suit J est un ensemble d'indices muni de la tpologie discrète.

THEOREME *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $(\epsilon_j)_{j\in J}$ un système orthonormé de $\mathcal{H}$, i.e. tel que*

$$(\epsilon_k|\, \epsilon_l) = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout } k,l \in J \ ,$$

et pour tout $K \in \mathfrak{K}(J)$, désignons par $\mathcal{H}_K$ le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par $(\epsilon_k)_{k\in K}$. Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\inf \left\{ \|\xi - P\|^2 \ \middle|\ P \in \mathcal{H}_K \right\} = \|\xi\|^2 - \sum_{k\in K} |(\epsilon_k|\, \xi)|^2 = \left\|\xi - \widehat{P}\right\|^2 \ ,$$

avec

$$\widehat{P} := \sum_{k\in K} (\epsilon_k|\, \xi) \cdot \epsilon_k \ ,$$

et $\widehat{P}$ est l'unique $P \in \mathcal{H}_K$ où le minimum est atteint. En d'autres termes $\widehat{P}$ est la ***meilleure approximation*** *de ξ par un élément de $\mathcal{H}_K$.*

Pour tout $P \in \mathcal{H}_K$, on a

$$\|\xi - P\|^2 = \left(\xi - \sum_{k\in K} c_k \cdot \epsilon_k \,\middle|\, \xi - \sum_{l\in K} c_l \cdot \epsilon_l \right) =$$

$$= (\xi|\, \xi) - \sum_{k\in K} \overline{c_k} \cdot (\epsilon_k|\, \xi) - \sum_{l\in K} c_l \cdot (\xi|\, \epsilon_l) + \sum_{k,l\in K} \overline{c_k} \cdot c_l \cdot (\epsilon_k|\, \epsilon_l) =$$

$$= \|\xi\|^2 - \sum_{k\in K} \overline{c_k} \cdot (\epsilon_k|\, \xi) - \sum_{k\in K} c_k \cdot (\xi\,|\epsilon_k) + \sum_{k\in K} \overline{c_k} \cdot c_k =$$

$$= \|\xi\|^2 - \sum_{k\in K} |(\epsilon_k|\, \xi)|^2 + \sum_{k\in K} |c_k - (\epsilon_k|\, \xi)|^2 \ ,$$

puisque

$$|c_k - (\epsilon_k|\, \xi)|^2 = \left[\overline{c_k} - \overline{(\epsilon_k|\, \xi)}\right] [c_k - (\epsilon_k|\, \xi)] = \overline{c_k} \cdot c_k - \overline{c_k} \cdot (\epsilon_k|\, \xi) - c_k \cdot (\xi\,|\epsilon_k) + |(\epsilon_k|\, \xi)|^2 \ .$$

Il est alors clair que $P \longmapsto \|\xi - P\|^2$ atteint son minimum en P si, et seulement si, on a

$$\sum_{k\in K} |c_k - (\epsilon_k|\, \xi)|^2 = 0 \ ,$$

c'est-à-dire si $P = \widehat{P}$. □

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

COROLLAIRE ***Inégalité de Bessel*** *Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a*

$$\sum_{j\in J} |(\epsilon_j|\, \xi)|^2 := \sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{k\in K} |(\epsilon_k|\, \xi)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ .$$

En particulier, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, l'ensemble $\{j \in J \mid (\epsilon_j|\, \xi) \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

En effet $\left\{ j \in J \;\middle|\; (\epsilon_j | \xi) \geqslant \frac{1}{k} \right\}$ pour $k \geqslant 1$ est fini. $\square$

EXERCICE Soit $f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}([0,1])$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{-2\pi i k \cdot \mathrm{id}} \cdot f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}([0,1])$ et que

$$\left| \int_0^1 e^{-2\pi i k \cdot x} \cdot f(x)\, dx \right| \leqslant \|f\|_1 \ .$$

Utilisant la densité de $\mathcal{C}([0,1])$ dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{C}}([0,1])$ prouver le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{|k| \to \infty} \int_0^1 e^{-2\pi i k \cdot x} \cdot f(x)\, dx = 0 \ .$$

15.17 Coefficients de Fourier

DEFINITION Pour tout $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$, le nombre complexe

$$(e_k|\, f) = \int_0^1 e^{-2\pi i k \cdot x} \cdot f(x)\ dx$$

s'appelle le *k-ième coefficient de Fourier* de f .

De manière générale, on dit aussi que $(\epsilon_j|\,\xi)$ est le *j-ième coefficient de Fourier* de ξ dans le système orthonormé $(\epsilon_j)_{j\in J}$.

EXEMPLE Soit $a \in [0,1]$. On a

$$\left(e_0 \left| 1_{[0,a[}\right.\right) = \int_0^a dx = a$$

et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right) = \int_0^a e^{-2\pi i k\cdot x}\, dx = \left[-\frac{1}{2\pi i k}\cdot e^{-2\pi i k\cdot x}\right]_0^a = \frac{1}{2\pi i k}\cdot\left(1-e^{-2\pi i k\cdot a}\right) .$$

Il vient alors

$$\left|\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right)\right|^2 = \frac{1}{(2\pi k)^2}\cdot\left(1-e^{2\pi i k\cdot a}\right)\left(1-e^{-2\pi i k\cdot a}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi k)^2}\cdot\left(2-e^{2\pi i k\cdot a}-e^{-2\pi i k\cdot a}\right) = \frac{1-\cos 2\pi k\cdot a}{2\pi^2 k^2} ,$$

donc

$$\sup_{K\in\mathfrak{K}(\mathbb{Z})}\sum_{k\in K}\left|\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right)\right|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{|k|\leqslant n}\left|\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right)\right|^2 =$$

$$= a^2 + \frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2\pi k\cdot a}{k^2} = a^2+\frac{1}{\pi^2}\cdot\left[\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{2\pi a-\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi^2}{12}\right] = a$$

par l'application 10.9. D'autre part

$$\left\|1_{[0,a[}\right\|_2^2 = \int_0^a dx = a ,$$

ce qui prouve que

$$\left\|1_{[0,a[}\right\|_2^2 = \sup_{K\in\mathfrak{K}(\mathbb{Z})}\sum_{k\in K}\left|\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right)\right|^2 .$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{Z})$, que l'on peut supposer être de la forme $\{-N,\ldots,0,1,\ldots,N\}$, telle que

$$\left\|1_{[0,a[}\right\|_2^2 - \sum_{k\in K}\left|\left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right)\right|^2 \leqslant \varepsilon^2 .$$

Par le théorème 15.16, le polynôme trigonométrique

$$\widehat{P} := \sum_{k \in K} \left(e_k \left| 1_{[0,a[}\right.\right) \cdot e_k$$

est tel que

$$\left\| 1_{[0,a[} - \widehat{P} \right\|_2 \leqslant \varepsilon \ .$$

COROLLAIRE *L'algèbre des polynômes trigonométriques est dense dans* $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ *.*

Soient $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de densité, corollaire 15.15, il existe une fonction en escalier $\psi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}([0,1])$ telle que $\|f - \psi\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Si $(a_j)_{j=0,\ldots,n}$ est une subdivision de $[0,1]$ associée à ψ , on a

$$\psi = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \cdot \left(1_{[0,a_{j+1}[} - 1_{[0,a_j[}\right) \quad \lambda_{[0,1]}\text{-p.p.} \ ,$$

et il existe par l'exemple précédent des polynômes trigonométriques $\widehat{P_j}$ tels que

$$\left\| 1_{[0,a_j[} - \widehat{P_j} \right\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} |c_j| \right)^{-1} \ .$$

On en tire

$$\left\| \psi - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \cdot \left(\widehat{P_{j+1}} - \widehat{P_j} \right) \right\|_2 \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n-1} |c_j| \right) \cdot \left(\left\| 1_{[0,a_{j+1}[} - \widehat{P_{j+1}} \right\|_2 + \left\| 1_{[0,a_j[} - \widehat{P_j} \right\|_2 \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Finalement, on a

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \cdot \left(\widehat{P_{j+1}} - \widehat{P_j} \right) \right\|_2 \leqslant \|f - \psi\|_2 + \left\| \psi - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \cdot \left(\widehat{P_{j+1}} - \widehat{P_j} \right) \right\|_2 \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

15.18 Bases hilbertiennes

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Un système orthonormé $(\epsilon_j)_{j\in J}$ dans $\mathcal{H}$ est dit une *base hilbertienne* de $\mathcal{H}$ si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est *total* dans $\mathcal{H}$, i.e. si le sous-espace vectoriel engendré par tous les ϵ_j est dense dans $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{lin}}\,(\epsilon_j)_{j\in J} = \overline{\bigcup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \mathcal{H}_K}\ .$$

EXEMPLE 1 Le système $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$.

Cela découle du corollaire 15.17. $\square$

REMARQUE 1 Si $\xi,\eta \in \mathcal{H}$ sont orthonormés, i.e. (ξ,η) est une base (hilbertienne!) de $\mathcal{G} := \mathbb{K}\cdot\xi \oplus \mathbb{K}\cdot\eta$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\xi+\eta) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\xi-\eta)$$

ou bien

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\xi+\eta) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{i\cdot\sqrt{2}}\cdot(\xi-\eta)$$

dans le cas complexe, sont aussi orthonormés, donc forment une base (hilbertienne) de $\mathcal{G}$. On en déduit :

EXEMPLE 2 Grâce aux formules d'Euler, le système formé des fonctions

$$1\ ,\ \sqrt{2}\cdot\cos(2\pi k\cdot)\ ,\ \sqrt{2}\cdot\sin(2\pi k\cdot) \quad \text{pour } k\geqslant 1\ ,$$

est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$.

THEOREME *Soit $(\epsilon_j)_{j\in J}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Pour tout $\xi\in\mathcal{H}$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $K\in\mathfrak{K}(J)$ telle que pour toute partie $L\in\mathfrak{K}(J)$ telle que $L\supset K$, on ait*

$$\left\|\xi - \sum_{l\in L}(\epsilon_l|\,\xi)\cdot\epsilon_l\right\| \leqslant \varepsilon\ .$$

*En outre, on a l'**égalité de Parseval***

$$\|\xi\|^2 = \sum_{j\in J}|(\epsilon_j|\,\xi)|^2\ .$$

En effet, par hypothèse, il existe $K\in\mathfrak{K}(J)$ et $P=\sum_{k\in K}c_k\cdot\epsilon_k$ tels que

$$\|\xi-P\|\leqslant\varepsilon\ .$$

D'après le théorème 15.16, pour toute partie $L \in \mathfrak{K}(J)$ telle que $L \supset K$, on en déduit que

$$\left\| \xi - \sum_{l \in L} (\epsilon_l | \xi) \cdot \epsilon_l \right\|^2 = \|\xi\|^2 - \sum_{l \in L} |(\epsilon_l | \xi)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\xi\|^2 - \sum_{k \in K} |(\epsilon_k | \xi)|^2 = \left\| \xi - \widehat{P} \right\|^2 \leqslant \|\xi - P\|^2 \leqslant \varepsilon^2 ,$$

puisque $\widehat{P}$ est une meilleure approximation de ξ que celle par P . Ceci finit de prouver le théorème. □

REMARQUE 2 Rappelons que l'ensemble des $j \in J$ tels que $(\epsilon_j | \xi) \neq 0$ est au plus dénombrable (cf. corollaire 15.16).

Si J est infini, $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow J$ est injective et $\alpha(\mathbb{N}) \supset \{j \in J \mid (\epsilon_j | \xi) \neq 0\}$, on a

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\epsilon_{\alpha(k)} \middle| \xi\right) \cdot \epsilon_{\alpha(k)} .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, il suffit, avec les notations du théorème, de poser

$$N_\varepsilon := \max \overset{-1}{\alpha}(K) ,$$

puisque pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant N_\varepsilon$, on a

$$\alpha(\{0, 1, \ldots, N\}) = \alpha\left(\overset{-1}{\alpha}(K)\right) \cup L_N \subset K \cup L_N$$

pour un certaine partie $L_N \in \mathfrak{K}(J)$ et $(\epsilon_j | \xi) = 0$ pour tout $j \in K \smallsetminus \alpha\left(\overset{-1}{\alpha}(K)\right)$, donc

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\epsilon_{\alpha(k)} \middle| \xi\right) \cdot \epsilon_{\alpha(k)} = \sum_{j \in \alpha(\{0,1,\ldots,N\})} (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j = \sum_{j \in \alpha\left(\overset{-1}{\alpha}(K)\right) \cup L_N} (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j = \sum_{j \in K \cup L_N} (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j .$$

□

DEFINITION 2 Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on écrit

$$\xi = \sum_{j \in J} (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j$$

pour bien montrer que l'ordre de sommation n'a aucune importance,! On dit que cette série est *commutativement convergente* ou *sommable* .

EXEMPLE 3 Nous avons donc montré que, pour tout $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$, on a

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (e_k | f) \cdot e_k = \lim_{N \to \infty} \sum_{|k| \leqslant N} (e_k | f) \cdot e_k$$

en moyenne quadratique, et que

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(e_k | f)|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{|k| \leqslant N} |(e_k | f)|^2 .$$

Le calcul fait dans l'exemple 15.17 montre que

$$1_{[0,a[} = a + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1-e^{-2\pi ik\cdot a}}{2\pi ik} \cdot e_k \quad \text{dans } \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1]) \ .$$

En particulier, on a

$$2\cdot 1_{[0,\frac{1}{2}[} - 1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1-e^{-\pi ik}}{\pi ik} \cdot e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi i\,(2k+1)} \cdot (e_{2k+2} - e_{-2k-1}) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin(2\pi\cdot[2k+1]\cdot \mathrm{id}) = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sqrt{2}\cdot\sin(2\pi\cdot[2k+1]\cdot\mathrm{id})$$

dans $\mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$.

L'égalité de Parseval appliquée à la base hilbertienne de l'exemple 2 ci-dessus fournit

$$\frac{16}{2\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2 = \left\| 2\cdot 1_{[0,\frac{1}{2}[} - 1 \right\|_2^2 = 1 \ ,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

EXERCICE Développer la fonction

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right) & & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ & \text{si} & \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) & & x\in\left]\frac{1}{2},1\right] \end{array} \right.$$

en série de Fourier. Quel résultat obtient-on à partir de l'égalité de Parseval ?

Même question pour la fonction

$$\frac{1}{2} - \left|\mathrm{id} - \frac{1}{2}\right| \ .$$

15.19 Fonctions localement intégrables et absolument continues

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une fonction f sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est *localement μ-intégrable* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que la fonction $1_V \cdot f$ soit μ-intégrable. Nous désignerons par $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, resp. $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{C}}(\mu)$, l'ensemble de ces fonctions. Si μ est modérée, i.e. si X est μ-modéré, on pose

$$\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) := \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},\mathbb{C}}(\mu) / \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

Si μ n'est pas modérée, il est préférable d'introduire les classes modulo les fonctions dites localement μ-négligeables, i.e. négligeables au sens de l'intégrale supérieure essentielle.

PROPOSITION *Une fonction μ-intégrable est localement μ-intégrable. Une fonction localement μ-intégrable est μ-intégrable sur tout compact de X , la réciproque étant vrai si X est localement compact.*

Le fait qu'une fonction localement μ-intégrable est μ-intégrable sur tout compact de X s'obtient évidemment par compacité. En effet si $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $(V_j)_{j=1,\ldots,n}$ est une suite finie d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{j=1}^n V_j$ et $1_{V_j} \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors

$$1_K \cdot f = 1_K \cdot \max\nolimits_{j=1,\ldots,n} 1_{V_j} \cdot f$$

est μ-intégrable par l'exemple 15.10.2. Réciproquement si V est un voisinage compact de x , alors

$$1_{V^\circ} \cdot f = 1_{V^\circ} \cdot (1_V \cdot f)$$

est pour la même raison μ-intégrable. □

DEFINITION 2 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous poserons

$$1_{a,b} := \begin{cases} 1_{]a,b]} & \text{si} \quad a \leqslant b \\ -1_{]b,a]} & \phantom{\text{si}} \quad b < a \end{cases} .$$

LEMME *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.*

(i) Pour tout $a, b, c \in J$, on a

$$1_{a,b} + 1_{b,c} = 1_{a,c} \ .$$

(ii) Une fonction f sur J est localement λ_J-intégrable si, et seulement si, pour tout intervalle compact $[a, b] \subset J$, la fonction $1_{[a,b]} \cdot f$ est λ_J-intégrable.

(iii) Si f est localement λ_J-intégrable et si $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$, respectivement $\varphi \in \mathcal{K}_+(J)$, alors $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. .

Dans ce cas, pour $\tau \in J$ *et* $c \in \mathbb{C}$ *, on considère la fonction*

$$F : J \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto c + \int_\tau^x f(t)\ dt := c + \int 1_{\tau,x} \cdot f\, d\lambda_J\ .$$

Alors

(iv) F *est continue.*

(v) F *est croissante si, et seulement si,* $f \geqslant 0$ λ_J*-p.p. . En particulier pour que* F *soit constante, il faut et il suffit que* $f = 0$ λ_J*-p.p. .*

(vi) La classe de f *est univoquement déterminée par* F *.*

(vii) Si f *est continue en* x *, alors* F *est dérivable en* x *et* $F'(x) = f(x)$ *.*

Démonstration de (i) C'est immédiat.

Démonstration de (ii) La condition est nécessaire par la proposition. Elle est évidemment suffisante.

Démonstration de (iii) Nous pouvons supposer, en séparant partie réelle et partie imaginaire, que f est réelle. Pour la partie imaginaire on a même $\int \varphi \cdot \operatorname{Im} f\, d\lambda_j = 0$, qui se ramène au cas $\geqslant 0$ en considérant $\operatorname{Im} f$ et $-\operatorname{Im} f$.

Soit alors K une partie compacte de $\{f < 0\}$. Comme $1_K \in \mathbf{L}^1(\lambda_J)$, le théorème de densité 15.15, respectivement son corollaire, montre qu'il existe une suite $(\varphi_k) \subset \mathcal{K}(J)$, respectivement $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}(J)$, telle que

$$1_K = \lim_k \varphi_k \quad \text{dans } \mathbf{L}^1(\lambda_J)\ .$$

Il existe une fonction $\chi \in \mathcal{K}_+(J)$, respectivement en posant $a := \inf K$ et $b := \sup K$ une fonction $\chi := 1_{[a,b]} \in \mathcal{E}_+(J)$, telle que $\chi \geqslant 1_K$. Nous pouvons supposer que $0 \leqslant \varphi_k \leqslant \chi$ en remplaçant φ_k par $\min\left(\varphi_k^+, \chi\right)$, puisque

$$|1_K - \min(\max(\varphi_k, 0), \chi)| \leqslant |1_K - \varphi_k|\ .$$

Grâce au théorème de Riesz-Fischer 15.14, nous pouvons également admettre que (φ_k) converge ponctuellement λ_J-p.p. vers 1_K en extrayant au besoin une sous-suite. Mais alors

$$0 \geqslant 1_K \cdot f = \lim_k \varphi_k \cdot f \quad \lambda_J\text{-p.p.}$$

et

$$|\varphi_k \cdot f| \leqslant \chi \cdot |f| \in \mathcal{L}^1(\lambda_J)\ ;$$

utilisant le théorème de Lebesgue on obtient

$$0 \geqslant \int 1_K \cdot f\, d\lambda_J = \lim_k \int \varphi_k \cdot f\, d\lambda_J \geqslant 0\ .$$

On en déduit que $1_K \cdot f = 0$ λ_J-p.p. , donc que $\lambda_J(K) = 0$ puisque $K \subset \{f < 0\}$. Finalement la proposition 15.12.iii montre que $\lambda_J^*(\{f < 0\}) = 0$, donc que $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. .

Démonstration de (iv) En effet si (x_k) est une suite de J convergente vers x , par (i) on a

$$F(x_k) - F(x) = \int_x^{x_k} f\ d\lambda_J = \int 1_{x,x_k} \cdot f\ d\lambda_J\ .$$

Mais comme (x_k) est contenu dans un intervalle compact $[a,b] \subset J$, on a

$$|1_{x,x_k} \cdot f| \leqslant 1_{[a,b]} \cdot |f| \in \mathcal{L}^1(\lambda_J)\ ,$$

et $1_{x,x_k}$ tend ponctuellement, sauf en x , donc λ_J-presque partout vers 0 . Ceci permet d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Démonstration de (v) Si F est croissante, pour tout $x, y \in J$ tels que $x \leqslant y$, on a

$$0 \leqslant F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\, dt \ .$$

Par linéarité on obtient $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$. On a donc $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. . La réciproque et le reste sont évidents.

Démonstration de (vi) Si, pour tout $t \in J$, on a

$$F(t) = d + \int_{\widetilde{\tau}}^t g \quad \text{avec } d \in \mathbb{K} \text{ et } g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \ ,$$

alors

$$\int_s^t f = F(t) - F(s) = \int_s^t g$$

donc $\int 1_{s,t} \cdot f = \int_s^t (f - g) = 0$ pour tout $s, t \in J$, donc $f = g$ par (iii).

Démonstration de (vii) Il suffit d'estimer en utilisant la continuité en t :

$$\left| \frac{F(s) - F(t)}{s - t} - f(t) \right| = \frac{1}{|s - t|} \cdot \left| \int_s^t \left[f - f(t) \right] \right| \leqslant \frac{1}{|s - t|} \cdot \int_s^t |f - f(t)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

puisque $|f(u) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ si u est suffisamment proche de t . □

DEFINITION 3 Nous dirons qu'une fonction F du type ci-dessus est *(localement) absolument continue* . L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{AC}(J)$.

Nous dirons que $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\lambda_J)$ est la dérivée (en un sens généralisé) de F ; on la note ∂F .

Cette définition est bien posée puisque la fonction f est univoquement déterminée par F à égalité λ_J-presque partout. C'est une généralisation, puisque toute fonction g continûment dérivable est localement absolument continue :

$$g(t) = g(\tau) + \int_\tau^t g'(s)\, ds \ ,$$

par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral 9.9. On a donc $\partial g = g'$. Ainsi $\mathcal{C}^{(1)}(J) \subset \mathcal{AC}(J)$.

REMARQUE 1 Plus généralement, Lebesgue a montré qu'une fonction localement absolument continue (au sens ci-dessus) est λ_J-presque partout dérivable dans J et de dérivée égale λ_J-presque partout à f (cf. Hewitt and Stromberg [10], theorem 18.3). La fonction f satisfait donc au théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

La propriété de dérivabilité de F est un résultat profond, mais peu utile en pratique. C'est pourquoi on préfère aujourd'hui la définition ci-dessus. La formule d'intégration par parties (théorème 16.4), celle de dérivation d'un produit (corollaire 16.4) et celle de dérivation d'une fonction composée (théorème 16.10) sont encore valables. Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{AC}(J)$ possède les propriétés typiques de $\mathcal{C}^{(1)}(J)$ et peut donc être utilisé à sa place.

[10] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

Lebesgue a également pu caractériser les fonctions du type F comme celles qui sont en son sens “absolument continues” sur chaque intervalle compact de J (cf. Hewitt and Stromberg, definition 18.10 et theorem 18.17).

Voici le critère pratique permettant de déterminer si une fonction est localement absolument continue.

THEOREME (fondamental du calcul différentiel et intégral) *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement lipschitzienne dérivable λ-presque partout dans J . Alors F' , définie par 0 où F n'est pas dérivable, est localement λ_J-intégrable dans J et on a*

$$F(y) = F(x) + \int_x^y F'(t)\ dt \quad \textit{pour tout } x, y \in J\ ,$$

i.e. F est localement absolument continue.

En échangeant au besoin x et y , on peut se restreindre au cas $x < y$. Supposons en outre que $y < \sup J$ et soit l un entier $\geqslant 1$ tel que $y + \frac{1}{l} \in J$. Pour tout entier $k \geqslant l$, définissons la fonction f_k sur J par

$$f_k(t) := \begin{cases} k \cdot \left[F\left(t + \frac{1}{k}\right) - F(t)\right] & \text{si } t \in [x, y] \\ 0 & \text{si } t \in J \smallsetminus [x, y] \end{cases} .$$

On a $1_{[x,y]} \cdot F' = \lim_{k \geqslant l} f_k\ \lambda_J$-p.p. . Puisque F est localement lipschitzienne, F est continue et la suite $(|f_k|)_{k \geqslant l}$ est localement uniformément bornée. On en déduit d'une part que f_k est continue sur $[x, y]$, donc que f_k est λ_J-intégrable par le corollaire 14.9 et d'autre part, puisque l'intervalle $[x, y]$ est compact, qu'il existe une constante $M < \infty$ telle que l'on ait $|f_k| \leqslant M \cdot 1_{[x,y]}$ pour tout $k \geqslant l$.

Le théorème de Lebesgue montre alors que $1_{[x,y]} \cdot F'$ est λ_J-intégrable, donc que F' est localement λ_J-intégrable, et que

$$\int_x^y F'(t)\ dt = \int 1_{[x,y]} \cdot F'\ d\lambda = \int \lim\nolimits_k f_k\, d\lambda = \lim\nolimits_k \int_x^y f_k(t)\ dt =$$

$$= \lim\nolimits_k k \cdot \int_x^y \left[F\left(t + \frac{1}{k}\right) - F(t)\right] dt\ .$$

Finalement, par le théorème de la moyenne du calcul intégral (corollaire 9.6), on obtient

$$k \cdot \int_x^y \left[F\left(t + \frac{1}{k}\right) - F(t)\right] dt = k \cdot \int_y^{y+\frac{1}{k}} F(t)\ dt - k \cdot \int_x^{x+\frac{1}{k}} F(t)\ dt = F(y_k) - F(x_k)\ ,$$

pour certains $y_k \in \left[y, y + \frac{1}{k}\right]$ et $x_k \in \left[x, x + \frac{1}{k}\right]$. Le membre de droite tend donc vers $F(y) - F(x)$, puisque F est continue, ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, si $y = \sup J$, choisissons $x_0 \in J$ tel que $\inf\ J < x_0 < \sup\ J$. Par symétrie, le résultat est aussi vrai pour x_0 et y , donc pour tout $x \in J$ et y , puisque

$$\int_x^y F'(t)\ dt = \int_x^{x_0} F'(t)\ dt + \int_{x_0}^y F'(t)\ dt\ .$$

□

REMARQUE 2 Une fonction continue F , dérivable et de dérivée bornée par morceaux, ou plus généralement dérivable, sauf en un nombre au plus dénombrable de points, et de dérivée localement bornée, est localement lipschitzienne, donc localement absolument continue.

Cela découle du théorème de la moyenne du calcul différentiel, en considérant les intervalles contigus à chaque point, en nombre au plus dénombrable, où F n'est pas dérivable. Pour le cas général voir Dieudonné [11], 8.5.2 . $\square$

REMARQUE 3 Attention ! Il existe des fonctions continues strictement croissantes dérivables λ_J-presque partout et de dérivée nulle (cf. Hewitt and Stromberg, example 18.8). Ces fonctions ne sont évidemment pas localement absolument continues. Cela montre en particulier que l'hypothèse "localement lipschitzienne" ne peut pas être supprimée dans le théorème.

REMARQUE 4 Les hypothèses du théorème peuvent être simplifiées, car une fonction localement lipschitzienne est absolument continue sur chaque intervalle compact de J au sens de Lebesgue, en particulier λ_J-presque partout dérivable (cf. Hewitt and Stromberg, exercise 18.34).

EXERCICE 1 Soit $f \in \mathcal{AC}([0,1])$ une fonction absolument continue telle que $f(0) = f(1)$ et $\partial f \in \mathbf{L}^2([0,1])$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$(e_k | \partial f) = 2\pi i k \cdot (e_k | f) \ ,$$

en admettant la formule d'intégration par partie

$$\int_0^1 f \cdot \partial g = \Big[f \cdot g \Big]_0^1 - \int_0^1 \partial f \cdot g \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{AC}([0,1]) \ .$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^n$, prouver que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_k | f)$ est absolument sommable, puis que la série de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_k | f) \cdot e_k$ est uniformément sommable de somme f .

Réciproquement, si la série de Fourier d'une fonction $g \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ est uniformément sommable, alors g est $\lambda_{[0,1]}$-p.p. égale à une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $f(0) = f(1)$. A-t-on $f \in \mathcal{AC}([0,1])$, même en supposant que la série des coefficients de Fourier est absolument sommable ?

EXERCICE 2 Soit $f \in \mathcal{AC}([0,1])$ une fonction absolument continue telle que $f(0) = f(1)$, $\partial f \in \mathbf{L}^2([0,1])$ et $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Montrer que l'on a

$$\|f\|_2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \|\partial f\|_2 \ ,$$

et que l'on a égalité si, et seulement si, $f = a \cdot \cos 2\pi \diamond + b \cdot \sin\ 2\pi\diamond$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$.

[11] J. Dieudonné, Eléments d'Analyse, Tome I, Fondement de l'Analyse moderne, Gauthier-Villars, Paris, 1968.