Chapitre 6

SÉRIES

Version du 10 décembre 2005

6.1 La notion de série

DEFINITION Soit $(z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$. La suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ définie par

$$s_k := \sum_{l=0}^{k} z_l$$

s'appelle la *suite des sommes partielles* de $(z_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Par simplification on parle de la *série* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$. Nous dirons que cette série est *convergente* si la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est convergente. On note également $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ la limite de cette suite et on dit que c'est la *somme* de la série, i.e.

$$\sum_{l=0}^{\infty} z_l = \lim_k s_k = \lim_k \sum_{l=0}^{k} z_l \ .$$

Nous dirons que cette série est *divergente* si la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente.

EXEMPLE 1 La *série géométrique* $\sum_{l=0}^{\infty} z^l$ est convergente si, et seulement si, $|z| < 1$. Dans ce cas on a

$$\sum_{l=0}^{\infty} z^l = \frac{1}{1-z} \ .$$

Pour $z = 1$ la série n'est pas convergente, puisque

$$\sum_{l=0}^{k} z^l = k + 1 \ .$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, d'après la remarque 3.12, on a

$$\sum_{l=0}^{k} z^l = \frac{1 - z^{k+1}}{1-z} \ .$$

Le résultat en découle, puisque la suite $\left(z^{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, $|z| < 1$ ou $z = 1$ grâce à l'exemple 5.5.5, p. 108. □

Achille et la tortue Le paradoxe de Zénon (495-435 av. J.C.) peut être décrit de la manière suivante. Achille part de 0 , tandis que la tortue part de $x \in \mathbb{R}_+^*$. Zénon prétend qu'Achille ne peut pas ratrapper la tortue. En effet lorsqu'Achille arrive en $x_0 := x$, la tortue est déjà en $x_1 > x$. Lorsqu'il arrive en x_1 , la tortue est déja en $x_2 > x_1$, etc...

Mais si v désigne la vitesse d'Achille, et $q \cdot v$ celle de la tortue avec $q \in \left]0,1\right[$, lorsqu'Achille arrive en $x_0 = x$, la tortue est en $x_1 = x + q \cdot x$. Lorsqu'il arrive en x_1 , elle est en $x_2 = x + q \cdot x + q^2 \cdot x$, etc... A la k-ième étape la tortue est en

$$x_k = \sum_{l=0}^{k} q^l \cdot x \ .$$

La distance maximale parcourue est donc

$$\sup_k x_k = \lim_k \sum_{l=0}^{k} q^l \cdot x = x \cdot \sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{x}{1-q} \ .$$

Il en est de même du temps écoulé qui est $\frac{1}{v} \cdot x$, puis $\frac{1}{v} \cdot (x + q \cdot x)$, etc..., i.e.

$$\frac{x}{v} \cdot \sum_{l=0}^{k} q^l$$

à la k-ième étape. Ce temps ne va donc pas dépasser

$$\frac{x}{v} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{x}{v} \cdot \frac{1}{1-q} \ ,$$

ce qui ne correspond pas avec notre expérience du monde réel.

EXEMPLE 2 On a

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\,(l+1)} = 1 \ .$$

En effet

$$s_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l\,(l+1)} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \right) = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} - \sum_{l=2}^{k+1} \frac{1}{l} = 1 - \frac{1}{k+1} \ ,$$

donc

$$\lim_k s_k = \lim_k \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1 \ .$$

$\square$

EXERCICE 1 On a

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{4}{l\,(l+1)\,(l+2)} = 1 \ .$$

PROPOSITION *Soient $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ et $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ des séries convergentes de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors les séries $\sum_{l=0}^{\infty} (z_l \pm w_l)$ et $\sum_{l=0}^{\infty} a \cdot z_l$ sont convergentes et on a*

$$\sum_{l=0}^{\infty} (z_l \pm w_l) = \sum_{l=0}^{\infty} z_l \pm \sum_{l=0}^{\infty} w_l \ ,$$

ainsi que

$$\sum_{l=0}^{\infty} a \cdot z_l = a \cdot \sum_{l=0}^{\infty} z_l \ .$$

La démonstration est évidente en utilisant le théorème 5.5, p. 106, puisque

$$\sum_{l=0}^{k} (z_l \pm w_l) = \sum_{l=0}^{k} z_l \pm \sum_{l=0}^{k} w_l$$

et

$$\sum_{l=0}^{k} a \cdot z_l = a \cdot \sum_{l=0}^{k} z_l \ .$$

$\square$

REMARQUE 1 Comme pour les suites (cf. proposition 5.2), la convergence d'une série ne dépend que des termes à partir d'un certain rang. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\sum_{l=0}^{\infty} z_l = \sum_{l=0}^{n-1} z_l + \sum_{l=n}^{\infty} z_l \ .$$

REMARQUE 2 Chaque suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ peut s'interpréter comme la suite des sommes partielles de la série $z_0 + \sum_{l=1}^{\infty} (z_l - z_{l-1})$, puisqu'on a

$$z_k = z_0 + \sum_{l=1}^{k} (z_l - z_{l-1}) \ .$$

EXERCICE 2 Calculer

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{10 \cdot 3^l - 2}{11^{l+1}} \ .$$

6.2 Séries à termes positifs

PROPOSITION *Soit $\sum_{l=0}^{\infty} x_l$ une série à termes positifs, i.e. telle que $x_l \geqslant 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée. Dans ce cas on a*

$$\sum_{l=0}^{\infty} x_l = \sup_k \sum_{l=0}^{k} x_l \ .$$

L'hypothèse entraîne que la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante. Le résultat découle alors du théorème 5.3, p. 102. □

EXEMPLE 1 La série harmonique $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}$ est divergente.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$s_{2^{k+1}} = \sum_{l=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{l} = 1 + \sum_{m=0}^{k} \left(\sum_{l=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{l} \right) \geqslant 1 + \sum_{m=0}^{k} \left(\sum_{l=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \right) =$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \left(2^{m+1} - 2^m\right) = 1 + \frac{k+1}{2} \ ,$$

ce qui montre que la suite des sommes partielles n'est pas majorée. □

EXEMPLE 2 Pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > 1$, la série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$ est convergente. On dit que la fonction

$$\zeta :]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : s \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$$

est la *fonction zéta de Riemann* .

Pour la définition de l^s lorsque $s \notin \mathbb{N}$ nous renvoyons à 7.13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$s_{2^{k+1}-1} = \sum_{l=1}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{l^s} = \sum_{m=0}^{k} \left(\sum_{l=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{l^s} \right) \leqslant \sum_{m=0}^{k} \frac{2^m}{(2^m)^s} = \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{1}{2^{s-1}} \right)^m \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}} \right)^m = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \ ,$$

ce qui montre que la suite $(s_{2^{k+1}-1})_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc aussi $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, puisque cette dernière suite est croissante. □

REMARQUE On peut montrer, par exemple à l'aide de la théorie des séries de Fourier, que l'on a

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^6} = \frac{\pi^6}{945} \ .$$

EXERCICE 1 Démontrer les assertions suivantes :

(a) La série $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}$ est convergente.

(b) On a

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \lim_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ .$$

Cette valeur commune est désignée par e et s'appelle le *nombre d'Euler* .

Prouver tout d'abord à l'aide de la formule du binôme que

$$\lim_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

puis utiliser l'exercice 5.3.1, p. 102.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < e - \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} < \frac{1}{k \cdot k!} \ .$$

(d) Le nombre e est irrationnel.

EXERCICE 2 Est-ce que les séries suivantes sont convergentes ?

(a)
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+4}{l^2 - 3l + 1} \ .$$

(b)
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{l+1} - \sqrt{l}}{\sqrt{l+1}} \ .$$

(c)
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{l+1} - \sqrt{l}}{\sqrt{(l+1)^3}} \ .$$

(d)
$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l+1} - \frac{1}{2l}\right) \ .$$

EXERCICE 3 (Principe de condensation de Cauchy)

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante. Pour que la série $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ soit convergente, il faut et il suffit que la série $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot a_{2^m}$ soit convergente.

En déduire que la série harmonique n'est pas convergente.

EXERCICE 4 (Fonction zêta) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $s > 1$, on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{s-1}{l^s} + \frac{1}{(l+1)^{s-1}} - \frac{1}{l^{s-1}} \right) \right] .$$

De la Vallée Poussin [1] a montré que la série

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{s-1}{l^s} + \frac{1}{(l+1)^{s-1}} - \frac{1}{l^{s-1}} \right)$$

est convergente pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, car

$$\left(\frac{1-s}{l^s} + \frac{1}{l^{s-1}} - \frac{1}{(l+1)^{s-1}} \right) \leqslant \frac{1}{l^{s+1}}$$

pour tout $s \in \left]0,1\right[$ et $l \in \mathbb{N}^*$. Ceci permet de définir la fonction zéta de Riemann sur $\mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$.

On peut démontrer l'inégalité en admettant que

$$1 - sx - \frac{x^2}{1-x} \leqslant (1-x)^s$$

pour tout $x \in \left[0,1\right[$ (cf. exercice 10.8.2).

EXERCICE 5 (Pas de frontière entre convergence et non-convergence)

(a) Soit $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ une série convergente de $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une suite croissante $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sup_k c_k = \infty$ et que $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot a_l$ soit encore convergente.

(b) Soit $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ une série non-convergente de $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une suite croissante $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sup_k c_k = \infty$ et que $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{c_l}$ soit encore non-convergente.

[1] C. de la Vallée Poussin, Mém. Acad. Sci. Belg. 53 (1896), n° 6.

6.3 Développement en base p

Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble des entiers relatifs $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{1}{p^k} \leqslant x$ est minoré, puisque la suite croissante

$$\left(p^{-k}\right)_{k \in \mathbb{Z}_-} = \left(p^l\right)_{l \in \mathbb{N}}$$

n'est pas majorée. Soit alors $m \in \mathbb{Z}$ le plus petit de ces k . Pour tout $k \geqslant m$, on définit des entiers naturels x_k par récurrence, comme les plus grands entiers tels que

$$\sum_{l=m}^{k} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \leqslant x \quad \text{pour tout } k \geqslant m \ ,$$

i.e.

$$x_k = \left\lfloor p^k \cdot \left(x - \sum_{l=m}^{k-1} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \right) \right\rfloor \quad \text{pour tout } k \geqslant m \ .$$

PROPOSITION *On a* $x = \sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l}$ *, ainsi que*

$$0 \leqslant x_k \leqslant p-1 \quad \textit{pour tout } k \geqslant m \quad , \quad x_m \neq 0 \tag{$*$}$$

et

$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \textit{ , il existe } k \in \mathbb{N} \textit{ tel que } k \geqslant n \textit{ et } x_k \neq p-1 \ . \tag{$**$}$$

Cette décomposition est unique.

En effet, on a d'une part

$$\sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \leqslant x \, ;$$

d'autre part si l'on avait $\sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l} < x$, comme $\lim_k \frac{1}{p^k} = 0$, il existerait un $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l} + \frac{1}{p^n} < x \ ,$$

ce qui contredirait la définition de x_n . On a évidemment $x_k \geqslant 0$ et $x_m \neq 0$. D'autre part $x_m \leqslant p-1$, car dans le cas contraire on aurait $x_m \geqslant p$, donc

$$x \geqslant x_m \cdot \frac{1}{p^m} \geqslant \frac{1}{p^{m-1}} \ ,$$

ce qui contredit la minimalité de m . De même par récurrence, si l'on avait $x_{k+1} \geqslant p$, alors on aurait $\frac{x_{k+1}}{p^{k+1}} \geqslant \frac{1}{p^k}$, donc

$$x \geqslant \sum_{l=m}^{k+1} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \geqslant \sum_{l=m}^{k} x_l \cdot \frac{1}{p^l} + \frac{1}{p^k} \ ,$$

ce qui contredirait la maximalité de x_k . Finalement, s'il existait $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et $x_k = p-1$ pour tout $k \geqslant n$, on aurait

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} (p-1) \cdot \frac{1}{p^l} = (p-1) \cdot \frac{1}{p^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n}$$

et

$$\sum_{l=m}^{n} x_l \cdot \frac{1}{p^l} + \frac{1}{p^n} = \sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l} \leqslant x \ ,$$

ce qui contredirait la définition de x_n . L'unicité est immédiate. $\square$

DEFINITION Si $(x_k)_{k \geqslant m}$ est une suite satisfaisant aux conditions $(*)$ et $(**)$, on dit que

$$x = \sum_{l=m}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{p^l} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{k+m} \cdot \frac{1}{p^k} \right) \cdot p^{-m}$$

est le *développement propre en base* p de x . Dans la base 10 on dit que c'est le *développement décimal propre* . On écrit aussi

$$x = x_m, x_{m+1} \ldots x_{-1} x_0 x_1 x_2 \ldots \cdot p^{-m}$$

et on dit que c'est la *notation scientifique* ou en *virgule flottante* .

REMARQUE Si $m \leqslant 0$, on écrit aussi

$$x = x_m x_{m+1} \ldots x_{-1} x_0, x_1 x_2 \ldots \ ,$$

tandis que pour $m > 0$, on écrit

$$x = 0, 0 \ldots 0 x_m x_{m+1} \ldots \ ,$$

le nombre de 0 du début étant m .

EXEMPLE 1 Dans le système décimal on a

$$0,99\ldots = \sum_{l=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-l} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 \ ,$$

mais ce n'est pas un développement décimal propre.

EXEMPLE 2 Dans le système binaire, on a

$$\frac{2}{3} = 0,1010\ldots \ .$$

EXERCICE Montrer que le développement en base p propre de x est périodique si, et seulement si, x est rationnel.

6.4 Critère de Cauchy

THEOREME *Soit* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *une série de* $\mathbb{C}$ *. Pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que, pour tout* $\varepsilon > 0$ *, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\left|\sum_{l=p}^{q} z_l\right| \leqslant \varepsilon \quad \textit{pour tout } p, q \geqslant N \ .$$

C'est immédiat par le critère de Cauchy 5.12 pour les suites, puisqu'on a

$$s_q - s_{p-1} = \sum_{l=p}^{q} z_l \ .$$

□

COROLLAIRE *Si la série* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *est convergente, alors* $\lim_l z_l = 0$ *.*

Etant donné $\varepsilon > 0$, en prenant $p = q \geqslant N$ dans le critère de Cauchy, on obtient

$$|z_p| \leqslant \varepsilon \ .$$

□

REMARQUE La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série harmonique 6.2.1.

PROPOSITION *Soit* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *une série de* $\mathbb{C}$ *. S'il existe une sous-suite* $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{N}$ *telle que* $(z_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0 *, alors cette série est divergente.*

Cela découle immédiatement du corollaire grâce à la proposition 5.10. □

EXERCICE 1 Soit $\sum_{l=0}^{\infty} x_l$ une série convergente de $\mathbb{R}$ telle que

$$0 \leqslant x_{l+1} \leqslant x_l \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N} \ .$$

Montrer que l'on a

$$\lim_l l \cdot x_l = 0 \ ,$$

en considérant des sommes du type $\sum_{l=n+1}^{k} x_l$ pour $k \geqslant 2n$.

EXERCICE 2 Est-ce que la série

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^l}{(l+1)^l}$$

est convergente ?

6.5 Critère de la majorante ou principe de comparaison

DEFINITION Une série $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ de $\mathbb{C}$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum_{l=0}^{\infty} |z_l|$ est convergente.

THEOREME *Soient $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ une série de $\mathbb{C}$ et $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ une série à termes positifs convergente telles que $|z_l| \leqslant a_l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{l=0}^{\infty} |z_l| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} a_l \ .$$

Si la série $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ est absolument convergente, alors cette série est convergente et on a

$$\left| \sum_{l=0}^{\infty} z_l \right| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |z_l| \ .$$

En effet, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{l=p}^{q} |z_l| \leqslant \sum_{l=p}^{q} a_l \ .$$

Comme la série $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ est convergente, elle satisfait au critère de Cauchy 6.4. L'inégalité ci-dessus montre alors que la série $\sum_{l=0}^{\infty} |z_l|$ y satisfait aussi, donc qu'elle est convergente. La seconde partie découle également du critère de Cauchy, car on a

$$\left| \sum_{l=p}^{q} z_l \right| \leqslant \sum_{l=p}^{q} |z_l| \ .$$

Quant aux inégalités, il suffit de poser $p = 0$ et de prendre la limite suivant q . —— □

REMARQUE Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente comme le montrera l'exemple de la série harmonique alternée 6.7, p. 143.

EXEMPLE Nous avons déjà vu (cf. exemple 6.1.2) que $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} = 1$. Comme pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $s \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{l^s} \leqslant \frac{1}{l^2} \leqslant \frac{2}{l\,(l+1)} \ ,$$

on obtient une nouvelle démonstration de la convergence de $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$ pour $s \geqslant 2$.

6.6 Critère du quotient

THEOREME (d'Alembert) *Soient* $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ *une série de* $\mathbb{C}$ *et* $m \in \mathbb{N}$ *tels que l'on ait* $z_l \neq 0$ *pour tout* $l \geqslant m$. *S'il existe* $q \in [0,1[$ *tel que*

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| \leqslant q \quad \textit{pour tout } l \geqslant m \ ,$$

alors cette série est absolument convergente.

On peut supposer que $m = 0$. Comme $|z_l| \leqslant q \cdot |z_{l-1}|$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on obtient immédiatement que $|z_l| \leqslant |z_0| \cdot q^l$. Ceci montre que la série géométrique $|z_0| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} q^l$ est une majorante de la série $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$. Mais puisque $0 \leqslant q < 1$, cette série géométrique est convergente, d'où le résultat par le critère de la majorante 6.5. □

EXEMPLE 1 Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum_{l=1}^{\infty} l^s \cdot z^l$ est convergente.

En effet, on a

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| = \frac{(l+1)^s \cdot |z|^{l+1}}{(l)^s \cdot |z|^l} = |z| \cdot \left(1 + \frac{1}{l}\right)^s \leqslant |z| \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\lceil s \rceil} < 1$$

pour tout $l \geqslant m$, en choisissant m tel que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\lceil s \rceil} < \frac{1}{|z|}$. Ceci est possible puisque

$$\lim_l \left(1 + \frac{1}{l}\right)^{\lceil s \rceil} = \left(1 + \lim_l \frac{1}{l}\right)^{\lceil s \rceil} = 1 < \frac{1}{|z|} \ .$$

□

On peut montrer (exercice 6.15) que

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{2^l} = 2 \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^2}{2^l} = 6 \ .$$

Nous verrons dans l'exemple 8.13.3 que

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^l} = \ln\ 2 \ .$$

EXEMPLE 2 La série harmonique $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}$ satisfait à la propriété suivante :

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| = \frac{l}{l+1} < 1 \quad \text{pour tout } l \geqslant 1 \ ,$$

mais il n'existe aucun $q \in [0,1[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{l}{l+1} \leqslant q \quad \text{pour tout } l \geqslant m \ .$$

En effet on aurait $q \geqslant \lim_{l \geqslant m} \frac{l}{l+1} = 1$. Le critère n'est donc pas applicable, ce qui n'est pas étonnant puisque la série harmonique est divergente (cf. exemple 6.2.1).

EXEMPLE 3 Nous savons que la série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ est convergente (exemple 6.2.2). Le critère du quotient n'est non-plus pas applicable, bien qu'on ait

$$\left| \frac{z_{l+1}}{z_l} \right| = \left(\frac{l}{l+1} \right)^2 < 1 \quad \text{pour tout } l \geqslant 1 \ ,$$

car $\lim_{l \geqslant m} \left(\frac{l}{l+1} \right)^2 = 1$.

EXERCICE Est-ce que les séries suivantes sont convergentes ?

(a)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l!}{l^l} \ .$$

(b)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^3 \cdot l!}{l^l} \ .$$

6.7 Critère de Leibniz

THEOREME *Soit* $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *une zéro-suite décroissante. Alors la série alternée* $\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l$ *est convergente. Plus précisément, les suites de sommes partielles* $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *sont respectivement croissante et décroissante et, pour tout* $k\in\mathbb{N}$ *, on a*

$$s_{2k+1}\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l\leqslant s_{2k}\ ,$$

et

$$\left|\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l-\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\cdot x_l\right|\leqslant x_{k+1}\ .$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$,on a

$$s_{2k+1}\leqslant s_{2k+3}\leqslant s_{2k+2}\leqslant s_{2k}\ ,$$

car

$$s_{2k+3}-s_{2k+1}=x_{2k+2}-x_{2k+3}\geqslant 0\quad ,\quad s_{2k+3}-s_{2k+2}=-x_{2k+3}\leqslant 0$$

et

$$s_{2k+2}-s_{2k}=-x_{2k+1}+x_{2k+2}\leqslant 0\ .$$

Pour tout $p,q\geqslant 2k$, on a donc

$$s_{2k+1}\leqslant s_p,s_q\leqslant s_{2k}\ ,$$

et par suite

$$\left|s_p-s_q\right|\leqslant s_{2k}-s_{2k+1}=x_{2k+1}\ .$$

Comme $\lim_k x_k=0$, on a $\lim_k x_{2k+1}=0$ par la proposition 5.10, et cette inégalité montre que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Utilisant le corollaire 5.9.ii, p. 118, en prenant la limite suivant p , on obtient

$$s_{2k+1}\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l\leqslant s_{2k}\ .$$

Finalement on a

$$s_{2k+1}\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l\leqslant s_{2k+2}\leqslant s_{2k}\ ,$$

donc

$$\left|\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l-s_{2k}\right|\leqslant s_{2k}-s_{2k+1}=x_{2k+1}$$

et

$$\left|\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot x_l - s_{2k+1}\right| \leqslant s_{2k+2}-s_{2k+1}=x_{2k+2}\ .$$

□

EXEMPLE La série harmonique alternée $\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\cdot\frac{1}{l}$, ainsi que $\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot\frac{1}{2l+1}$, sont convergentes, mais pas absolument convergentes.

La série harmonique alternée n'est pas absolument convergente, puisque la série des valeurs absolues est la série harmonique, qui est divergente (cf. exemple 6.2.1). Il en est de même de la seconde car

$$\frac{1}{2l+1}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l+1}\ \text{pour tout } l\in\mathbb{N}\ ,$$

en utilisant la proposition 6.2.

Nous montrerons plus tard (cf. exemple 8.15.3 et théorème 10.11) que

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\cdot\frac{1}{l}=\ln\ 2\quad\text{et}\quad\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\cdot\frac{1}{2l+1}=\frac{\pi}{4}\ .$$

EXERCICE 1 Est-ce que les séries suivantes sont convergentes ?

(a)

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}+\frac{(-1)^l}{\sqrt{l}}\right)\ .$$

(b)

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\cdot\sin\frac{1}{l}\ .$$

(c)

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^l\cdot l}{l^2+l}\ .$$

EXERCICE 2 Déterminer les $x\in\mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\cdot(-x)^l$ est convergente et montrer que l'on a

$$1-2x\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\cdot(-x)^l\leqslant 1-2x+3x^2\quad\text{pour tout } x\in\left[0,\frac{3}{4}\right]\ .$$

6.8 Critère de la racine

THEOREME (Cauchy) *Soit $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ une série de $\mathbb{C}$. S'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $q \in [0,1[$ tels que l'on ait*

$$\sqrt[l]{|z_l|} \leqslant q \quad \textit{pour tout } l \geqslant m \ ,$$

alors cette série est absolument convergente.

C'est immédiat par le critère de la majorante, puisque la série géométrique $\sum_{l=0}^{\infty} q^l$ est convergente et que l'on a

$$|z_l| \leqslant q^l \quad \text{pour tout } l \geqslant m \ .$$

□

DEFINITION Une série de la forme

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l \ ,$$

où $(c_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, s'appelle une *série entière* .

PROPOSITION *Si la série entière $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot w^l$ est convergente pour un $w \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |w|$.*

En effet on a $\lim_l c_l \cdot w^l = 0$ d'après le corollaire 6.4. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $l \geqslant m$ on ait $\left|c_l \cdot w^l\right| \leqslant 1$. On en déduit que

$$\left|c_l \cdot z^l\right| = \left|\frac{z}{w}\right|^l \cdot \left|c_l \cdot w^l\right| \leqslant \left|\frac{z}{w}\right|^l \ ,$$

donc que

$$\sqrt[l]{\left|c_l \cdot z^l\right|} = \left|\frac{z}{w}\right| < 1 \quad \text{pour tout } l \geqslant m \ ,$$

d'où notre assertion par le critère de la racine. □

EXERCICE 1 Est-ce que la série

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l+1}\right)^{l^2}$$

est convergente ?

EXERCICE 2 Montrer que la série

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^l}{2^l}$$

est convergente.

Peut-on utiliser le critère du quotient ? On peut montrer que si le critère du quotient est satisfait, alors il en est de même du critère de la racine.

6.9 Limites supérieures et inférieures

DEFINITION Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}$ (voire $\overline{\mathbb{R}}$) , on pose

$$\limsup_k x_k := \inf_{l\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right) \in \overline{\mathbb{R}}$$

et

$$\liminf_k x_k := \sup_{l\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right) \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

On dit que c'est la *limite supérieure* , resp. *inférieure* de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

EXEMPLE 1 On a

$$\limsup_k (-1)^k = 1 \quad , \quad \liminf_k (-1)^k = -1 \ ,$$

et

$$\limsup_{k\geqslant 1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = 0 \quad , \quad \liminf_{k\geqslant 1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = 0 \ .$$

En effet

$$\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} (-1)^k = 1 \quad , \quad \inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} (-1)^k = -1$$

et

$$\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{l} & & l \text{ pair} \\ & \text{si} & \\ \frac{1}{l+1} & & l \text{ impair} \end{array} \right. \quad , \quad \inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{l+1} & & l \text{ pair} \\ & \text{si} & \\ -\frac{1}{l} & & l \text{ impair} \end{array} \right. .$$

REMARQUE 1 Les suite $\left(\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right)_{l\in\mathbb{N}}$ et $\left(\inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right)_{l\in\mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors le théorème 5.3, p. 102, montre que ces suites sont convergentes, donc que

$$\limsup_k x_k := \lim_{l\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right) \in \mathbb{R}$$

et

$$\liminf_k x_k := \lim_{l\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant l} x_k\right) \in \mathbb{R} \ .$$

LEMME *Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ est convergente si, et seulement si, on a*

$$\limsup_k x_k = \liminf_k x_k \in \mathbb{R} \ .$$

Dans ce cas on a

$$\lim_k x_k = \limsup_k x_k = \liminf_k x_k \ .$$

La démonstration est laissée en exercice. Il est judicieux de prouver tout d'abord l'assertion de l'exercice 1 ci-dessous. □

Nous pouvons maintenant formuler les conditions de convergence des critères du quotient 6.6 et de la racine 6.8 sous la forme suivante :

PROPOSITION *Soit $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ une série de $\mathbb{C}$.*

(i) Si $z_l \neq 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et

$$\limsup_l \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| < 1 \ ,$$

alors cette série est absolument convergente.

(ii) Si $z_l \neq 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et

$$\liminf_l \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| > 1 \ ,$$

alors cette série est divergente.

(iii) Si

$$\limsup_l \sqrt[l]{|z_l|} < 1 \ ,$$

alors cette série est absolument convergente.

(iv) Si

$$\limsup_l \sqrt[l]{|z_l|} > 1 \ ,$$

alors cette série est divergente.

Démonstration de (i) La condition est équivalente à l'existence d'un q tel que

$$\limsup_l \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{l\in\mathbb{N},l\geqslant k} \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| < q < 1 \ ,$$

donc par la propriété d'approximation 4.8, p. 79, à l'existence d'un $q \in [0,1[$ et d'un $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_{l\geqslant m} \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| \leqslant q \ ,$$

i.e.

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| \leqslant q \quad \text{pour tout } l \geqslant m \ .$$

Démonstration de (ii) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{l\geqslant k} \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| \geqslant 1 \ .$$

On a donc $|z_{l+1}| \geqslant |z_l|$ et par suite $|z_l| \geqslant |z_k|$ pour tout $l \geqslant k$, ce qui montre que (z_k) est une suite qui ne converger pas vers 0 , d'où le résultat par le corollaire 6.4.

Démonstration de (iii) La condition est équivalente à l'existence d'un q tel que

$$\limsup_l \sqrt[l]{|z_l|} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{l\in\mathbb{N},l\geqslant k} \sqrt[l]{|z_l|} < q < 1 \ ,$$

donc par la propriété d'approximation 4.8, p. 79, à l'existence d'un $q \in [0,1[$ et d'un $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_{l\geqslant m} \sqrt[l]{|z_l|} \leqslant q \ ,$$

i.e.

$$\sqrt[l]{|z_l|} \leqslant q \quad \text{pour tout } l \geqslant m \ .$$

Démonstration de (iv) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{l \geqslant k} \sqrt[l]{|z_l|} > 1 \ .$$

Il existe donc $\alpha(k) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sqrt[\alpha(k)]{\left|z_{\alpha(k)}\right|} \geqslant 1$$

et nous pouvons supposer que α est une sous-suite de $\mathbb{N}$. On a alors

$$\left|z_{\alpha(k)}\right| \geqslant 1 \ ,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui montre $\left(z_{\alpha(k)}\right)$ est une sous-suite qui ne converge pas vers 0 , d'où le résultat par le corollaire 6.4. □

REMARQUE 2 En pratique la suite $\left(\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right|\right)_{l \in \mathbb{N}}$, resp. $\left(\sqrt[l]{|z_l|}\right)_{l \in \mathbb{N}}$, possède une limite. On a alors convergence absolue lorsque cette limite est < 1 . Si cette limite est > 1 , la série est divergente.

Par exemple dans l'exemple 6.6.1, on a

$$\lim_l \left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| = \lim_l |z| \cdot \left(1 + \frac{1}{l}\right)^s = |z| \ ,$$

si $s \in \mathbb{N}$. Pour le cas général $s \in \mathbb{R}_+$ on a besoin de la notion de continuité (cf. chapitre 7).

EXEMPLE 2 Considérons la série $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ définie par

$$a_l := \begin{cases} \frac{1}{l^2} & \text{si } l \text{ impair} \\ \frac{1}{(l+1)^3} & \text{si } l \text{ pair} \end{cases} .$$

Cette série étant majorée par la série convergente $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ est donc convergente, mais

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^2} = 2k+1 \quad \text{et} \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{(2k+1)^2}{(2k+3)^3} \leqslant \frac{1}{2k+3} \ ,$$

donc $\limsup_l \frac{a_{l+1}}{a_l} = \infty$ et $\liminf_l \frac{a_{l+1}}{a_l} = 0$.

EXERCICE 1 Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$ et A l'ensemble de ses points d'accumulation. Montrer que

$$\limsup_k x_k = \max A \quad \text{et} \quad \liminf_k x_k = \min A \ .$$

EXERCICE 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $[a, b]$. Montrer que

$$\frac{1}{\limsup_k x_k} = \liminf_k \frac{1}{x_k} \ .$$

6.10 Le rayon de convergence d'une série entière

DEFINITION Soient $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ une série entière et C l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que cette série soit convergente. On dit que

$$R := \sup |C| \in \overline{\mathbb{R}}$$

est le *rayon de convergence* de cette série.

PROPOSITION *Soient $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.*

(i) Si $|z| < R$, alors cette série est absolument convergente.
(ii) Si $|z| > R$, alors cette série est divergente.
(iii) Si $|z| = R$ on ne peut rien affirmer.

Si $|z| < R$, par la propriété d'approximation 4.8, p. 79, il existe $w \in C$ tel que $|z| < |w|$, d'où notre affirmation par la proposition 6.8. Les autre points sont triviaux. □

EXEMPLE 1 Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum_{l=0}^{\infty} z^l$ est 1 .

Cf. exemple 6.1 . □

EXEMPLE 2 Le rayon de convergence de la série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot z^l$ est 1 .

En effet pour $z \neq 0$, on a

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| = \left|\frac{z^{l+1}}{l+1} \cdot \frac{l}{z^l}\right| = \frac{l}{l+1} \cdot |z| \leqslant |z| \ .$$

Le critère du quotient montre donc que cette série est convergente pour $|z| < 1$. Comme elle est divergente pour $z = 1$, on obtient la série harmonique (exemple 6.2.1), le rayon de convergence est 1 . □

Remarquons que pour $z = -1$ on obtient la série harmonique alternée qui est convergente. Nous montrerons plus tard que cette série est convergente si $|z| = 1$ et $z \neq 1$.

THEOREME (Formule d'Hadamard) *Le rayon de convergence d'une série entière*

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$$

est

$$R = \frac{1}{\limsup_l \sqrt[l]{|c_l|}}$$

avec les conventions $\frac{1}{0} := \infty$ et $\frac{1}{\infty} := 0$.

Par la proposition 4.11 on a

$$|z| < \frac{1}{\limsup_l \sqrt[l]{|c_l|}} \quad \Longrightarrow \quad \limsup_l \sqrt[l]{|c_l \cdot z^l|} < 1$$

et

$$|z| > \frac{1}{\limsup_l \sqrt[l]{|c_l|}} \quad \Longrightarrow \quad \limsup_l \sqrt[l]{|c_l \cdot z^l|} > 1 \ .$$

Le résultat découle donc de la proposition 6.9. □

EXERCICE 1 Montrer que

$$\sum_{l=0}^{\infty} z^{k!}$$

est une série entière dont le rayon de convergence est 1 .

EXERCICE 2 Si $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ est une série entière de rayon de convergence R , alors $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^{2l}$ est une série entière dont le rayon de convergence est $\sqrt{R}$.

EXERCICE 3 Si $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot z^l$ et $\sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot z^l$ sont des séries entière dont les rayons de convergence R_a et R_b respectivement appartiennent à $]0, \infty[$, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot b_l \cdot z^l$ satisfait à $R \geqslant R_a \cdot R_b$.

EXERCICE 4 Déterminer les $x \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels la série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot x^{-l}$ est convergente.

EXERCICE 5 Déterminer la limite des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivantes :

(a)

$$x_k := \left(\sum_{l=0}^{k} l^3\right) \cdot k^{-4} \ .$$

(b)

$$x_k := \left(\sum_{l=0}^{n} l^k\right) \cdot n^{-k} \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N}^* \ .$$

6.11 Dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Rappelons qu'un ensemble A est dit dénombrable (cf. définition 3.4) s'il est fini ou s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur A . Par exemple $\mathbb{Z}$ est dénombrable, puisque

$$n \longmapsto (-1)^n \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} m & \text{si} \quad n = 2m \\ -m-1 & \phantom{\text{si}} \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

PROPOSITION $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Plus précisément l'application

$$(n,m) \longmapsto \frac{1}{2} \cdot (n+m)(n+m+1) + m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

est une bijection.

L'application $(n,m) \longmapsto (n+m,m)$ est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur l'ensemble A des $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $l \leqslant k$. C'est immédiat puisque, pour tout $(k,l) \in A$, l'équation $(n+m,m) = (k,l)$ possède une unique solution $(n,m) = (k-l,l)$.

D'autre part, en énumérant les éléments de A de gauche à droite et de bas en haut (au plus jusqu'à la diagonale), on voit que

$$(k,l) \longmapsto \sum_{j=0}^{k} (j+1) - (k-l) - 1$$

est une bijection de A sur $\mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que

$$\#\left(\{(j,r) \mid r = 0, \ldots, j\}\right) = j+1 \quad \text{et} \quad \#\left(\{(k,r) \mid r = l+1, \ldots, k\}\right) = k-l \ .$$

Le terme -1 provient du fait que 0 est l'image de $(0,0)$!

Comme

$$\sum_{j=0}^{k} (j+1) = \left(\sum_{j=1}^{k} j \right) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \ ,$$

on a

$$\sum_{j=0}^{k} (j+1) - (k-l) - 1 = \frac{k(k+1)}{2} + l \ ,$$

donc

$$(n,m) \longmapsto \frac{1}{2} \cdot (n+m)(n+m+1) + m$$

est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. L'application réciproque est donc une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. □

REMARQUE L'application réciproque peut se calculer de la manière suivante : Etant donné $N \in \mathbb{N}$, il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{k(k+1)}{2} \leqslant N < \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \ .$$

Alors l'unique solution $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de

$$\frac{1}{2} \cdot (n+m)(n+m+1) + m = N$$

est donnée par

$$n + m = k \quad \text{et} \quad m = N - \frac{k(k+1)}{2} \ ,$$

i.e.

$$n := k - m \quad \text{et} \quad m := N - \frac{k(k+1)}{2} \ .$$

6.12 Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

LEMME *Un ensemble non-vide A est dénombrable si, et seulement si, il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A .*

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{A}$ est surjective, par récurrence on construit comme pour la démonstration du lemme 5.10.(ii) une suite strictement croissante $(k_l)_{l \leqslant n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ ou $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ n'ayant qu'un seul élément dans chaque partie $\overset{-1}{f}(a)$ pour $a \in A$ (cf. exemple 4.1). L'application $l \longmapsto f(k_l)$ est alors une bijection de $\{l \in \mathbb{N} \mid l \leqslant n\}$ ou $\mathbb{N}$ sur A . □

THEOREME *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Soit donc $(A_j)_{j \in J}$ une famille dénombrable, i.e. J est dénombrable, d'ensembles A_j dénombrables. Il existe donc des applications surjectives

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow J \quad \text{et} \quad g_j : \mathbb{N} \longrightarrow A_j \text{ pour tout } j \in J \ .$$

Considérons alors l'application

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{j \in J} A_j : (n, m) \longmapsto g_{f(n)}(m) \ .$$

Elle est évidemment surjective, d'où le résultat. □

COROLLAIRE *$\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, soit $A_q := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p \in Z \right\}$. On a $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in N^*} A_q$. Mais $\mathbb{N}^*$ est dénombrable, ainsi que chaque A_q , puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable. □

EXERCICE 1 Montrer que

(a) L'ensemble de toutes les parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

(b) L'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$ est non-dénombrable.

EXERCICE 2 Montrer que l'application

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (x, y) \longmapsto 2^{x-1} \cdot (2y - 1)$$

est surjective.

On démontrera par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utilisant l'exercice 3.8, que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$, il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2^{x-1} \cdot (2y - 1)$.

6.13 Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$

THEOREME (de Cantor) *$\mathbb{R}$, ainsi que $[0,1[$, ne sont pas dénombrables.*

Il nous suffit de montrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable, ce que nous allons faire par l'absurde en utilisant le procédé diagonal de Cantor.

Si $[0,1[$ était dénombrable, soit $(x_k)_{k\geqslant 1}$ une énumération de ces nombres et écrivons leur développement décimal propre (cf. 6.3) :

$$x_k = 0, x_{k,1}x_{k,2}\ldots$$

avec $x_{k,l} \in \{0,1,\ldots,9\}$ pour tout $k,l \geqslant 1$. Définissons alors un nombre réel par

$$y := 0, y_1 y_2 \ldots \quad \text{tel que } y_l := \begin{cases} 1 & \\ & \text{si} \\ 2 & \end{cases} \begin{array}{l} x_{l,l} \neq 1 \\ \\ x_{l,l} = 1 \end{array} .$$

Le développement décimal de y étant propre, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x_m$. Mais alors $y_m = x_{m,m}$, ce qui est absurde. □

COROLLAIRE *L'ensemble des nombres irrationnels est non-dénombrable.*

Si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il en serait de même de $\mathbb{R}$ par le théorème 6.12. □

REMARQUE On dit qu'un nombre réel est *algébrique* s'il est solution d'une équation de la forme

$$\sum_{l=0}^{k} c_l \cdot x^l = 0 \quad \text{avec } c_l \in \mathbb{Z} \text{ (ou } \mathbb{Q} \text{) pour tout } l \in \{0,..,k\} \ .$$

Par exemple $\sqrt{2}$ est algébrique, mais π et e ne sont pas algébriques. On dit qu'un nombre est *transcendant* s'il n'est pas algébrique.

EXERCICE Montrer que

(a) L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

(b) L'ensemble des nombres transcendants n'est donc pas dénombrable.

6.14 Réarrangement

DEFINITION Si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une bijection, alors la série $\sum_{j=0}^{\infty} z_{\sigma(j)}$ est dite un *réarrangement* de la série $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$.

THEOREME (de réarrangement) *Soit $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ une série absolument convergente. Alors tout réarrangement $\sum_{j=0}^{\infty} z_{\sigma(j)}$ est absolument convergent et on a*

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_{\sigma(j)} = \sum_{l=0}^{\infty} z_l \ .$$

Soient $z := \sum_{l=0}^{\infty} z_l$ et, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{l=N}^{\infty} |z_l| = \sum_{l=0}^{\infty} |z_l| - \sum_{l=0}^{N-1} |z_l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Il vient alors

$$\left| z - \sum_{l=0}^{N-1} z_l \right| = \left| \sum_{l=N}^{\infty} z_l \right| \leqslant \sum_{l=N}^{\infty} |z_l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

en utilisant l'inégalité du critère de la majorante 6.5. Posons alors

$$M := \max \left\{ \sigma^{-1}(l) \ \middle| \ l = 0, \ldots, N-1 \right\} \ .$$

Pour tout $k \geqslant M$, on a

$$\sigma(\{0, 1, \ldots, k\}) \supset \{0, 1, \ldots, N-1\} \ .$$

En posant

$$L := \sigma(\{0, 1, \ldots, k\}) \smallsetminus \{0, 1, \ldots, N-1\} \ ,$$

pour tout $l \in L$, on a $l \geqslant N$ et on obtient tout d'abord

$$\sum_{j=0}^{k} \left| z_{\sigma(j)} \right| = \sum_{l=0}^{N-1} |z_l| + \sum_{l \in L} |z_l| \leqslant \sum_{l=0}^{N-1} |z_l| + \sum_{l=N}^{\infty} |z_l| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} |z_l| < \infty \ ,$$

ce qui montre que le réarrangement est absolument convergent par la proposition 6.2. D'autre part

$$\left| \sum_{j=0}^{k} z_{\sigma(j)} - z \right| \leqslant \left| \sum_{j=0}^{k} z_{\sigma(j)} - \sum_{l=0}^{N-1} z_l \right| + \left| \sum_{l=0}^{N-1} z_l - z \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l \in L} |z_l| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{l=N}^{\infty} |z_l| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon \ ,$$

d'où la formule. $\square$

EXEMPLE Il existe un réarrangement de la série harmonique alternée qui est divergent. Par exemple :

$$1-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]+\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{6}\right]+\ldots+\left[\sum_{l=0}^{2^{k-1}-1}\frac{1}{2^k+2l+1}-\frac{1}{2k+2}\right]+\ldots$$

Cette série est divergente, car pour $k \geqslant 2$ on a

$$\sum_{l=0}^{2^{k-1}-1}\frac{1}{2^k+2l+1}-\frac{1}{2k+2} \geqslant 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2k+2} \geqslant \frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12} \ ,$$

ce qui montre qu'une sous-suite des sommes partielles est divergente.

REMARQUE Si $(z_j)_{j\in J}$ est une famille de $\mathbb{C}$ indexée par un ensemble J dénombrable infini et si, pour une énumération $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow J$ de J , la série $\sum_{l=0}^{\infty} z_{\sigma(l)}$ est absolument convergente, alors elle l'est pour toute énumération. Nous dirons alors que la série $\sum_{j\in J} z_j$ est *absolument convergente* (on dit aussi que $(z_j)_{j\in J}$ est une *famille sommable*) et, comme la somme de cette série ne dépend pas du choix de cette énumération nous la noterons aussi

$$\sum_{j\in J} z_j \ .$$

6.15 Produit de deux séries

LEMME *Si $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ est une série convergente, alors pour toute sous-suite $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ telle que $l_0 = 0$, la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=l_k}^{l_{k+1}-1} z_l\right)$$

est convergente et de même somme. La réciproque est vraie si la série est à termes positifs.

C'est évident puisque la suite des sommes partielles de la seconde série est une sous-suite de celles de la première. La seconde partie découle de la proposition 6.2. □

EXEMPLE La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \text{ est divergente} \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{\infty}(1-1) = 0 \ .$$

Nous pouvons maintenant aborder le problème du produit de deux séries. Soient $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ et $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ des séries convergentes de $\mathbb{C}$. On a alors

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} z_l\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty} w_l\right) = \left(\lim_k \sum_{l=0}^{k} z_l\right)\cdot\left(\lim_k \sum_{l=0}^{k} w_l\right) = \lim_k \left(\sum_{l=0}^{k} z_l\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{k} w_m\right) =$$

$$= \lim_k \sum_{l,m=0}^{k} z_l\cdot w_m = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ 0\leqslant l,m\leqslant k \\ l=k \text{ oder } m=k}} z_l\cdot w_m\right) ,$$

cette dernière série étant donc convergente.

On somme suivant le schéma suivant :

$$\begin{array}{cc|c|c|c|c}
z_0\cdot w_0 & \multicolumn{1}{|c}{z_0\cdot w_1} & z_0\cdot w_2 & z_0\cdot w_3 & \ldots \\
\cline{1-1}
z_1\cdot w_0 & z_1\cdot w_1 & z_1\cdot w_2 & z_1\cdot w_3 & \ldots \\
\cline{1-2}
z_2\cdot w_0 & z_2\cdot w_1 & z_2\cdot w_2 & z_2\cdot w_3 & \ldots \\
\cline{1-3}
z_3\cdot w_0 & z_3\cdot w_1 & z_3\cdot w_2 & z_3\cdot w_3 & \ldots \\
\cline{1-4}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Cette manière de sommer n'est malheureusement pas utile en pratique. Par exemple si l'on multiplie deux séries entières, on préfère sommer en diagonale,

$$\begin{array}{ccccc}
z_0 \cdot w_0 & z_0 \cdot w_1 & z_0 \cdot w_2 & z_0 \cdot w_3 & \cdots \\
z_1 \cdot w_0 & z_1 \cdot w_1 & z_1 \cdot w_2 & z_1 \cdot w_3 & \cdots \\
z_2 \cdot w_0 & z_2 \cdot w_1 & z_2 \cdot w_2 & z_2 \cdot w_3 & \cdots \\
z_3 \cdot w_0 & z_3 \cdot w_1 & z_3 \cdot w_2 & z_3 \cdot w_3 & \cdots \\
\iddots & \iddots & \iddots & &
\end{array}$$

afin de mettre les termes de même puissance entre parenthèses.

THEOREME (Méthode de Cauchy) *Si les séries $\sum_{l=0}^{\infty} z_l$ et $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ sont absolument convergentes, alors*

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} z_l\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_l\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ l+m=k}} z_l \cdot w_m\right) ,$$

la série du second membre étant absolument convergente.

Puisque les séries $\sum_{l=0}^{\infty} |z_l|$ et $\sum_{l=0}^{\infty} |w_l|$ sont convergentes, ce qui précède montre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ 0\leqslant l,m\leqslant k \\ l=k \text{ oder } m=k}} |z_l| \cdot |w_m|\right)$$

est convergente ; la série obtenue en supprimant les parenthèses est donc aussi convergente par le lemme, puisque les termes sont positifs. Ceci montre que la série $\sum_{l,m\geqslant 0} z_l \cdot w_m$ est absolument convergente. Par le théorème du réarrangement 6.14 les deux séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ 0\leqslant l,m\leqslant k \\ l=k \text{ oder } m=k}} z_l \cdot w_m\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ l+m=k}} z_l \cdot w_m\right)$$

ont même somme. $\square$

EXERCICE Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \cdot z^l \quad \text{et} \quad \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+2) \cdot (l+1) \cdot z^l \ ,$$

en appliquant la méthode de Cauchy à des séries du type $\sum_{l=0}^{\infty} z^l$. En déduire la somme des séries

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{2^l} \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^2}{2^l} \ .$$

6.16 La fonction exponentielle

LEMME *La série entière* $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$ *est absolument convergente pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *Son rayon de convergence est* ∞ .

En effet on a

$$\left|\frac{z_{l+1}}{z_l}\right| = \left|\frac{z^{l+1}}{(l+1)!} \cdot \frac{l!}{z^l}\right| = \frac{|z|}{l+1} \leqslant \frac{1}{2} \ ,$$

si $l \geqslant 2|z|$, d'où notre assertion par le critère du quotient 6.6. ☐

DEFINITION La série entière $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$ s'appelle *série exponentielle* . La fonction définie par

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \exp(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$$

s'appelle la *fonction exponentielle complexe* . En restreignant on obtient la *fonction exponentielle réelle*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \exp(x) \ .$$

On dit que

$$e := \exp(1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = 2,71828\ldots$$

est le *nombre d'Euler* .

Rappelons les exercices 5.3.1, p. 102, et 6.2.1. On a

$$e = \lim\nolimits_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ .$$

REMARQUE La suite $\left(\sqrt[k]{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et $\sup_k \sqrt[k]{k!} = \infty$.

En effet $\sqrt[k]{k!} < \sqrt[k+1]{(k+1)!}$ est équivalent à $k! < \left(\sqrt[k+1]{(k+1)!}\right)^k$, donc à $(k!)^{k+1} < [k! \cdot (k+1)]^k$ et par suite à $k! < (k+1)^k$. Finalement par la formule d'Hadamard 6.10, il vient

$$\sup\nolimits_k \sqrt[k]{k!} = \frac{1}{\inf_k \sqrt[k]{\frac{1}{k!}}} = \infty \ ,$$

en ayant utilisé la proposition 4.11.(vii). ☐

PROPOSITION (Estimation du reste) *En écrivant*

$$\exp(z) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{z^l}{l!} + r_n(z) \ ,$$

on a

$$|r_n(z)| \leqslant 2 \cdot \frac{|z|^n}{n!} \quad \textit{pour tout } |z| \leqslant \frac{n+1}{2} \ .$$

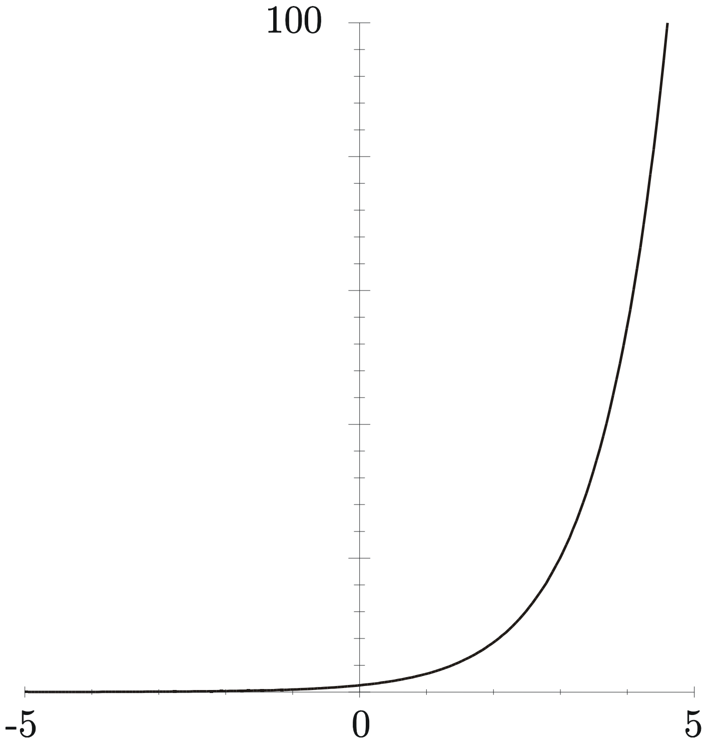
Si $|z| \leqslant \frac{n+1}{2}$, on a

$$|r_n(z)| = \left| \sum_{l=n}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \right| \leqslant \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|z|^l}{l!} = \frac{|z|^n}{n!} \cdot \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|z|^{l-n}}{(n+1) \cdot \ldots \cdot l} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|z|^n}{n!} \cdot \sum_{l=n}^{\infty} \left(\frac{|z|}{n+1} \right)^{l-n} \leqslant \frac{|z|^n}{n!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^l = 2 \cdot \frac{|z|^n}{n!} \ .$$

□

Ceci nous permet de calculer des valeurs de exp , par exemple e , avec une estimation à priori de l'erreur que l'on fait.



$x \longmapsto \exp(x)$

D'après le schéma de Horner on a

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!} = \left(\left(\ldots \left(\left(\frac{z}{k} + 1 \right) \cdot \frac{z}{k-1} + 1 \right) \cdot \frac{z}{k-2} + \ldots + 1 \right) \cdot \frac{z}{2} + 1 \right) \cdot z + 1 \ ,$$

ce qui permet de faire un calcul sans avoir besoin de mettre des données en mémoire. Par exemple on a les valeurs approximatives suivantes :

t	-10	-3	-1	0	1	3	10
e^t	$4.540 \cdot 10^{-5}$	0.049	0.36	1	2.71	20.08	$2.20 \cdot 10^4$

t	22	29	63
e^t	$3.58 \cdot 10^9$	$3.93 \cdot 10^{12}$	$2.29 \cdot 10^{27}$
$t \cdot 10\,\mathrm{cm}$	$2.2\,\mathrm{m}$	$2.9\,\mathrm{m}$	$6.3\,\mathrm{m}$
$e^t \cdot 10\,\mathrm{cm}$	presqu'à la lune	plus loin que le soleil	diamètre double de l'univers

En prenant une échelle de 10 cm par unité sur les deux axes, $\exp(22)$ correspond environ à $3.58 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. La distance de la terre à la lune est comprise entre $3.65 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ et $4.07 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, celle du soleil entre $1.47 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ et $1.52 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Le diamètre de l'univers est environ de 10^{10} années-lumière, donc environ $10^{26}\,\mathrm{m}$, puisque

$$1\,\mathrm{AL} := 9.4607 \times 10^{15}\,\mathrm{m} \simeq 10^{16}\,\mathrm{m}$$

($3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60^2\,\mathrm{s} \simeq 9.46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$).

EXERCICE Est-ce que la série $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{l^2}\right) - 1\right)$ est convergente ?

6.17 Equation fonctionnelle de l'exponentielle

THEOREME *Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on a*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \ .$$

Comme la série exponentielle est absolument convergente, on peut utiliser le méthode de Cauchy 6.15 :

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{l,m \geqslant 0 \\ l+m=k}} \frac{z^l \cdot w^m}{l! \cdot m!}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \binom{l}{k} \cdot z^l \cdot w^{k-l}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (z+w)^k = \exp(z+w) \ ,$$

en ayant utiliser la formule du binôme 3.12. $\square$

COROLLAIRE

(i) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) \neq 0$ et*

$$\exp(-z) = \exp(z)^{-1} \ .$$

(ii) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\exp(x) > 0 \ .$$

(iii) *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\exp(nz) = \exp(z)^n \ .$$

(iv) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} \ .$$

Démonstration de (i) On a

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1 \ .$$

Démonstration de (ii) On écrit

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0 \ ,$$

puisque $\exp\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathbb{R}$.

Démonstration de (iii) On le démontre par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\exp(0) = 1 = \exp(z)^0$$

et

$$\exp((n+1) \cdot z) = \exp(z+nz) = \exp(z) \cdot \exp(nz) = \exp(z) \cdot \exp(z)^n = \exp(z)^{n+1} \ .$$

Pour $n < 0$, il vient alors

$$\exp(nz) = \exp(-(-nz)) = \exp((-n)\cdot z)^{-1} = \left[\exp(z)^{(-n)}\right]^{-1} = \exp(z)^n \ .$$

Démonstration de (iv) On a

$$\exp(\overline{z}) = \lim_k \sum_{l=0}^{k} \frac{\overline{z}^l}{l!} = \lim_k \overline{\sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!}} = \overline{\lim_k \sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!}} = \overline{\exp(z)} \ .$$

□

REMARQUE Si $x \in \mathbb{R}$, on calcul $\exp(x)$ en décomposant x en

$$x = \lfloor x \rfloor + h \quad \text{avec } 0 \leqslant h < 1 \ ,$$

d'où

$$\exp(x) = \exp(\lfloor x \rfloor + h) = e^{\lfloor x \rfloor} \cdot \exp(h) \ .$$

De même si $z \in \mathbb{C}$, on calcule $\exp(z)$ en décomposant z en

$$z = x + i \cdot y \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R} \ ,$$

d'où

$$\exp(z) = \exp(x + i\cdot y) = \exp(x) \cdot \exp(i \cdot y) \ .$$

EXERCICE Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions hyperboliques par

$$\cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot [\exp(x) + \exp(-x)] \quad \text{et} \quad \sinh(x) := \frac{1}{2} \cdot [\exp(x) - \exp(-x)] \ .$$

Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

(a)
$$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$$

(b)
$$\sinh(x+y) = \cosh(x) \cdot \sinh(y) + \sinh(x) \cdot \cosh(y)$$

(c)
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \ .$$

6.18 Les fonctions trigonométriques

Nous allons étudier la fonction

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \exp(ix) \ .$$

Posons

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \ .$$

LEMME *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) \in \mathbb{U}$.*

En effet

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp\left(\overline{ix}\right) = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) =$$

$$= \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1 \ .$$

□

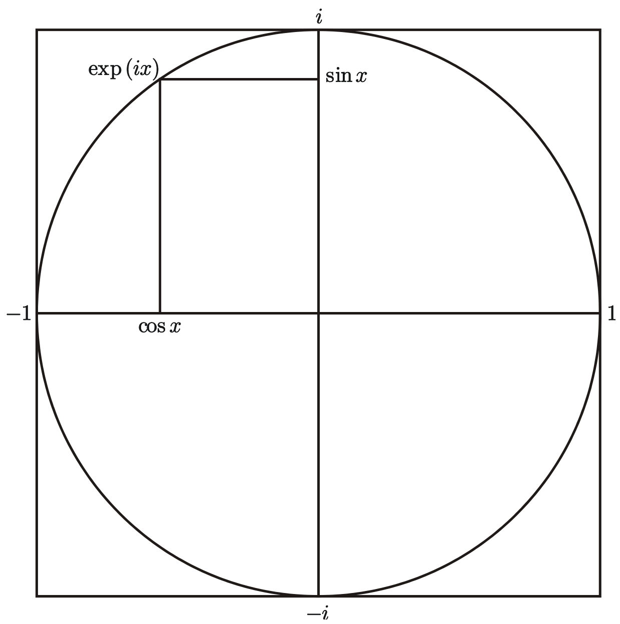
DEFINITION Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on definit

$$\cos x := \operatorname{Re}(\exp(ix)) \quad \text{et} \quad \sin x := \operatorname{Im}(\exp(ix)) \ ,$$

i.e.

Formule d'Euler

$$\exp(ix) := \cos x + i \cdot \sin x \ .$$



On dit que cos et sin sont les fonctions *cosinus* et *sinus* .

PROBLEME Quelle est la relation entre le point $\exp(ix) \in \mathbb{U}$ et $x \in \mathbb{R}$?

Nous verrons plus tard (cf. théorème 7.6 et remarque 7.7.2) que l'extrémité d'un arc sur $\mathbb{U}$ de longueur $|x|$ parcouru dans le sens positif si $x \geqslant 0$, resp. dans le sens négatif si $x < 0$, est $\exp(ix)$.

PROPOSITION *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

(i)
$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot [\exp(ix) + \exp(-ix)] \quad et \quad \sin x = \frac{1}{2i} \cdot [\exp(ix) - \exp(-ix)] \ .$$

(ii)
$$\cos(-x) = \cos\ x \quad et \quad \sin(-x) = -\sin x \ .$$

(iii)
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ .$$

Théorèmes d'addition

(iv)
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

et
$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \ .$$

(v)
$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

et
$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \ .$$

(vi)
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$$

et
$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \ .$$

Démonstration de (i) On a
$$\cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \frac{1}{2} \cdot \left[\exp(ix) + \overline{\exp(ix)}\right] = \frac{1}{2} \cdot [\exp(ix) + \exp(-ix)]$$
et
$$\sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \frac{1}{2} \cdot \left[\exp(ix) - \overline{\exp(ix)}\right] = \frac{1}{2} \cdot [\exp(ix) - \exp(-ix)] \ .$$

Démonstration de (ii) Il vient
$$\cos(-x) + i \cdot \sin(-x) = \exp(i \cdot (-x)) = \overline{\exp(ix)} = \overline{\cos x + i \cdot \sin x} = \cos x - i \cdot \sin x \ .$$

Démonstration de (iii) On a
$$1 = |\exp(ix)|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x \ .$$

Démonstration de (iv) Par l'équation fonctionnelle de l'exponentielle 6.17, on obtient
$$\cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) = \exp(i(x+y)) = \exp(ix) \cdot \exp(iy) =$$
$$= [\cos x + i \cdot \sin x] \cdot [\cos y + i \cdot \sin y] =$$
$$= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + i \cdot [\cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y] \ .$$

Démonstration de (v) Posons $u := \frac{x+y}{2}$ et $v := \frac{x-y}{2}$. On a alors $x = u+v$ et $y = u-v$, d'où le résultat par (iv).

Démonstration de (vi) C'est un cas particulier de (iv). □

EXERCICE Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

6.19 Développement en série des fonctions $\cos$ et $\sin$

PROPOSITION *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \cdot x^{2l} \quad et \quad \sin x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \cdot x^{2l+1} ,$$

ces séries étant absolument convergentes.

En effet, on a $i^{2k} = (-1)^k$ et $i^{2k+1} = (-1)^k \cdot i$, donc

$$\cos x + i \cdot \sin x = \exp(ix) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ix)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + i \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} ,$$

par le lemme 6.15 et la proposition 6.1. Ces séries sont absolument convergentes car elles sont majorées par la série exponentielle $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{|x|^l}{l!}$ en n'oubliant pas les trous. □

REMARQUE On peut montrer que l'on a l'estimation du reste suivante : Si

$$\cos x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \cdot x^{2l} + r_{2k+2}(x) \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \cdot x^{2l+1} + r_{2k+3}(x) ,$$

alors

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \quad \text{pour tout } |x| \leqslant n+1 .$$

Nous verrons (cf. exemple 8.9) que cette estimation est en fait valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que les suites $\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)_{k \geqslant n}$ et $\left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{k \geqslant n}$ sont décroissantes, si, et seulement si, $x \leqslant \sqrt{(2n+2)(2n+1)}$ et respectivement $x \leqslant \sqrt{(2n+3)(2n+2)}$.

En utilisant le critère de Leibniz 6.7, p. 142, montrer que l'on a

(b)

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{pour tout } x \in \left[-\sqrt{30}, \sqrt{30}\right] .$$

(c)

$$x \geqslant \sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6} \quad \text{pour tout } x \in \left[0, \sqrt{20}\right] .$$

En fait on a de meilleures inégalités comme le montre les figures qui suivent. Posons

$$f_0 := 1 , \ f_1 := 1 - \frac{\mathrm{id}^2}{2} , \ f_2 := 1 - \frac{\mathrm{id}^2}{2} + \frac{\mathrm{id}^4}{24} , \ f_3 := 1 - \frac{\mathrm{id}^2}{2} + \frac{\mathrm{id}^4}{24} - \frac{\mathrm{id}^6}{720}$$

et

$$g_0 := \mathrm{id}\ ,\ g_1 := \mathrm{id} - \frac{\mathrm{id}^3}{6}\ ,\ g_2 := \mathrm{id} - \frac{\mathrm{id}^3}{6} + \frac{\mathrm{id}^5}{120}\ ,\ g_3 := \mathrm{id} - \frac{\mathrm{id}^3}{6} + \frac{\mathrm{id}^5}{120} - \frac{\mathrm{id}^7}{5040}$$