

# Chapitre 13

## SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbb{R}^n$

ET

## LE THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

Version du 23 février 2006

## 13.1 Difféomorphismes

Soient  $X$  et  $Y$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  respectivement.

**DEFINITION** On dit qu'une application

$$\Phi : X \longrightarrow Y$$

est un *difféomorphisme* si  $\Phi$  est bijective et si  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont continûment dérivables.

**PROPOSITION** Soient  $\xi \in X$  et  $\Phi : X \longrightarrow Y$  un homéomorphisme dérivable en  $\xi$ . Pour que  $\Phi^{-1}$  soit dérivable en  $\Phi(\xi)$ , il faut et il suffit que  $D\Phi(\xi)$  soit inversible.

Dans ce cas, on a  $n = m$  et

$$D\Phi^{-1}(\Phi(\xi)) = D\Phi(\xi)^{-1} \quad \text{ou} \quad D\Phi^{-1}(\eta) = D\Phi\left(\Phi^{-1}(\eta)\right)^{-1}$$

en posant  $\eta := \Phi(\xi)$ .

Posons  $\eta := \Phi(\xi)$ . La condition est nécessaire, car de

$$\Phi^{-1} \circ \Phi = \text{id}_X \quad \text{et} \quad \Phi \circ \Phi^{-1} = \text{id}_Y,$$

on déduit

$$D\Phi^{-1}(\eta) \circ D\Phi(\xi) = D\text{id}_X(\xi) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad D\Phi(\xi) \circ D\Phi^{-1}(\eta) = D\text{id}_Y(\eta) = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}$$

par la formule de dérivation des fonctions composées 11.12. Ceci montre bien que  $D\Phi(\xi)$  est inversible, donc que  $n = m$ , ainsi que la formule.

Réciproquement, pour tout  $x \in X$ , on a

$$\Phi(x) = \Phi(\xi) + D\Phi(\xi)(x - \xi) + \varphi(x)$$

avec  $\lim_{\xi \neq x \rightarrow \xi} \frac{\varphi(x)}{|x - \xi|} = 0$ , puisque  $\Phi$  est dérivable en  $\xi$ . En posant pour tout  $y \in Y$ ,

$$\psi(y) := \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) - D\Phi(\xi)^{-1}(y - \eta),$$

il nous suffit de prouver que

$$\lim_{\eta \neq y \rightarrow \eta} \frac{\psi(y)}{|y - \eta|} = 0.$$

On a

$$\psi(y) := -D\Phi(\xi)^{-1} \left( y - \eta - D\Phi(\xi) \left[ \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right] \right) = -D\Phi(\xi)^{-1} \varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right),$$

donc

$$|\psi(y)| \leq \|D\Phi(\xi)^{-1}\| \cdot \left| \varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right) \right|$$

par le corollaire 11.8.

Il nous reste ainsi à montrer que

$$\lim_{\eta \neq y \rightarrow \eta} \frac{\varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right)}{|y - \eta|} = 0 .$$

Puisque  $\Phi^{-1}$  est continue, on a

$$\lim_{\eta \neq y \rightarrow \eta} \frac{\varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right)}{\left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right|} = \lim_{\xi \neq x \rightarrow \xi} \frac{\varphi(x)}{|x - \xi|} = 0 , \quad (*)$$

donc en particulier

$$\frac{\left| \varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right) \right|}{\left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right|} \leq \frac{1}{2 \cdot M} \quad \text{si } |y - \eta| \leq \delta$$

pour un certain  $\delta > 0$ , en ayant posé  $M := \|D\Phi(\xi)^{-1}\|$ . Si  $|y - \eta| \leq \delta$ , il vient alors

$$\begin{aligned} \left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right| &\leq |\psi(y)| + |D\Phi(\xi)^{-1}(y - \eta)| \leq M \cdot \left| \varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right) \right| + M \cdot |y - \eta| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right| + M \cdot |y - \eta| , \end{aligned}$$

donc

$$\left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right| \leq 2 \cdot M \cdot |y - \eta| .$$

Ainsi

$$\frac{\varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right)}{|y - \eta|} = \frac{\left| \varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right) \right|}{\left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right|} \cdot \frac{\left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right|}{|y - \eta|} \leq 2 \cdot M \cdot \frac{\left| \varphi \left( \Phi^{-1}(y) \right) \right|}{\left| \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(\eta) \right|} ,$$

ce qui finit de prouver la proposition par (\*). □

**LEMME** La partie  $\text{GL}_{\mathbb{R}}(n)$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \approx \text{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$  des applications linéaires inversibles est ouverte et les applications

$$\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} : T \longmapsto \det T \quad \text{et} \quad \text{GL}_{\mathbb{R}}(n) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(n) : T \longmapsto T^{-1}$$

sont continûment dérivables.

En effet si  $T = (c_{k,l})$ , alors  $\det T$  est un polynôme en les  $c_{k,l}$ , donc continûment dérivable. On en déduit que

$$\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n) = \{\det \neq 0\}$$

est ouverte. Finalement la règle de Cramer montre que chaque coefficient de  $T^{-1}$  est le quotient d'un polynôme en les  $c_{k,l}$  par  $\det T$ , donc est aussi continûment dérivable.  $\square$

**COROLLAIRE** *Soit  $\Phi : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme continûment dérivable.*

(i) *Si  $\xi \in X$  et  $D\Phi(\xi)$  est inversible, alors il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\xi$  tel que  $D\Phi(x)$  soit inversible pour tout  $x \in U$ . En outre  $V := \Phi(U)$  est un ouvert et  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ .*

(ii) *Si  $D\Phi(x)$  est inversible pour tout  $x \in X$ , alors  $\Phi$  est un difféomorphisme.*

**Démonstration de (i)** La première partie est évidente, puisque  $\det \circ D\Phi : X \rightarrow \mathbb{K}$  est continue. Puisque  $U$  est ouvert dans  $X$  et que  $X$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ , il en est de même de  $U$  (cf. exercice 10.12.1.d). D'autre part comme  $\Phi$  est un homéomorphisme et que  $Y$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  est ouvert dans  $Y$ , donc aussi dans  $\mathbb{R}^n$ . Finalement  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  est continûment dérivable car, pour tout  $y \in V$ , on a

$$D\Phi^{-1}(y) = D\Phi\left(\Phi^{-1}(y)\right)^{-1},$$

ce qui montre que  $D\Phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  est la composition des applications

$$\Phi^{-1} : V \rightarrow U, \quad D\Phi : U \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n) \quad \text{et} \quad T \mapsto T^{-1} : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

**Démonstration de (ii)** C'est immédiat par (i).  $\square$

## 13.2 Théorème de la fonction réciproque

Nous allons maintenant améliorer substantiellement le corollaire précédent en supprimant l'hypothèse que  $\Phi$  est un homéomorphisme et que  $Y$  est ouvert.

**THEOREME (TFR)** *Soient  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in X$  et  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application continûment dérivable telle que  $D\Phi(\xi)$  soit inversible. Alors il existe des voisinages ouverts  $U$  de  $\xi$  dans  $X$  et  $V$  de  $\eta := \Phi(\xi)$  tels que  $\Phi$  soit un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ .*

Il nous suffit, d'après le corollaire 13.1.i et en considérant si nécessaire des voisinages ouverts un peu plus petit, de montrer qu'il existe des voisinages ouverts  $U$  de  $\xi$  dans  $X$  et  $V$  de  $\eta$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\Phi$  soit un homéomorphisme de  $U$  sur  $V$ , ce qui revient essentiellement à montrer que  $\Phi$  est localement bijective, donc que l'on peut résoudre localement et univoquement l'équation  $\Phi(x) = y$ . Mettons-la sous la forme équivalente

$$\Psi(x, y) := D\Phi(\xi)^{-1}(y - \Phi(x)) + x = x,$$

qui est une équation à point fixe avec

$$\Psi : X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Pour pouvoir utiliser le théorème de Banach-Caccioppoli 12.5, il nous faut considérer une restriction de  $\Psi$ .

Choisissons  $r > 0$  tel que  $B(\xi, r) \subset X$  et que

$$\sup_{x \in B(\xi, r)} \|\text{Id} - D\Phi(\xi)^{-1} D\Phi(x)\| \leq \frac{1}{2},$$

ce qui est possible puisque l'application  $x \longmapsto \text{Id} - D\Phi(\xi)^{-1} D\Phi(x) : X \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  est continue et est égale à 0 en  $\xi$ . Posons alors

$$\rho := \frac{r}{2 \cdot \|D\Phi(\xi)^{-1}\|}$$

et considérons

$$\Psi : B(\xi, r) \times D(\eta, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Pour tout  $u, v \in B(\xi, r)$  et  $y \in D(\eta, \rho)$ , on a

$$\begin{aligned} |\Psi(u, y) - \Psi(v, y)| &= |u - D\Phi(\xi)^{-1} \Phi(u) - [v - D\Phi(\xi)^{-1} \Phi(v)]| \leq \\ &\leq \sup_{x \in B(\xi, r)} \|\text{Id} - D\Phi(\xi)^{-1} D\Phi(x)\| \cdot |u - v| \leq \frac{1}{2} \cdot |u - v| \end{aligned}$$

par l'inégalité de la moyenne 11.14 appliquée à l'application

$$\text{id} - D\Phi(\xi)^{-1} \Phi : B(\xi, r) \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto x - D\Phi(\xi)^{-1} \Phi(x),$$

dont la dérivée est  $\text{Id} - D\Phi(\xi)^{-1} D\Phi(x)$ . Ceci prouve que  $\Psi$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne en la première variable. D'autre part, en utilisant ce que nous venons de démontrer pour  $v = \xi$ , on a

$$\begin{aligned} |\Psi(u, y) - \xi| &= |\Psi(u, y) - \Psi(\xi, y) + D\Phi(\xi)^{-1}(y - \Phi(\xi))| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot |u - \xi| + \|D\Phi(\xi)^{-1}\| \cdot |y - \Phi(\xi)| \leq \frac{1}{2} \cdot r + \|D\Phi(\xi)^{-1}\| \cdot \rho \leq r \end{aligned}$$

par le corollaire 11.8. Ceci montre que  $\Psi$  prend ses valeurs dans  $B(\xi, r)$ . Par le théorème de Banach-Caccioppoli 12.5 et l'exemple 12.5.1, il existe une application continue

$$\varphi : D(\eta, \rho) \longrightarrow B(\xi, r)$$

telle que, pour tout  $y \in D(\eta, \rho)$ ,  $\varphi(y)$  soit l'unique point fixe de  $\Psi(\cdot, y)$  dans  $B(x, r)$ , i.e. l'unique solution de  $\Phi(x) = y$  dans  $B(\xi, r)$ . Ceci montre que  $\Phi$  est une bijection de  $\varphi(D(\eta, \rho))$  sur  $D(\eta, \rho)$ . Posons

$$U := \varphi(D(\eta, \rho)) \cap D(\xi, r) = \overset{-1}{\Phi}(D(\eta, \rho)) \cap D(\xi, r) \quad \text{et} \quad V := \Phi(U) = \overset{-1}{\varphi}(U).$$

Ce sont des parties ouvertes de  $X$  respectivement  $D(\eta, \rho)$ , donc de  $\mathbb{R}^n$ . Finalement

$$\Phi : U \longrightarrow V$$

est un homéomorphisme, puisque  $\overset{-1}{\Phi} = \varphi|_V$ . □

**REMARQUE** Soit  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application continûment dérivable. Le théorème de la fonction réciproque peut s'exprimer en disant que si  $D\Phi(\xi)$  est inversible, alors  $\Phi$  est un difféomorphisme au voisinage de  $\xi$ . Mais même si  $D\Phi(x)$  est inversible pour tout  $x \in X$ , alors  $\Phi$  est localement un difféomorphisme sans être nécessairement un difféomorphisme, puisque  $\Phi$  peut ne pas être injective, comme le montre l'exemple 2 qui suit. On a toutefois le

**COROLLAIRE** Si  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est injective, continûment dérivable et si  $D\Phi(x)$  est inversible pour tout  $x \in X$ , alors  $Y := \Phi(X)$  est ouvert et  $\Phi : X \longrightarrow Y$  est un difféomorphisme.

En effet, pour tout  $x \in X$ , il existe des voisinages ouverts  $U_x \subset X$  et  $V_x$  dans  $\mathbb{R}^n$  de  $x$  et  $\Phi(x)$  respectivement tels que  $\Phi$  soit un difféomorphisme, donc un homéomorphisme, de  $U_x$  sur  $V_x$ . On a alors

$$Y := \Phi(X) = \bigcup_{x \in X} \Phi(U_x) = \bigcup_{x \in X} V_x,$$

ce qui montre que  $Y$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ . Puisque  $\overset{-1}{\Phi} : V_x \longrightarrow U_x$  est continue, on en déduit que  $\overset{-1}{\Phi} : Y \longrightarrow X$  est continue, d'où le résultat par le corollaire 13.1.ii. □

**EXEMPLE 1** L'hypothèse que  $\Phi$  soit continûment dérivable est indispensable comme le montre l'exemple suivant :

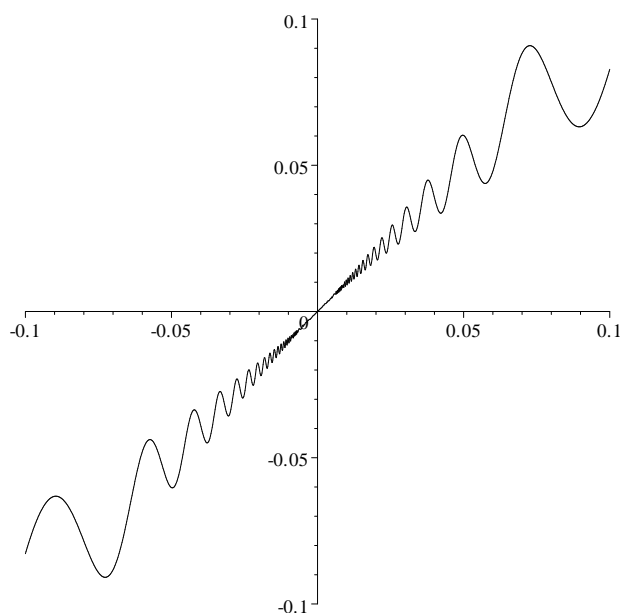
Soit  $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Phi(x) := \begin{cases} x + |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est dérivable,  $\Phi'(0) = 1$  et

$$\Phi'(x) = 1 + \frac{3}{2} \cdot \text{signum } x \cdot |x|^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x} - |x|^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Comme  $\Phi'$  est non-majorée et non-minorée dans tout voisinage de 0, la restriction de la fonction  $\Phi$  à ces voisinages n'est jamais strictement croissante, et par suite jamais injective.



$$x \longmapsto x + |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \sin \frac{1}{x}$$

Il est bon de remarquer que pour les valeurs petites de  $x$  le graphe n'est pas parfait, le pas d'échantillonnage étant trop grand!

### EXEMPLE 2 Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ .

Soit

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \longmapsto (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) .$$

On a

$$D\Phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} ,$$

donc

$$\det D\Phi_2(r, \varphi) = r .$$

Le théorème montre alors que

$$\Phi_2 : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

est localement un difféomorphisme, mais  $\Phi_2$  n'est pas injective, puisque

$$\Phi_2(r, \varphi + k \cdot 2\pi) = \Phi_2(r, \varphi) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} .$$

Quant au corollaire, il montre que si  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  sur lequel  $\Phi_2$  est injective, alors  $Y := \Phi_2(X)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $\Phi_2$  un difféomorphisme de  $X$  sur  $Y$ . En posant

$$x = r \cdot \cos \varphi \text{ et } y = r \cdot \sin \varphi \quad \text{pour tout } (r, \varphi) \in X ,$$

la proposition 13.1 montre que

$$D\Phi_2^{-1}(x, y) = D\Phi_2(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \cdot \sin \varphi & \frac{1}{r} \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc pu, sans connaître explicitement l'application réciproque, en calculer sa dérivée. Utilisant les résultats de 7.7, puisque  $\mathbb{R}^2$  s'identifie à  $\mathbb{C}$  par  $(x, y) \mapsto x + i \cdot y$ , on voit que

$$\Phi_2 : \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$$

est une bijection, donc un difféomorphisme.

On a

$$\Phi_2^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arg(x, y) \right),$$

en posant  $\arg(x, y) := \arg(x + i \cdot y)$ . Rappelons que la fonction  $\arg$  se calcule à l'aide des formules

$$\arg(x, y) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad .$$

Mais ces formules ne permettent pas de calculer la dérivée de  $\arg$  lorsque  $y = 0$ , puisque  $\arccos$  n'est pas dérivable en  $\pm 1$ ! On est obligé de considérer une troisième formule

$$\arg(x, y) = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{si } x > 0.$$

Le calcul de  $D\Phi_2^{-1}$  ci-dessus montre que, sans connaître ces formules, on a

$$\partial_x \arg(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \partial_y \arg(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

### EXEMPLE 3 Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$ .

Comme dans  $\mathbb{R}^2$  on vérifie que l'application

$$\Phi_3 : ]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[ \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R} : (\rho, \varphi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \rho \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \rho \cdot \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme et que  $\det D\Phi_3(\rho, \varphi, \vartheta) = \rho^2 \cdot \cos \vartheta$ .

### EXEMPLE 4 Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$ .

L'exemple précédent montre comment ramener le cas  $n = 3$  au cas  $n = 2$ . Ceci se généralise et permet de ramener le cas  $n$  au cas  $n - 1$ . Par récurrence on montre que

$$\Phi_n : ]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[ \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}$$



$$(\rho, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \varphi_{n-1} \cdot \dots \cdot \cos \varphi_3 \cdot \cos \varphi_2 \\ \rho \cdot \cos \varphi_n \cdot \dots \cdot \cos \varphi_4 \cdot \cos \varphi_3 \cdot \sin \varphi_2 \\ \rho \cdot \cos \varphi_n \cdot \dots \cdot \cos \varphi_4 \cdot \sin \varphi_3 \\ \rho \cdot \cos \varphi_n \cdot \dots \cdot \sin \varphi_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho \cdot \sin \varphi_n \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme et que

$$\det D\Phi_n(\rho, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \rho^{n-1} \cdot \cos^{n-2} \varphi_n \cdot \cos^{n-3} \varphi_{n-1} \cdot \dots \cdot \cos \varphi_3 .$$

**EXERCICE 1** Simplifier la solution de l'exercice 10.20 à l'aide de la nouvelle méthode.

**EXERCICE 2** Considérer pour  $a \in ]0, \infty[$  la spirale

$$S_a := \{ (a\varphi \cdot \cos \varphi, a\varphi \cdot \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [0, \infty[ \} ,$$

ainsi que la bande oblique

$$B_a := \left\{ \left( r, \frac{r}{a} + \psi \right) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R}_+^* , \psi \in ]0, 2\pi[ \right\} .$$

(a) Montrer que

$$\Psi : B_a \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S_a : (r, \varphi) \longmapsto (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi)$$

est un difféomorphisme.

(b) Soit

$$X := \{ (\varphi, \vartheta) \in ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \mid \varphi > \vartheta \} .$$

Déduire de (a) que

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (\varphi, \vartheta) \longmapsto (a[\varphi - \vartheta] \cdot \cos \varphi, a[\varphi - \vartheta] \cdot \sin \varphi)$$

est un difféomorphisme de  $X$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus S_a$ , en écrivant

$$\Phi = \Psi \circ \Theta$$

à l'aide d'une transformation linéaire  $\Theta$ .

(c) Etant donné  $\varphi_1, \varphi_2 \in ]0, \infty[$  et  $\vartheta_0 \in (0, 2\pi)$  tels que  $\vartheta_0 \leq \varphi_1 < \varphi_2$ , décrire l'ensemble

$$E := \Phi(] \varphi_1, \varphi_2[ \times ]0, \vartheta_0[) .$$

**EXERCICE 3** Soient  $X := ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$  et

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (s, t) \longmapsto (s[t - \sin t], s[1 - \cos t]) .$$

(a) Décrire, pour  $s \in ]0, \infty[$  et  $t \in ]0, 2\pi[$ , les ensembles

$$C_s := \Phi(\{s\} \times ]0, 2\pi[) \quad \text{et} \quad D_t := \Phi(]0, \infty[ \times \{t\}) .$$

(b) Montrer que  $\Phi$  est un difféomorphisme local en prouvant que la fonction  $f$  définie sur  $]0, 2\pi[$  par

$$f(t) := t \cdot \sin t - 2(1 - \cos t)$$

est strictement négative.

(c) Décrire l'ensemble image  $Y := \Phi(X)$  et montrer que  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $X$  sur  $Y$ .

(d) Soient  $s_1, s_2 \in ]0, \infty[$  et  $t_1, t_2 \in ]0, 2\pi[$  tels que  $s_1 < s_2$  et  $t_1 < t_2$ . Décrire l'ensemble  $S$  délimitée par les courbes  $C_{s_1}, C_{s_2}, D_{t_1}, D_{t_2}$ .

**EXERCICE 4** Pour  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  on considère les ensembles

$$P_a := \{ (s, as^2) \mid s \in \mathbb{R}_+^* \} \quad \text{et} \quad Q_b := \{ (t, -t^2 + bt) \mid t \in ]0, b[ \} .$$

(a) Décrire les ensembles  $P_a$  et  $Q_b$ .

(b) Déterminer un difféomorphisme

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$

tel que, pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , on ait

$$\Phi(\{a\} \times \mathbb{R}_+^*) = P_a \quad \text{et} \quad \Phi(\mathbb{R}_+^* \times \{b\}) = Q_b .$$

Est-il complètement déterminé?

(c) Soient  $0 < a_1 < a_2$  et  $0 < b_1 < b_2$ . Décrire l'ensemble  $S$  délimité par les courbes  $P_{a_1}, P_{a_2}, Q_{b_1}, Q_{b_2}$ .

### 13.3 Théorème des fonctions implicites

Soient  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et  $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$  une application. Nous nous intéressons à l'ensemble des zéros de  $F$ , i.e. à l'ensemble

$$\{F = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid F(x, y) = 0\} .$$

Notre intention est de décrire cet ensemble comme le graphe d'une fonction définie sur une partie de  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , ce qui revient à résoudre l'équation  $F(x, y) = 0$  par rapport à  $y$  en fonction de  $x$ . Ceci est faisable, au moins localement moyennant certaines hypothèses de dérivabilité.

Le lemme 11.17, conduisant à l'existence d'un multiplicateur de Lagrange (théorème 11.17), démontre pratiquement le

**THEOREME (TFI)** *Soient  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$  une application continûment dérivable et  $(\xi, \eta) \in X$  tels que  $F(\xi, \eta) = 0$ .*

*Si  $D_2F(\xi, \eta) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$  est inversible, alors il existe un voisinage ouvert  $W \subset X$  de  $(\xi, \eta)$  dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une fonction  $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  continûment dérivable tels que*

$$\text{Gr } g = \{F = 0\} \cap W ,$$

*i.e. telle que pour tout  $x \in U$ ,  $g(x)$  soit l'unique  $y \in \mathbb{R}^m$  tel que*

$$(x, y) \in W \quad \text{et} \quad F(x, y) = 0 .$$

*En particulier  $g(\xi) = \eta$ .*

*En outre on a*

$$Dg(x) = -D_2F(x, g(x))^{-1} D_1F(x, g(x)) .$$

Dans la situation ici présente, l'espace  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  est déjà décomposé et l'hypothèse montre que  $DF(\xi, \eta) : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$  est surjective car

$$DF(\xi, \eta)(\mathbb{R}^{n+m}) \supset DF(\xi, \eta)(\{0\} \times \mathbb{R}^m) = D_2F(\xi, \eta)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m .$$

Grâce au lemme 11.17

$$\Phi := (\text{pr}_1, F) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : (x, y) \longmapsto (x, F(x, y))$$

est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert  $W$  de  $(\xi, \eta)$  dans  $X$  sur un voisinage ouvert de  $\Phi(\xi, \eta) = (\xi, 0)$  de la forme  $U \times V$  et

$$\Phi(\{F = h\} \cap W) = U \times \{h\} .$$

Comme

$$(\text{pr}_1, \text{pr}_2) = \text{id} = \Phi \circ \Phi^{-1} = \left( \text{pr}_1 \circ \Phi^{-1}, F \circ \Phi^{-1} \right) ,$$

on a  $\text{pr}_1 \circ \Phi^{-1} = \text{pr}_1$  et en introduisant l'injection canonique

$$j : U \longrightarrow U \times V : x \longmapsto (x, 0) .$$

on obtient  $\text{pr}_1 \circ \Phi^{-1} \circ j = \text{pr}_1 \circ j = \text{id}_U$ , donc

$$\Phi^{-1} \circ j = \left( \text{pr}_1 \circ \Phi^{-1}, \text{pr}_2 \circ \Phi^{-1} \right) \circ j = (\text{id}, g),$$

en ayant posé

$$g := \text{pr}_2 \circ \Phi^{-1} \circ j_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

On en déduit que

$$\{F = 0\} \cap W = \Phi^{-1}(U \times \{0\}) = \Phi^{-1} \circ j(U) = (\text{id}, g)(U) = \text{Gr } g.$$

Puisque  $\text{pr}_2$  et  $j_1$  sont linéaires, on a

$$D \text{pr}_2 = \text{pr}_2 = (0, \text{Id}) \quad \text{et} \quad D j_1 = j_1 = \begin{pmatrix} \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$Dg(x) = (0, \text{Id}) D\Phi^{-1}(x, 0) \begin{pmatrix} \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$\begin{aligned} D\Phi^{-1}(x, 0) &= D\Phi \left( \Phi^{-1}(j(x)) \right)^{-1} = D\Phi(x, g(x))^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ D_1 F(x, g(x)) & D_2 F(x, g(x)) \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -D_2 F(x, g(x))^{-1} \circ D_1 F(x, g(x)) & D_2 F(x, g(x))^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} Dg(x) &= (0, \text{Id}) \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -D_2 F(x, g(x))^{-1} \circ D_1 F(x, g(x)) & D_2 F(x, g(x))^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (0, \text{Id}) \begin{pmatrix} \text{Id} \\ -D_2 F(x, g(x))^{-1} \circ D_1 F(x, g(x)) \end{pmatrix} = -D_2 F(x, g(x))^{-1} \circ D_1 F(x, g(x)). \end{aligned}$$

□

**EXEMPLE** La condition du théorème n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Soit  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto y^2$ . On a  $\{F = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}$  et  $\partial_2 F(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Mais l'équation  $F(x, y) = y^2 = 0$  est trivialement résoluble par rapport à  $y$ ; il vient  $g = 0$ .

**REMARQUE** Un ensemble est en général décrit comme une partie d'un ensemble "connu"  $X$ , i.e. comme l'ensemble des éléments de  $X$  satisfaisant à une certaine propriété, par exemple à une équation. C'est une *description externe*.

On peut aussi décrire un ensemble comme l'image d'une application, ce qui revient à énumérer ses éléments à l'aide d'un ensemble "connu" de paramètres. On dit aussi un *paramétrage*. C'est une *description interne*.

Le théorème des fonction implicite donne une condition suffisante pour que l'on puisse paramétriser l'ensemble des zéros d'une fonction comme un graphe, i.e. à l'aide d'une application de la forme

$$\gamma : x \longmapsto (x, g(x)) .$$

Une reformulation utile est donnée dans le lemme de la section qui suit.

**EXERCICE 1** Soient  $M \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre simple de  $M$ . Montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $(\lambda, M)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $M$  et une application  $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$  continûment dérivable telle que, pour tout  $A \in U$ ,  $g(A)$  soit l'unique valeur propre  $\mu$  de  $A$  telle que  $(\mu, A) \in W$ .

**EXERCICE 2** Montrer le plus simplement possible que la bijection de l'exercice 7.13 est un difféomorphisme.

### 13.4 Ouverts avec bord

Notre but (cf. définition 13.6) est d'introduire la notion de sous-variété avec bord de  $\mathbb{R}^n$ . C'est une partie de  $\mathbb{R}^n$  se comportant localement comme l'intersection d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  avec un demi-espace fermé.

**DEFINITION 1** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Si  $\mu$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on dit que  $H_{\mu,\alpha} := \{\mu \leq \alpha\}$  est un *demi-espace fermé* et que  $\partial H_{\mu,\alpha} := \{\mu = \alpha\}$  est son *bord*.

Nous dirons qu'une partie ouverte  $U$  dans  $H_{\mu,\alpha}$  est un *ouvert avec bord* de dimension  $m$  et que

$$\partial U := U \cap \partial H_{\mu,\alpha}$$

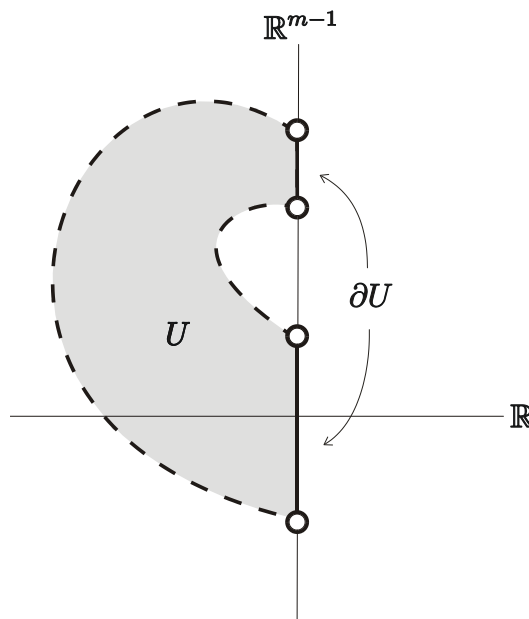
est le *bord* de  $U$ . Si  $\partial U = \emptyset$ , on dit que  $U$  est *sans bord*.

Rappelons qu'un ouvert de  $H_{\mu,\alpha}$  est l'intersection de  $H_{\mu,\alpha}$  avec un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .

**EXERCICE** Si  $U^\circ$  désigne l'intérieur de  $U$  dans  $\mathbb{R}^m$  d'un ouvert avec bord, alors

$$U^\circ = U \setminus \partial U \quad \text{ou} \quad \partial U = U \setminus U^\circ.$$

En particulier  $U$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^m$  si, et seulement si,  $U$  est sans bord.



**REMARQUE 1** Le bord  $\partial H_{\mu,\alpha}$  de  $H_{\mu,\alpha}$  est égal à sa frontière topologique dans  $\mathbb{R}^m$  :

$$\text{Fr}_{\mathbb{R}^m} H_{\mu,\alpha} = H_{\mu,\alpha} \setminus H_{\mu,\alpha}^\circ = \{\mu \leq \alpha\} \setminus \{\mu < \alpha\} = \{\mu = \alpha\} = \partial H_{\mu,\alpha}.$$

Mais attention, il ne faut pas confondre en général le bord de  $U$  avec sa frontière topologique  $\text{Fr}_{\mathbb{R}^m} U := \bar{U} \setminus U^\circ$  dans  $\mathbb{R}^m$ , l'adhérence et l'intérieur étant pris dans  $\mathbb{R}^m$ , ni avec sa frontière topologique  $\text{Fr}_{H_{\mu,\alpha}} U := \bar{U} \setminus U$  dans  $H_{\mu,\alpha}$ , l'adhérence prise dans  $H_{\mu,\alpha}$  étant égale à celle dans  $\mathbb{R}^m$ , puisque  $H_{\mu,\alpha}$  est fermé!

**REMARQUE 2** En pratique il est utile d'avoir cette généralité. Mais pour simplifier les notations comme dans la figure ci-dessus on peut se ramener par une transformation bijective affine convenable, – on peut même supposer que c'est une rotation suivit d'une translation –, au cas où  $H_{\mu,a}$  est de la forme

$$H_{\text{pr}_1,0} = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} .$$

Dans beaucoup de cas nous supposons donc que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$  . On a

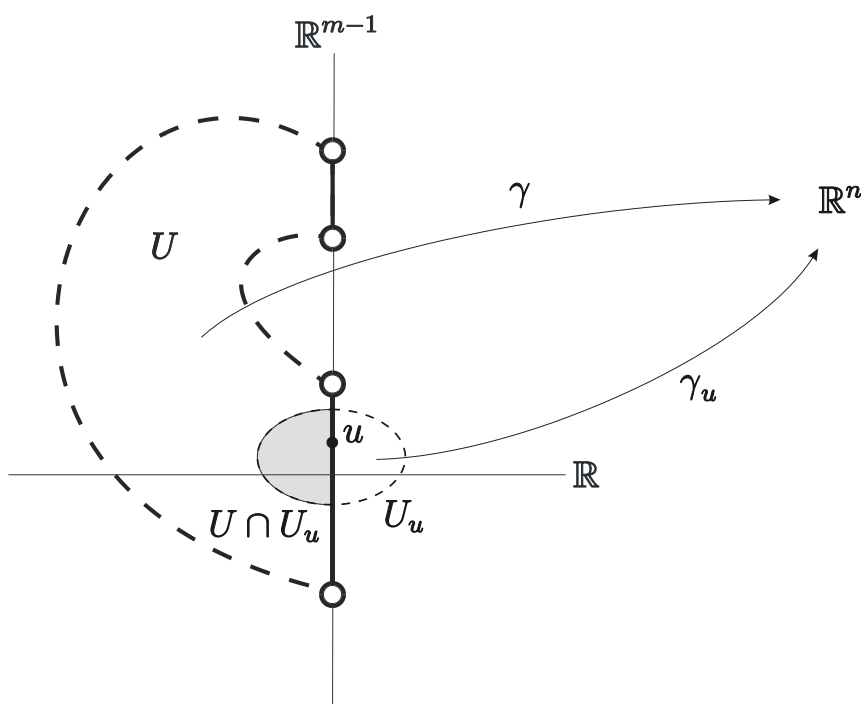
$$\partial U = [\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}] \cap U .$$

On peut montrer

**THEOREME** Soient  $U$  un ouvert avec bord et  $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout  $u \in U$  , il existe prolongement local continûment dérivable  $\gamma_u : U_u \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de  $\gamma$  , donc défini dans un voisinage ouvert  $U_u$  de  $u$  dans  $\mathbb{R}^m$  et tel que

$$\gamma|_{U \cap U_u} = \gamma_u|_{U \cap U_u} .$$



(ii) Pour tout  $u \in U$  , il existe  $A_u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  tel qu'en écrivant

$$\gamma(v) = \gamma(u) + A_u(v - u) + \varphi_u(v) \quad \text{pour tout } v \in U ,$$

on ait

$$\lim_{U \setminus \{u\} \ni v \rightarrow u} \frac{\varphi_u(v)}{|v - u|} = 0 ,$$

et que l'application

$$u \longmapsto A_u : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

soit continue.

(iii)  $\gamma$  est continûment dérivable dans  $U^\circ$  et  $D(\gamma|_{U^\circ})$  possède un (unique) prolongement continu

$$D\gamma : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : v \longmapsto D\gamma(v) .$$

Dans ce cas on a

$$D\gamma(v) = A_v = D\gamma_u(v) \quad \text{pour tout } v \in U_u .$$

En outre si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$ , pour tout  $u \in U$ , on a

$$D\gamma(u) = (\partial_l \gamma_k(u))_{\substack{k=1, \dots, n \\ l=1, \dots, m}}$$

dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ ; si  $u \in \partial U$ , alors  $\partial_l \gamma_k(u)$  est la dérivée partielle à gauche de  $\gamma_k$  en  $u$ .

**DEFINITION 2** Soit  $U$  un ouvert avec bord. Nous dirons qu'une application  $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est *continûment dérivable* si l'une des propriétés équivalentes du théorème est satisfaite. L'application

$$D\gamma : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : u \longmapsto D\gamma(u)$$

s'appelle la *dérivée* de  $\gamma$  sur  $U$ .

Nous n'aurons pas besoin de ce théorème, la définition (i) sera suffisante et elle nous permet d'appliquer directement le théorème de la fonction réciproque.

**LEMME** La composition d'applications continûment dérivables au sens ci-dessus est continûment dérivable et la formule de dérivation des applications composées est encore valable.

La vérification est immédiate et laissée au lecteur. \_\_\_\_\_  $\square$

**DEFINITION 3** Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$ , alors

$$U^\partial := \{w \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (0, w) \in \partial U\}$$

est un ouvert de  $\mathbb{R}^{m-1}$  et

$$\partial U = \{0\} \times U^\partial .$$

Si  $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une application, on définit

$$\gamma^\partial : U^\partial \longrightarrow \mathbb{R}^n : w \longmapsto \gamma(0, w) .$$

Si  $m \geq 2$  et  $\gamma$  est continûment dérivable, il en est de même de  $\gamma^\partial$  et on a

$$D\gamma^\partial(w) = D_{\mathbb{R}^{m-1}}\gamma(0, w) .$$

Si  $m = 1$ , on identifie  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^0$  avec  $\mathbb{R}$  et l'application  $\gamma^\partial$  est triviale :

$$\gamma^\partial : U^\partial = \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n : 0 \longmapsto \gamma(0) .$$

**PROPOSITION** Soient  $U$  et  $V$  des ouverts avec bord de dimension  $m$ , respectivement  $p$ , et  $\Phi : U \longrightarrow V$  un difféomorphisme, i.e.  $\Phi$  est une bijection telle que  $\Phi$ ,  $\Phi^{-1}$  soient continûment dérivables.



Alors  $D\Phi(u)$  est inversible pour tout  $u \in U$ , en particulier  $m = p$ , et on a

$$\Phi(U^\circ) = V^\circ, \quad \Phi(\partial U) = \partial V.$$

En outre, si  $m \geq 2$ , l'application  $\Phi^\partial : U^\partial \rightarrow V^\partial$  induite par  $\Phi$  est un difféomorphisme.

Pour tout  $u \in U$ , on obtient évidemment

$$D\Phi^{-1}(\Phi(u)) D\Phi(u) = \text{id}_{\mathbb{R}^m} \quad \text{et} \quad D\Phi(u) D\Phi^{-1}(\Phi(u)) = \text{id}_{\mathbb{R}^p},$$

ce qui montre que  $D\Phi(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  est bijective, donc que  $m = p$ . Comme la restriction de  $\Phi$  à  $U^\circ$  satisfait aux hypothèses du corollaire 13.2, l'ensemble  $\Phi(U^\circ)$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^p$ , donc contenu dans  $V^\circ$ . Par symétrie on obtient  $\Phi^{-1}(V^\circ) \subset U^\circ$ , donc

$$V^\circ = \Phi\left(\Phi^{-1}(V^\circ)\right) \subset \Phi(U^\circ) \subset V^\circ.$$

Le reste est évident. 

---

 □

## 13.5 Paramétrages réguliers

La première des propriétés du théorème suivant décrit localement la notion de sous-variété avec bord à l'aide d'un paramétrage ; c'est la manière la plus intuitive et celle en général utilisée pratiquement. La deuxième est un pont technique avec la troisième donnant une description externe dont la condition est souvent facile à vérifier.

Rappelons que l'on identifie  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^0$  avec  $\mathbb{R}^n$  ! Mais attention on a bien  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  , par contre dans  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  ,  $\{0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n-m}$  .

**THEOREME** Soient  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  ,  $x \in X$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m \leq n$  . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un ouvert avec bord  $U$  de dimension  $m$  et une application continûment dérivable

$$\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

tels que  $\gamma$  soit un homéomorphisme de  $U$  sur  $\gamma(U)$  , que  $\gamma(U)$  soit un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  et que

$$D\gamma \left( \overset{-1}{\gamma}(x) \right) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

soit injective.

(ii) Il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme

$$\Phi : W \longrightarrow \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$$

tel que

$$\Phi(X \cap W) = [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap \Phi(W) .$$

(iii) Il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et des applications continûment dérivables

$$\delta : W \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

telles que l'on ait

$$X \cap W = \{\delta \leq 0\} \cap \{F = 0\}$$

et que,

(a) si  $\delta(x) = 0$  , les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$

$$\text{grad } \delta(x) \quad \text{et} \quad \text{grad } F_j(x) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-m$$

soient linéairement indépendants.

(b) si  $\delta(x) < 0$  , les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$

$$\text{grad } F_j(x) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-m$$

soient linéairement indépendants.

Dans ce cas on peut supposer en plus que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$  , et en considérant des voisinages suffisamment petits, que

$$\gamma = \overset{-1}{\Phi} \circ j_{\mathbb{R}^m|U} \quad , \quad \overset{-1}{\gamma} = \text{pr}_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi|_{X \cap W} ,$$

$$U \times \{0\} = \Phi(X \cap W) \quad , \quad \gamma(U) = X \cap W \quad ,$$

$D\gamma(u)$  est injective pour tout  $u \in U$  ,

$$\delta = \Phi_1 \quad \text{et} \quad F = \text{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ \Phi \quad ,$$

$W = \{\delta < 0\}$  si  $U$  est sans bord.

En outre

$$\gamma(\partial U) = \{\delta = 0\} \cap \{F = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} \delta \\ F \end{pmatrix} = 0 \right\} .$$

**REMARQUE 1** Si  $m = n$  , il faut considérer la fonction nulle  $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^0 = \{0\}$  comme n'ayant pas de composante ; on a alors  $W = \{F = 0\}$  . La condition (iii.a) est alors satisfaite si  $\text{grad } \delta(x) \neq 0$  , tandis que (iii.b) est trivialement satisfaite, puisque vide. Dans ce dernier cas  $\text{id} : W \longrightarrow W$  satisfait à (i).

Démonstration du théorème :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Posons  $u := \gamma^{-1}(x) \in U$  . Comme nous l'avons signalé dans la remarque 13.4.2, nous pouvons supposer que  $U$  est un ouvert avec bord de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$  et qu'il existe une application continûment dérivable  $\gamma_u : U_u \longrightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur un voisinage ouvert  $U_u$  de  $u$  dans  $\mathbb{R}^m$  telle que  $\gamma|_{U \cap U_u} = \gamma_u|_{U \cap U_u}$  et que

$$(\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap U_u = U \cap U_u .$$

Puisque  $D\gamma(u) = D\gamma_u(u)$  est injective,  $\text{Im } D\gamma(u)$  est de dimension  $m$  . Il existe donc au moins  $n - m$  vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  qui ne sont pas dans ce sous-espace vectoriel. On peut alors supposer en permutant les composantes de  $\gamma_u$  que, dans la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{et} \quad D\gamma(u) = \begin{pmatrix} D\gamma_{u, \mathbb{R}^m}(u) \\ D\gamma_{u, \mathbb{R}^{n-m}}(u) \end{pmatrix} ,$$

on ait

$$\text{Im } D\gamma(u) \cap [\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}] = \{0\} .$$

La restriction de  $\text{pr}_{\mathbb{R}^m}$  à  $\text{Im } D\gamma(u)$  est donc injective, et par suite bijective, puisque ce sous-espace vectoriel est de dimension  $m$  . Il en est de même de l'application  $D\gamma_{u, \mathbb{R}^m}(u) = \text{pr}_{\mathbb{R}^m} \circ D\gamma_u(u)$  .

Définissons

$$\Gamma : U_u \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n : (v_1, v_2) \longmapsto \gamma_u(v_1) + (0, v_2) \quad ,$$

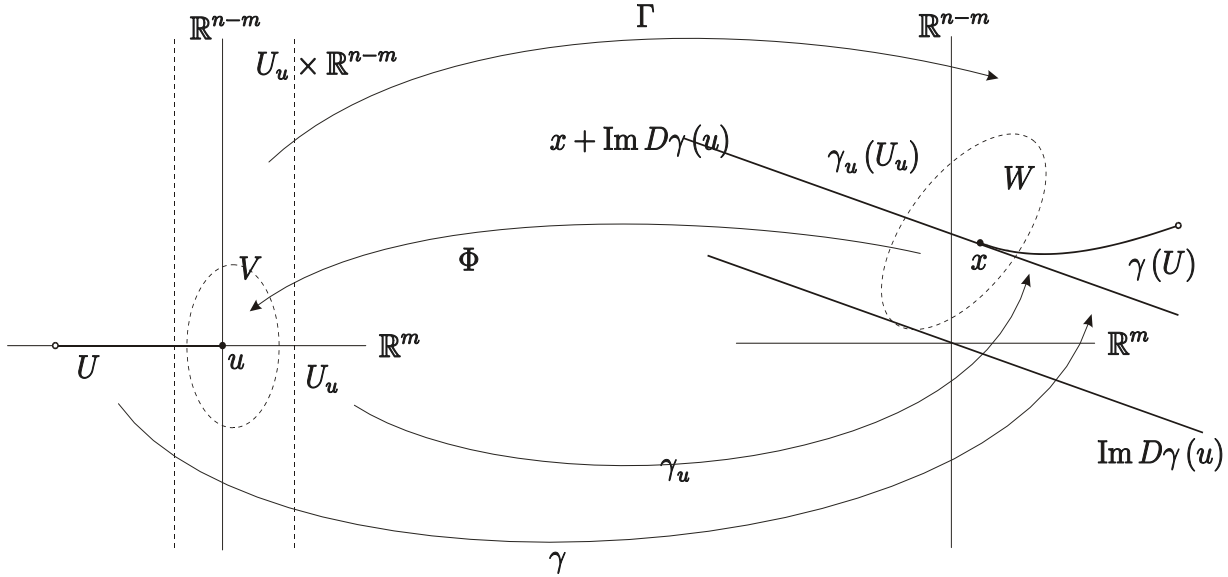
i.e.  $\Gamma = \gamma_u \circ \text{pr}_{\mathbb{R}^m} + j_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ \text{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}}$  . Il vient alors

$$\begin{aligned} D\Gamma(u, 0) &= D\gamma_u(u) \circ \text{pr}_{\mathbb{R}^m} + j_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ \text{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}} = \begin{pmatrix} D\gamma_{u, \mathbb{R}^m}(u) \\ D\gamma_{u, \mathbb{R}^{n-m}}(u) \end{pmatrix} (\text{Id}, 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id} \end{pmatrix} (0, \text{Id}) = \\ &= \begin{pmatrix} D\gamma_{u, \mathbb{R}^m}(u) & 0 \\ D\gamma_{u, \mathbb{R}^{n-m}}(u) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\gamma_{u, \mathbb{R}^m}(u) & 0 \\ D\gamma_{u, \mathbb{R}^{n-m}}(u) & \text{Id} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

ce qui montre que  $D\Gamma(u, 0)$  est inversible. Utilisant le théorème de la fonction réciproque 13.2, on voit donc que  $\Gamma$  est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert  $V$  de  $(u, 0)$  dans  $U_u \times \mathbb{R}^{n-m}$  , donc dans  $\mathbb{R}^n$  , sur un voisinage ouvert  $W$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  .

Posons

$$\Phi := \Gamma^{-1} : W \longrightarrow V .$$



L'ensemble  $j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(V)$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^m$  et est contenu dans  $j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(U_u \times \mathbb{R}^{n-m}) = U_u$ , donc

$$[\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}] \cap j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(V) \subset [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}] \cap U_u = U \cap U_u$$

est un ouvert avec bord contenu dans  $U$ . Remarquons que  $j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(V) \times \{0\} = [\mathbb{R}^m \times \{0\}] \cap V$ . Puisque  $\gamma$  est un homéomorphisme sur  $\gamma(U)$ , qui est un ouvert de  $X$ , l'image

$$\begin{aligned} \gamma \left( [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}] \cap j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(V) \right) &= \Gamma \left( \left( [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}] \cap j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(V) \right) \times \{0\} \right) = \\ &= \Gamma \left( ([\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap V) \right) \end{aligned}$$

est ouverte dans  $X$ ; il existe donc un ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que l'on ait

$$\Gamma \left( ([\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap V) \right) = X \cap O .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \Gamma \left( ([\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap \Phi(W \cap O)) \right) &= \Gamma \left( ([\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap V \cap \Phi(W \cap O)) \right) = \\ &= \Gamma \left( ([\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap V) \right) \cap \Gamma \circ \Phi(W \cap O) = (X \cap O) \cap (W \cap O) = X \cap (W \cap O) . \end{aligned}$$

En remplaçant  $W$  par  $W \cap O$  et  $V$  par  $\Phi(W \cap O)$ , on peut supposer que

$$\Gamma \left( ([\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap V) \right) = X \cap W .$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap \Phi(W) &= [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap V = \\ &= \Gamma^{-1} \left[ \Gamma \left( ([\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap V) \right) \right] = \Phi(X \cap W) . \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Il suffit de poser  $U := \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \cap j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(\Phi(W))$  et

$$\gamma := \Phi^{-1} \circ j_{\mathbb{R}^m|U} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n .$$

En effet  $\gamma$  est continûment dérivable et

$$\begin{aligned} j_{\mathbb{R}^m}(U) &= [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap j_{\mathbb{R}^m} \left( j_{\mathbb{R}^m}^{-1}(\Phi(W)) \right) = \\ &= [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap \Phi(W) = \Phi(X \cap W) , \end{aligned}$$

donc

$$\gamma(U) = \Phi^{-1}(j_{\mathbb{R}^m}(U)) = \Phi^{-1}(\Phi(X \cap W)) = X \cap W$$

est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$ . On a  $\bar{\gamma} = \text{pr}_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi|_{X \cap W}$ .

D'autre part, pour tout  $u \in U$ , l'application linéaire

$$D\gamma(u) = D\Phi^{-1}(u, 0) \circ j_{\mathbb{R}^m}$$

est évidemment injective.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Il suffit de poser

$$\delta := \Phi_1 : W \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F := \text{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ \Phi : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} .$$

Mais comme

$$\Phi = \begin{pmatrix} \delta \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_m \\ F \end{pmatrix} ,$$

on a

$$\begin{aligned} \Phi(\{\delta \leq 0\} \cap \{F = 0\}) &= \Phi\{x \in W \mid \delta(x) \leq 0, F(x) = 0\} = \\ &= [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap \Phi(W) = \Phi(X \cap W) , \end{aligned}$$

donc

$$\{\delta \leq 0\} \cap \{F = 0\} = X \cap W .$$

En remarquant que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-m} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m}$$

est la projection canonique de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m}$ , on a

$$\begin{pmatrix} D\delta(x) \\ DF(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\delta(x) \\ D \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_m \end{pmatrix}(x) \\ DF(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \circ D\Phi(x)$$

et cette application est évidemment surjective. Par transposition ceci est équivalent à ce que l'application

$$\begin{pmatrix} D\delta(x) \\ DF(x) \end{pmatrix}^\top = (\text{grad } \delta(x), \text{grad } F_1(x), \dots, \text{grad } F_{n-m}(x))$$

de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m}$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m}$  soit injective, donc que les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$

$$\text{grad } \delta(x) \quad \text{et} \quad \text{grad } F_j(x) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-m$$

soient linéairement indépendants.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons tout d'abord que  $\delta(x) = 0$ . Puisque les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$

$$\text{grad } \delta(x) \quad \text{et} \quad \text{grad } F_j(x) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-m$$

soient linéairement indépendants, il existe  $m-1$  vecteurs de la base canonique qui ne sont pas dans le sous-espace vectoriel engendré. Dans la décomposition correspondante  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m}$ , considérons l'application

$$\Phi = (\delta, \text{pr}_{\mathbb{R}^{m-1}}, F) : W \longrightarrow \mathbb{R}^n .$$

On a

$$D\Phi(x) = \begin{pmatrix} D\delta(x) \\ \text{pr}_{\mathbb{R}^{m-1}} \\ DF(x) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

et comme

$$D\Phi(x)^\top = (\text{grad } \delta(x), j_2, \text{grad } F_1(x), \dots, \text{grad } F_{n-m}(x))$$

est bijective, il en est de même de  $D\Phi(x)$ . Par le théorème de la fonction réciproque 13.2, on peut supposer, en rapetissant  $W$  au besoin, que  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $W$  sur  $\Phi(W)$ . Il vient alors

$$\Phi(X \cap W) = \Phi(\{\delta \leq 0\} \cap \{F = 0\}) = [\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}] \cap \Phi(W) .$$

Si maintenant on  $\delta(x) < 0$ , il suffit de remplacer  $\delta$  par  $\text{pr}_1$  et de considérer l'application

$$\Phi = (\text{pr}_{\mathbb{R}^m}, F) : W \longrightarrow \mathbb{R}^n .$$

Finalement on a  $x \in \gamma(\partial U)$  si, et seulement si,  $x \in X \cap W$  et  $\gamma^{-1}(x) \in \partial U$ , i.e.  $x \in X \cap W$  et  $\text{pr}_{\mathbb{R}}(\gamma^{-1}(x)) = 0$ . Mais

$$\text{pr}_{\mathbb{R}}(\gamma^{-1}(x)) = \text{pr}_{\mathbb{R}}(\text{pr}_{\mathbb{R}^m}(\Phi(x))) = \text{pr}_{\mathbb{R}}(\Phi(x)) = \Phi_1(x) = \delta(x) .$$

donc

$$\gamma(\partial U) = \{\delta \leq 0\} \cap \{F = 0\} \cap \{\delta = 0\} = \{\delta = 0\} \cap \{F = 0\} = \{|\delta|^2 + |F|^2 = 0\} .$$

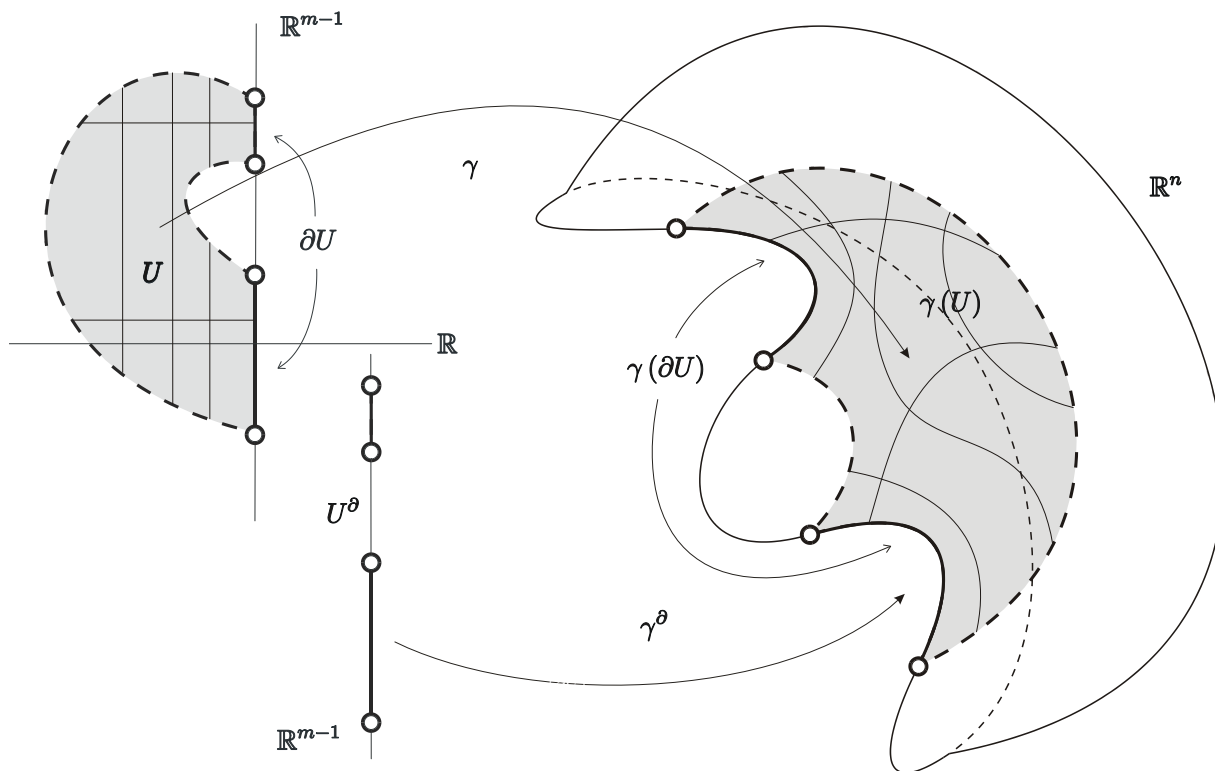
□

**DEFINITION** Soit  $X$  une partie non-vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

(a) On dit que  $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est un *paramétrage régulier local* (de dimension  $m$ ) de  $X$  si

- (i)  $U$  est un ouvert avec bord de dimension  $m$ .
- (ii)  $\gamma$  est un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert de  $X$ .

(iii)  $\gamma$  est continûment dérivable et  $D\gamma(u)$  est injective pour tout  $u \in U$ .



(b) Si  $W$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Phi : W \longrightarrow \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme tel que

$$\Phi(X \cap W) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

et que  $\Phi(X \cap W)$  soit un ouvert avec bord de dimension  $m$ , on dit que  $\Phi|_{X \cap W}$  est une *carte* de  $X$ . On dit aussi qu'il définit un *système de  $m$  coordonnées locales* sur  $X$ .

**PROPOSITION** Soient  $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un paramétrage régulier local de  $X$ ,  $V$  un ouvert avec bord de dimension  $p$  et  $\vartheta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application continûment dérivable satisfaisant à  $\vartheta(V) \subset \gamma(U)$ . Alors l'unique application  $\vartheta_\gamma : V \longrightarrow U$  telle que

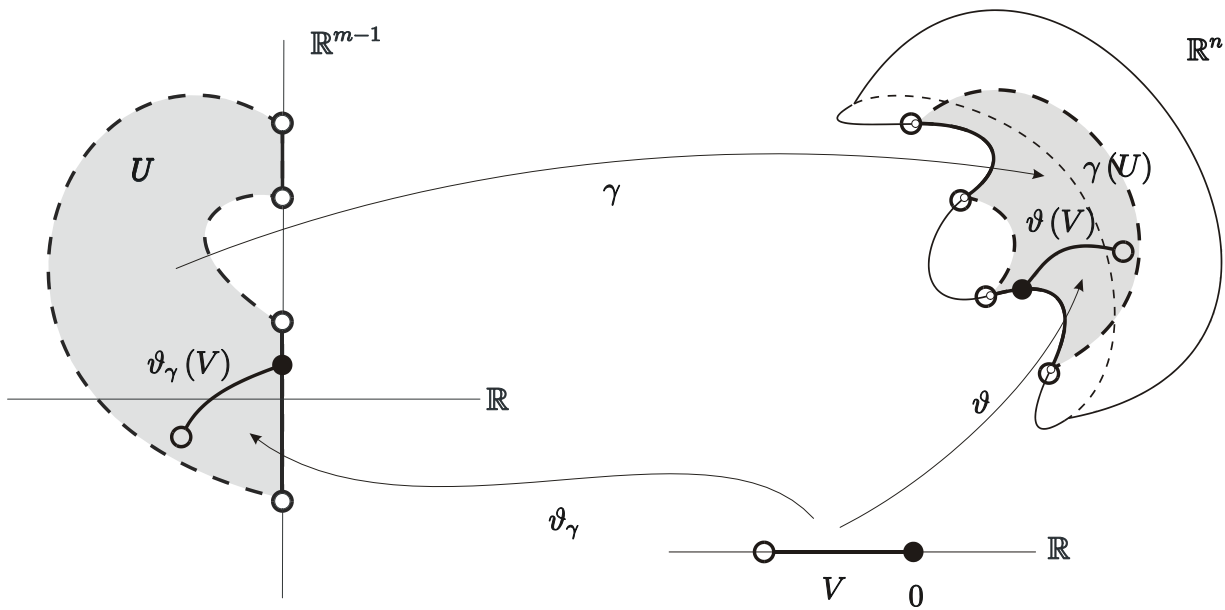
$$\vartheta = \gamma \circ \vartheta_\gamma$$

est continûment dérivable.

On doit évidemment poser  $\vartheta_\gamma = \gamma^{-1} \circ \vartheta$ , puisque  $\gamma : U \longrightarrow \gamma(U)$  est une bijection. D'autre part, au voisinage de tout  $v \in V$ , on a

$$\vartheta_\gamma = \text{pr}_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi \circ \vartheta,$$

en utilisant les équivalences du théorème au voisinage du point  $\vartheta(v) \in X$ , ce qui montre que  $\vartheta_\gamma$  est continûment dérivable. □



**REMARQUE 2** Cette figure représente seulement le cas particulier  $p = 1$  et  $0 \in \partial V$  !

**COROLLAIRE** Si  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\vartheta : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des paramétrages réguliers locaux de  $X$  tels que  $\gamma(U) = \vartheta(V)$ , où  $U$  et  $V$  sont respectivement des ouverts avec bord de dimension  $m$  et  $p$ , alors l'unique application  $\gamma_\vartheta : U \rightarrow V$  telle que  $\gamma = \vartheta \circ \gamma_\vartheta$  est un difféomorphisme. En outre on a

$$m = p \quad , \quad \gamma(\partial U) = \vartheta(\partial V) \quad \text{et} \quad D\gamma(u)(\mathbb{R}^m) = D\vartheta(\gamma_\vartheta(u))(\mathbb{R}^p) \quad \text{pour tout } u \in U \text{ .}$$

C'est immédiat, puisque  $\gamma_\vartheta$  et  $\vartheta_\gamma$  sont manifestement réciproque l'une de l'autre. L'égalité des dimensions et la formule concernant les bords découle alors de la proposition 13.4. Finalement on a

$$D\gamma(u)(\mathbb{R}^m) = D\vartheta(\gamma_\vartheta(u))(D\gamma_\vartheta(u)(\mathbb{R}^m)) = D\vartheta(\gamma_\vartheta(u))(\mathbb{R}^p) \text{ .}$$

□



## 13.6 La notion de sous-variété avec bord

**DEFINITION** Soient  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $X$  est une *sous-variété (avec bord)* dans  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  si, pour tout  $x \in X$ , il existe un paramétrage régulier local  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  au voisinage de  $x$ . Si  $x \in \gamma(\partial U)$ , on dit que  $x$  appartient au bord de  $X$ . L'ensemble de ces points s'appelle le *bord* de  $X$  et sera désigné par  $\partial X$ . Si  $\partial X = \emptyset$ , on dit que  $X$  est *sans bord*.

Nous dirons qu'une partie discrète de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété (sans bord) de dimension 0 de  $\mathbb{R}^n$ .

**REMARQUE 1** Rappelons qu'une partie  $Y$  d'un espace topologique  $X$  est dite *discrète* si  $Y$  munie de la topologie induite est un espace discret (cf. exemple 10.12.6). Cela signifie que toute partie de  $Y$  est ouverte dans  $Y$ , donc que pour tout  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $y$  dans  $X$  tel que  $V \cap Y = \{y\}$ .

Le corollaire 13.5 montre que les notions de dimension et de bord sont bien définies.

**THEOREME** Si  $X$  est une sous-variété avec bord de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\partial X$  est une sous-variété sans bord de dimension  $m - 1$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Pour tout  $x \in \partial X$ , si  $m \geq 2$  et  $\gamma$  est un paramétrage régulier de  $X$  au voisinage de  $x$ , alors  $\gamma^\partial$  est un paramétrage régulier de  $\partial X$  au voisinage de  $x$ . Si  $m = 1$ , alors  $\{x\} = \gamma(\{0\}) = \gamma(\partial U) = \partial X \cap \gamma(U)$  est ouvert dans  $\partial X$ , ce qui montre que  $\partial X$  est une partie discrète de  $\mathbb{R}^n$ , donc une sous-variété de dimension 0. □

**REMARQUE 2** Soit  $x \in X$ . Pour montrer qu'il n'existe aucun paramétrage régulier local au voisinage de  $x$ , il est souvent préférable d'utiliser la condition (iii) du théorème 13.5. Utilisant des courbes paramétrées judicieuses contenues dans  $X$ , on peut souvent montrer que les vecteurs  $\text{grad } \delta(x)$  et  $\text{grad } F_j(x)$ , pour  $j = 1, \dots, n - m$ , ne sont pas linéairement indépendants, par exemple que l'un de ces vecteurs est 0. Cette méthode n'est pas applicable à  $\gamma_2$  de l'exemple 5 ci-dessous.

Mais attention, si  $\gamma$  n'est pas un paramétrage régulier, on ne peut pas en déduire que  $\gamma(U)$  n'est pas une sous-variété! Par exemple  $t \mapsto t^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une paramétrisation non-régulière de  $\mathbb{R}_+$ , mais  $\mathbb{R}_+$  est une sous-variété de dimension 1. Plus généralement

**EXEMPLE 1** Tout ouvert avec bord de dimension  $n$  est une sous-variété avec bord de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$ , en particulier tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété (sans bord) de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$ .

L'application identique  $\text{id}$  est évidemment un paramétrage régulier.

**EXEMPLE 2** La boule  $\mathbb{B}^n(r)$  de centre 0 et de rayon  $r > 0$  est une sous-variété avec bord de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Son bord  $\partial\mathbb{B}^n(r)$  est la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}(r)$  de centre 0 et de rayon  $r$ ; c'est une sous-variété sans bord de dimension  $n - 1$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

En effet, en considérant la fonction continûment dérivable

$$\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|^2 - r^2,$$

on a

$$\mathbb{B}^n(r) = \{\delta \leq 0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^{n-1}(r) = \{\delta = 0\}.$$

Dans ce cas la fonction  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^0$  n'a pas de composante. La condition du théorème 13.5.iii.a avec  $W := \mathbb{R}^n$  est satisfaite si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}(r) = \{\delta = 0\}$ , puisque  $\text{grad } \delta(x) = 2 \cdot x \neq 0$ . Si  $x \in \mathbb{D}^n(r) = \mathbb{B}^n(r) \setminus \mathbb{S}^{n-1}(r) = \{\delta < 0\}$  c'est la condition 13.5.iii.b qui l'est. Il existe donc, au voisinage de chaque point  $x \in \mathbb{B}^n(r)$ , un paramétrage régulier. Attention, il faut choisir  $W$  plus petit que  $\mathbb{R}^n$ !

Décrivons maintenant certains paramétrages réguliers locaux de  $\mathbb{B}^n(r)$ . L'ensemble

$$U := ]0, r] \times ]-\pi, \pi[ \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times \dots \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

est un ouvert avec bord de dimension  $n$  et la restriction  $\gamma_n := \Phi_n|_U$  (cf. exemple 13.2.4) est un paramétrage régulier de

$$\gamma_n(U) = \mathbb{B}^n(r) \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{B}^n(r) \setminus \{0\}$ , il existe une rotation  $A \in \mathbb{SO}(n)$  telle que  $A \circ \gamma_n$  soit un paramétrage de  $\mathbb{B}^n(r)$  au voisinage de  $x$ .

Par exemple si  $n = 3$ , la rotation

$$A : (x, y, z) \longmapsto (-x, z, y)$$

permet de paramétrer

$$\mathbb{B}^3(r) \setminus \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{0\} \hat{=} : \\ ]0, r] \times ]-\pi, \pi[ \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} -r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \vartheta \\ r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'un paramétrage régulier de  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}$  est  $\gamma_n^\partial$ . En particulier la sphère  $\mathbb{S}^2(r)$  est complètement paramétrable à l'aide des 2 paramétrages réguliers :

$$]-\pi, \pi[ \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (\varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ r \cdot \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} -r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \vartheta \\ r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto \left( x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \right)$$

est un paramétrage régulier (sous forme de graphe) de la calotte supérieure sans bord

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r \text{ et } x_n > 0\}.$$

Si l'on veut paramétrer  $\mathbb{S}^2(r)$  sous forme de graphes, on a besoin de 6 paramétrages de cette forme.

**EXEMPLE 3** La calotte supérieure avec bord

$$\mathbb{S}_+^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r \text{ et } x_3 \geq 0\}$$

est une sous-variété avec bord de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ . Son bord

$$\partial\mathbb{S}_+^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r \text{ et } x_3 = 0\} = \mathbb{S}^1(r) \times \{0\}$$

est une sous-variété sans bord de dimension 1 dans  $\mathbb{R}^3$ .

C'est immédiat en considérant les fonctions continûment dérivables

$$\delta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -x_3 \quad , \quad F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|^2 - r^2 .$$

En effet on a

$$\mathbb{S}_+^2(r) = \{\delta \leq 0\} \cap \{F = 0\} \quad \text{et} \quad \partial\mathbb{S}_+^2(r) = \{\delta = 0\} \cap \{F = 0\}$$

et

$$\text{grad } \delta(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{grad } F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot x .$$

Si  $x \in \partial\mathbb{S}_+^2(r) = \{\delta = 0\}$ , la condition du théorème 13.5.iii.a est satisfaite, puisque  $\text{grad } \delta(x)$  et  $\text{grad } F(x)$  sont linéairement indépendants. Si  $x \in \mathbb{S}_+^2(r) \setminus \partial\mathbb{S}_+^2(r) = \{\delta < 0\}$ , la condition du théorème 13.5.iii.b l'est aussi, puisque  $\text{grad } F(x) \neq 0$ .

L'ensemble  $U := ]-\pi, \pi[ \times [0, \frac{\pi}{2}[$  est un ouvert avec bord de dimension 2 et

$$\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (\varphi, \vartheta) \longmapsto \Phi_3(r, \varphi, \vartheta)$$

est une paramétrisation régulière de  $\mathbb{S}_+^2(r) \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$ . D'autre part  $V := [0, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est aussi un ouvert avec bord de  $\mathbb{R}^2$  et

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (\varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} -r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \vartheta \\ r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

est une paramétrisation régulière de  $\mathbb{S}_+^2(r) \setminus \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{0\}$ .

**EXEMPLE 4** Soit  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $J^\circ \neq \emptyset$ . Rappelons (cf. définition 11.1.1, p. 368) qu'une fonction continue  $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est dite une courbe paramétrée.

Si  $\gamma$  est continûment dérivable,  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in J$ , et si  $\gamma$  est un homéomorphisme de  $J$  sur  $\gamma(J)$ , alors  $\gamma(J)$  est une sous-variété de dimension 1 dans  $\mathbb{R}^n$  dont le bord est  $\gamma(J \setminus J^\circ)$ .

Si  $J$  n'est pas de la forme  $[a, b]$ , c'est immédiat par définition puisque  $J$  est un ouvert avec bord et

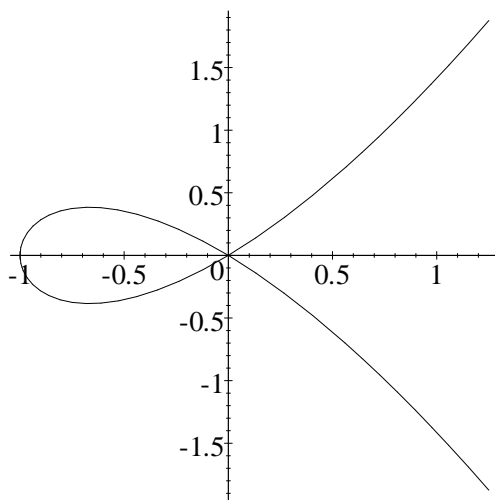
$$D\gamma(t) : \alpha \longmapsto \alpha \cdot \gamma'(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est injective. Si  $J = [a, b]$ , choisissons  $c, d \in \mathbb{R}$  tels que  $a < c < d < b$ . Alors  $\gamma|_{[a, c[}$  et  $\gamma|_{]d, b]}$  sont des paramétrages réguliers locaux de  $\gamma(J)$  qui recouvrent cette courbe. □

En pratique le point difficile est de prouver que  $\gamma$  est un homéomorphisme. Cela est en particulier vrai si  $\gamma$  est la restriction à  $J$  d'une fonction continue injective définie sur un intervalle compact (cf. théorème 10.20).

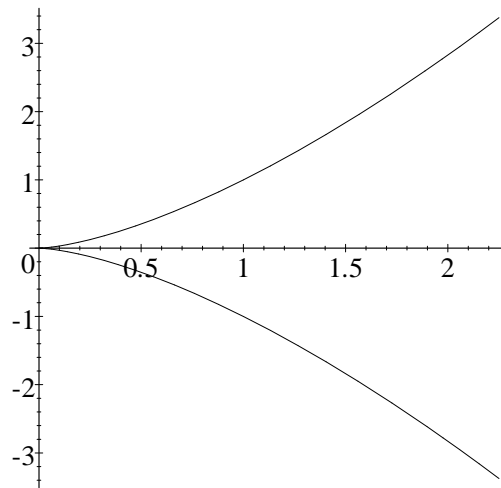
Plus généralement supposons que  $\gamma$  est injective et soit  $([a_k, b_k])$  est une suite (croissante) d'intervalles contenus dans  $J$  telle que  $([a_k, b_k]^\circ)$  soit un recouvrement ouvert de  $J$ . D'après le corollaire 10.20 pour que  $\gamma$  soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que les parties  $\gamma([a_k, b_k]^\circ)$  soient ouvertes dans  $\gamma(J)$ , i.e. que  $\gamma([a_k, b_k]^\circ) = \gamma([a_k, b_k])^\circ$ . L'exemple  $\gamma_3$  ci-dessous illustre bien le problème.

**EXEMPLE 5** Voici tout d'abord deux exemples où  $\gamma$  n'est pas un paramétrage régulier et  $\gamma(J)$  n'est pas une sous-variété.



$$\gamma_1 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$$

non-injective



$$\gamma_2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

homéomorphisme, mais singulier

La démonstration que  $\gamma_1(\mathbb{R})$  n'est pas une sous-variété est laissée en exercice.

Pour  $\gamma_2(\mathbb{R})$  nous allons montrer que la condition du théorème 13.5.i n'est pas satisfaite en  $(0, 0) = \gamma_2(0)$ . Supposons qu'elle le soit avec  $m = 1$  ou  $2$ ,  $U$  un ouvert avec bord dans  $\mathbb{R}^m$  et un paramétrage régulier

$$\gamma : U \longrightarrow \gamma(U) \quad \text{tel que} \quad \gamma(u) = (0, 0) .$$

Nous pouvons supposer que

$$U \subset \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1} \quad \text{et} \quad \gamma(U) = \gamma_2(\mathbb{R}) \cap \left[ ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \mathbb{R} \right] .$$

(a) Si  $m = 2$ ,  $D\gamma(u)$  est une bijection de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même. Soit donc  $\xi$  tel que  $D\gamma(u)\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $J$  un intervalle contenant 0 et tel que  $u + J \cdot \xi \subset U$ . La courbe paramétrée continûment dérivable

$$\vartheta_\xi : t \longmapsto \gamma(u + t \cdot \xi) : J \longrightarrow \gamma(U) \subset [0, \varepsilon[ \times \mathbb{R}$$

peut s'écrire

$$\vartheta_\xi(t) = t \cdot D\gamma(u)\xi + \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ t + \varphi_2(t) \end{pmatrix}$$

avec  $\lim_{J \ni t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ . Pour  $t$  suffisamment petit on a  $|\varphi(t)| \leq t$ , donc

$$0 \leq \varphi_1(t) \leq \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{t}{2} \leq \varphi_2(t) \leq \frac{t}{2}.$$

On a alors

$$\frac{t}{2} \leq t + \varphi_2(t) \leq \frac{3t}{2},$$

ce qui montre que  $\vartheta_\xi(t) \in \gamma_2(\mathbb{R}) \cap [\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+]$ . En posant  $\theta := \text{pr}_1 \circ \vartheta_\xi$ , on a

$$\vartheta_\xi(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta(t)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vartheta'_\xi(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta(t)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \cdot \theta(t)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot \theta'(t).$$

L'égalité des premières composantes entraîne  $\theta'(t) = 0$ , ce qui contredit l'égalité des secondes composantes.

(b) Si  $m = 1$ , considérons les courbes paramétrées continûment dérivables

$$\vartheta_\pm : [0, \varepsilon[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 : u \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ \pm u^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

On a  $\vartheta_\pm([0, \varepsilon[) \subset \gamma(U)$  et la proposition 13.5 nous permet d'écrire  $\vartheta_\pm = \gamma \circ \vartheta_{\pm, \gamma}$  pour une fonction continûment dérivable  $\vartheta_{\pm, \gamma} : [0, \varepsilon[ \longrightarrow U \subset \mathbb{R}_-$ . Puisque les images  $\vartheta_\pm([0, \varepsilon[)$  n'ont que  $(0, 0)$  en commun et que  $\gamma$  est bijective, les images  $\vartheta_{\pm, \gamma}([0, \varepsilon[)$  sont des intervalles recouvrant  $U$  et n'ayant que  $u$  en commun. On en déduit que  $\vartheta'_{+, \gamma}(0)$  et  $\vartheta'_{-, \gamma}(0)$  ont des signes différents. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vartheta'(0) = \gamma'(u) \cdot \vartheta'_{\pm, \gamma}(0),$$

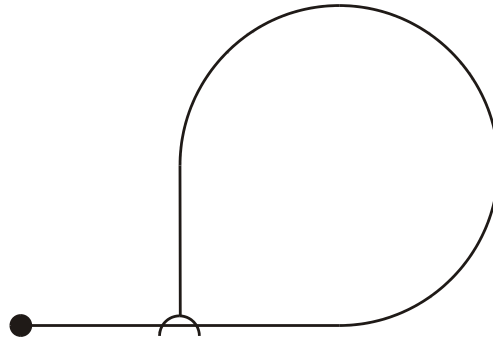
donc  $\gamma'_2(u) = 0$  et  $\gamma'_1(u) \cdot \vartheta'_{\pm, \gamma}(0) = 1$ , ce qui n'est possible que si  $\gamma'_1(u) = 0$ . On a donc  $\gamma'(u) = 0$ , ce qui est absurde.

**EXEMPLE 6** Voici deux exemples où  $\gamma$  est injective, mais n'est pas un homéomorphisme. L'application

$$\gamma_3 : \left[-2, \frac{3\pi}{2} + 1\right[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} & -2 \leq t < 0 \\ \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} & \text{si } 0 \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3\pi}{2} - t \end{pmatrix} & \frac{3\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} + 1 \end{cases}$$

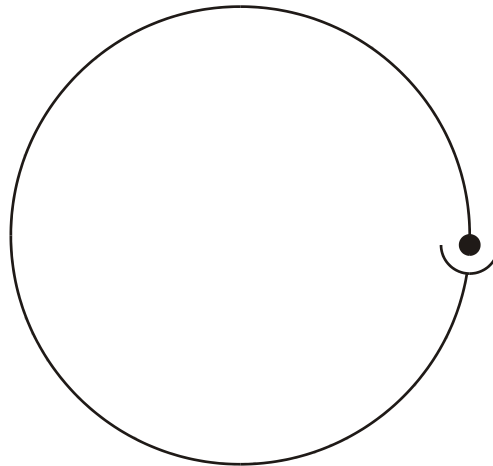
n'est pas un homéomorphisme car, pour tout  $t \in [-2, \frac{3\pi}{2} + 1[$ , on a  $[-2, t]^\circ = [-2, t[$  et  $\gamma_3([-2, t])^\circ = \gamma_3([-2, t[ \setminus \{-1\}])$ . Bien que  $[-2, t[$  soit ouvert dans  $[-2, \frac{3\pi}{2} + 1[$ , son image

$\gamma_3([-2, t])$  n'est pas ouvert dans  $\gamma_3\left([-2, \frac{3\pi}{2} + 1]\right)$ . En effet tout voisinage de  $\gamma_3(-1)$  contient une partie de la forme  $\perp$  !



Ce n'est pas une sous-variété, mais la démonstration n'est pas immédiate. Par exemple l'image de

$$\gamma_4 : [0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi[$$



étant  $\mathbb{S}^1$  en est une; on a besoin de deux paramétrages réguliers locaux pour décrire cette sous-variété (cf. exemple 2). Ce n'est pas un homéomorphisme car, pour tout  $t \in [0, 2\pi[$ , on a  $[0, t]^\circ = [0, t[$  et  $\gamma_4([0, t])^\circ = \gamma_4(]0, t])$ . Bien que  $]0, t[$  soit ouvert dans  $[0, 2\pi[$ , son image  $\gamma_4(]0, t[)$  n'est pas ouvert dans  $\gamma_4([0, 2\pi]) = \mathbb{S}^1$ . En effet tout voisinage de  $\gamma_4(0)$  contient une partie de la forme

$$\gamma_4([0, \varepsilon[ \cup ]2\pi - \varepsilon, 2\pi]) !$$

**EXERCICE 1** Soient  $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $r > 0$  et

$$\mathbb{S}_r^n(y) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x - y| = r\} .$$

(a) Montrer que l'inversion par rapport à la sphère  $\mathbb{S}_r^n(y)$

$$I_{y,r} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{y\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{y\} : x \longmapsto y + \frac{r^2}{|x - y|^2} \cdot (x - y)$$

est un difféomorphisme.

(b) Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$(0, a) := (0, \dots, a) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{et} \quad (x, 0) := (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} .$$

Montrer que

$$\gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \longmapsto I_{(0,2),2}(x, 0)$$

est un paramétrage régulier de  $\mathbb{S}_1^n(0, 1) \setminus \{(0, 2)\}$ .

(c) Donner une description géométrique de  $\gamma$ .

**EXERCICE 2** On considère les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$F(x, y) := x^2 - y^3 \quad \text{et} \quad G(x, y) := x^2 - y^4.$$

Esquisser les courbes de niveaux  $\{F = 0\}$  et  $\{G = 0\}$ . En quels points peut-on paramétrer ces ensembles par rapport à  $x$ , i.e. sous forme de graphe  $x \longmapsto (x, g(x))$ , avec  $g$  continue respectivement continûment dérivable? Est-ce que ces ensembles sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^2$ ?

**EXERCICE 3** On considère les courbes paramétrées

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

et  $\gamma := \tilde{\gamma}|_{]-\infty, \sqrt{2}]}$ .

(a) Esquisser  $\gamma(]-\infty, \sqrt{2}])$ .

(b) Montrer que  $\gamma$  est dérivable au sens de la définition 13.4.2.

(c) Montrer que  $D\gamma(t)$  est injective pour tout  $t \in ]-\infty, \sqrt{2}]$ .

(d) Trouver un polynôme  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  du troisième degré tel que  $\tilde{\gamma}(\mathbb{R}) = \{F = 0\}$ . En déduire que  $\gamma(]-\infty, \sqrt{2}]) \setminus \{(0, 0)\}$  est une sous-variété avec bord de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ .

(e) Montrer que  $\gamma(]-\infty, \sqrt{2}])$  n'est pas une sous-variété.

**EXERCICE 4** Soient  $a, b, c > 0$  et considérons l'ellipsoïde

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

(a) Donner un paramétrage régulier  $\gamma$  de  $E_+ := E \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  sous forme de graphe.

(b) Donner des paramétrages réguliers  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  de  $E \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$  respectivement  $E \setminus \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{0\}$  en composant des applications bien connues.

(c) Soient  $x \in E_+$  et  $\xi, \eta$  tels que  $\gamma(\xi) = \gamma_+(\eta) = x$ . Calculer les images des applications  $D\gamma(\xi)$  et  $D\gamma_+(\eta)$  et montrer explicitement qu'elles sont égales en calculant l'équation de ces plans.

## 13.7 Sous-espace vectoriel tangent

Soit  $X$  une sous-variété de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le corollaire 13.5 montre que l'on peut poser la

**DEFINITION 1** Pour tout  $x \in X$ , nous dirons que le sous-espace vectoriel

$$T_X(x) := D\gamma(u)(\mathbb{R}^m)$$

de  $\mathbb{R}^n$ , où  $\gamma$  est un paramétrage régulier au voisinage de  $x = \gamma(u)$ , est le *sous-espace tangent* à  $X$  en  $x$ . Nous désignerons par  $P_x$  l'orthoprojecteur de  $\mathbb{R}^n$  sur  $T_X(x)$ .

Ce sous-espace vectoriel est de dimension  $m$ . En fait, c'est le sous-espace affine  $x + T_X(x)$  qui est tangent (au sens géométrique) à  $X$  en  $x$  comme le montre le théorème qui suit.

**REMARQUE 1** L'espace tangent en tout point d'une sous-variété de dimension 0 est  $\{0\}$ .

**THEOREME** Soit  $x \in X$ . Pour tout intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  et toute courbe paramétrée continûment dérivable

$$\vartheta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{telle que } 0 \in J, \vartheta(0) = x \text{ et } \vartheta(J) \subset X,$$

on a  $\vartheta'(0) \in T_X(x)$ . En outre

- (i) L'ensemble de ces vecteurs  $\vartheta'(0)$  est égal à  $T_X(x)$ .
- (ii) Si  $x \in \partial X$ , il existe un unique vecteur  $\mathbf{n}(x) \in T_X(x)$  tel que

$$|\mathbf{n}(x)| = 1, \quad \mathbf{n}(x) \perp T_{\partial X}(x),$$

et tel que l'ensemble des vecteurs  $\vartheta'(0)$  avec  $J \subset \mathbb{R}_+$  soit égal à

$$\{\mathbf{t} \in T_X(x) \mid (\mathbf{t} | \mathbf{n}(x)) \leq 0\}.$$

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$  et  $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un paramétrage régulier au voisinage de  $x = \gamma(u)$ , la proposition 13.5 montre qu'il existe une application continûment dérivable

$$\vartheta_\gamma : \vartheta^{-1}(\gamma(U)) \longrightarrow U$$

telle que  $\vartheta = \gamma \circ \vartheta_\gamma$ . On a alors  $\vartheta_\gamma(0) = u$  et

$$\vartheta'(0) = D\gamma(u) \vartheta_\gamma'(0) \in T_X(x).$$

**Démonstration de (i)** Pour tout  $\mathbf{t} \in T_X(x) = D\gamma(u)(\mathbb{R}^m)$ , il existe un unique  $\xi \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\mathbf{t} = D\gamma(u)\xi$ . Il est clair que l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R} \mid u + t \cdot \xi \in U\}$  contient un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $0 \in I$  et  $I^\circ \neq \emptyset$ . La courbe paramétrée

$$\vartheta_\xi : t \longmapsto \gamma(u + t \cdot \xi) : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

est évidemment continûment dérivable; on a  $\vartheta_\xi(I) \subset \gamma(U) \subset X$  et

$$\vartheta_\xi'(0) = D\gamma(u)\xi = \mathbf{t}.$$



**Démonstration de (ii)** Si maintenant  $x \in \partial X$ , on a  $x = \gamma(0, w)$  pour un  $w \in U_\partial$  et

$$T_{\partial X}(x) = D\gamma_\partial(w)(\mathbb{R}^{m-1}) = D\gamma(u)(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset D\gamma(u)(\mathbb{R}^m) = T_X(x) .$$

Comme  $T_{\partial X}(x)$  est de dimension  $m - 1$  et que

$$\partial_1\gamma(u) = D\gamma(u)e_1 \notin T_{\partial X}(x) ,$$

puisque  $e_1 \notin \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ , il existe un unique vecteur  $\mathbf{n}(x) \in T_X(x)$  tel que

$$|\mathbf{n}(x)| = 1 \quad , \quad \mathbf{n}(x) \perp T_{\partial X}(x) \quad \text{et} \quad (\partial_1\gamma(u)|\mathbf{n}(x)) > 0 .$$

Comme  $D\gamma(u)e_j \in T_{\partial X}(x)$  pour  $j = 2, \dots, m$ , pour tout  $\mathbf{t} \in T_X(x)$  et  $\xi$  comme en (i), il vient

$$(\mathbf{t}|\mathbf{n}(x)) = (D\gamma(u)\xi|\mathbf{n}(x)) = \sum_{j=1}^m \xi_j \cdot (D\gamma(u)e_j|\mathbf{n}(x)) = \xi_1 \cdot (\partial_1\gamma(u)|\mathbf{n}(x)) .$$

Si  $(\mathbf{t}|\mathbf{n}(x)) \leq 0$ , on a  $\xi_1 \leq 0$ , donc

$$I \subset \{t \in \mathbb{R} \mid u + t \cdot \xi \in U\} \subset \{t \in \mathbb{R} \mid u + t \cdot \xi \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}\} \subset \mathbb{R}_+$$

et  $\mathbf{t} = \vartheta'_\xi(0)$ . Réciproquement si  $J \subset \mathbb{R}_+$ , on a  $\vartheta'_{\gamma,1}(0) \leq 0$ , puisque  $\text{Im } \vartheta_\gamma \subset \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$  et  $\vartheta_{\gamma,1}(0) = 0$ , donc  $(\vartheta'(0)|\mathbf{n}(x)) \leq 0$ . □

**DEFINITION 2** Le vecteur  $\mathbf{n}(x)$  s'appelle la *normale extérieure* à  $\partial X$  en  $x$  (par rapport à  $X$ ). S'il faut préciser nous écrivons  $\mathbf{n}_{\partial X}(x)$ .

**PROPOSITION** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{m-1}$  et  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un paramétrage régulier au voisinage de  $x = \gamma(u) \in X$ .

(i) Pour  $x \in \partial X$ , le vecteur  $\mathbf{n}(x) \in T_X(x)$  est univoquement déterminé par les conditions

$$|\mathbf{n}(x)| = 1 \quad , \quad \mathbf{n}(x) \perp T_{\partial X}(x) \quad \text{et} \quad (\partial_1\gamma(u)|\mathbf{n}(x)) > 0 .$$

On a

$$T_X(x) = T_{\partial X}(x) \boxplus \mathbb{R} \cdot \mathbf{n}(x) ,$$

la somme directe étant orthogonale.

(ii) Si  $x \in X$ , les vecteurs

$$\partial_j\gamma(u) = D\gamma(u)e_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, m$$

forment une base de  $T_X(x)$ . Cette base n'est pas nécessairement orthogonale, ni normée. Remarquons aussi que  $\partial_j\gamma(u)$  est le vecteur tangent en 0 à la courbe paramétrée

$$t \mapsto \gamma(u + t \cdot e_j) .$$

Si  $x \in \partial X$ , les vecteurs

$$\partial_j\gamma(u) \quad \text{pour } j = 2, \dots, m$$

forment une base de  $T_{\partial X}(x)$ , et  $\partial_1\gamma(u)$  pointe à l'extérieur de la sous-variété.

On utilise les notations du théorème 13.5.

(iii) Pour  $x \in X$ , on a

$$T_X(x) = DF(x)^\top (\mathbb{R}^{n-m})^\perp = \{\text{grad } F_j(x) \mid j = 1, \dots, n - m\}^\perp .$$

(iv) Pour  $x \in \partial X$ , on a

$$T_{\partial X}(x) = \left( \begin{array}{c} D\delta(x) \\ DF(x) \end{array} \right)^\top (\mathbb{R}^{1+n-m})^\perp = [\{\text{grad } \delta(x)\} \cup \{\text{grad } F_j(x) \mid j = 1, \dots, n-m\}]^\perp$$

et

$$\mathbf{n}(x) = \frac{P_x \text{grad } \delta(x)}{|P_x \text{grad } \delta(x)|}.$$

**Démonstration de (i)** C'est de cette manière que  $\mathbf{n}(x)$  a été défini dans la démonstration du théorème précédent.

**Démonstration de (ii)** On a en effet  $D\gamma(u) = (\partial_j \gamma(u))_{j=1, \dots, m}$  et  $D\gamma(u)$  est injective.

**Démonstration de (iii)** Rappelons que

$$DF(x)^\top = (\text{grad } F_1(x), \dots, \text{grad } F_{n-m}(x)).$$

est injective, donc que les vecteurs  $\text{grad } F_j(x)$  pour  $j = 1, \dots, n-m$  sont linéairement indépendants. Pour tout  $v, w \in \mathbb{R}^m$ , il vient

$$(DF(x)^\top v \mid D\gamma(u)w) = (v \mid DF(x)D\gamma(u)w) = (v \mid D(F \circ \gamma)(u)w) = 0,$$

car  $\gamma(U) \subset X$ , donc  $F \circ \gamma = 0$ . Ceci montre que  $\text{grad } F_j(x) \perp T_X(x)$  pour tout  $j = 1, \dots, n-m$ , i.e.

$$T_X(x) \subset \{\text{grad } F_j(x) \mid j = 1, \dots, n-m\}^\perp = DF(x)^\top (\mathbb{R}^{n-m})^\perp.$$

On en déduit que

$$m = \dim T_X(x) \leq \dim DF(x)^\top (\mathbb{R}^{n-m})^\perp = n - \dim DF(x)^\top (\mathbb{R}^{n-m}) = n - (n-m) = m,$$

ce qui prouve l'égalité.

**Démonstration de (iv)** Rappelons ici que l'on peut supposer que  $\delta = \Phi_1$ , donc que  $\text{grad } \delta(x) = \text{grad } \Phi_1(x) = D\Phi(x)^\top e_1$ .

Pour tout  $j = 2, \dots, m$ , il vient alors

$$\begin{aligned} (\text{grad } \delta(x) \mid \partial_j \gamma(u)) &= (D\Phi(x)^\top e_1 \mid D\gamma(u) e_j) = \\ &= (e_1 \mid D\Phi(x) D\gamma(u) e_j) = (e_1 \mid D(\Phi \circ \gamma)(u) e_j) = (e_1 \mid e_j) = 0, \end{aligned}$$

car

$$\Phi \circ \gamma = \Phi \circ \Phi^{-1} \circ j_{\mathbb{R}^m|U} = j_{\mathbb{R}^m|U} : U \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Par (iii) on obtient

$$T_{\partial X}(x) = \left( \begin{array}{c} D\delta(x) \\ DF(x) \end{array} \right)^\top (\mathbb{R}^{1+n-m})^\perp.$$

D'autre part

$$(\text{grad } \delta(x) \mid \partial_1 \gamma(u)) = (e_1 \mid D\Phi(x) D\gamma(u) e_1) = (e_1 \mid e_1) = 1;$$

il est alors clair que  $\frac{P_x \text{grad } \delta(x)}{|P_x \text{grad } \delta(x)|}$  satisfait aux conditions de (i). □

**REMARQUE** Le calcul de l'orthoprojecteur  $P_x$  sur  $T_X(x)$  peut se faire de différentes manières.

(a) Si l'on a orthonormalisé les vecteurs  $\text{grad } F_j(x)$  pour  $j = 1, \dots, n - m$  et si  $(\epsilon_j)_{j=1, \dots, n-m}$  désigne ces vecteurs, alors

$$P_x = \text{Id} - \sum_{j=1}^{n-m} (\epsilon_j | \diamond) \cdot \epsilon_j ,$$

i.e.

$$P_x \text{grad } \delta(x) = \text{grad } \delta(x) - \sum_{j=1}^{n-m} (\epsilon_j | \text{grad } \delta(x)) \cdot \epsilon_j .$$

(b) Si  $X$  est une sous-variété avec bord de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in \partial X$ , alors

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\text{grad } \delta(x)}{|\text{grad } \delta(x)|} .$$

En effet, dans ce cas  $T_X(x) = \mathbb{R}^n$ , donc  $P_x = \text{Id}$  et il suffit de normaliser. ————  $\square$

(c) Si  $X$  est une sous-variété avec bord de dimension  $n - 1$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in \partial X$ , alors

$$P_x \text{grad } \delta(x) = \text{grad } \delta(x) - \frac{(\text{grad } F(x) | \text{grad } \delta(x))}{|\text{grad } F(x)|^2} \cdot \text{grad } F(x) ,$$

ce qui permet de calculer  $\mathbf{n}(x)$ .

(d) On a également

$$P_x = D\gamma(u) [D\gamma(u)^\top D\gamma(u)]^{-1} D\gamma(u)^\top .$$

En effet, pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\left\{ \text{Id} - D\gamma(u) [D\gamma(u)^\top D\gamma(u)]^{-1} D\gamma(u)^\top \right\} v \perp T_X(x)$$

car

$$\begin{aligned} & \left( \left\{ \text{Id} - D\gamma(u) [D\gamma(u)^\top D\gamma(u)]^{-1} D\gamma(u)^\top \right\} v \mid D\gamma(u) \xi \right) = \\ & = (v \mid D\gamma(u) \xi) - \left( [D\gamma(u)^\top D\gamma(u)]^{-1} D\gamma(u)^\top v \mid [D\gamma(u)^\top D\gamma(u)] \xi \right) = \\ & = (v \mid D\gamma(u) \xi) - (D\gamma(u)^\top v \mid \xi) = 0 \end{aligned}$$

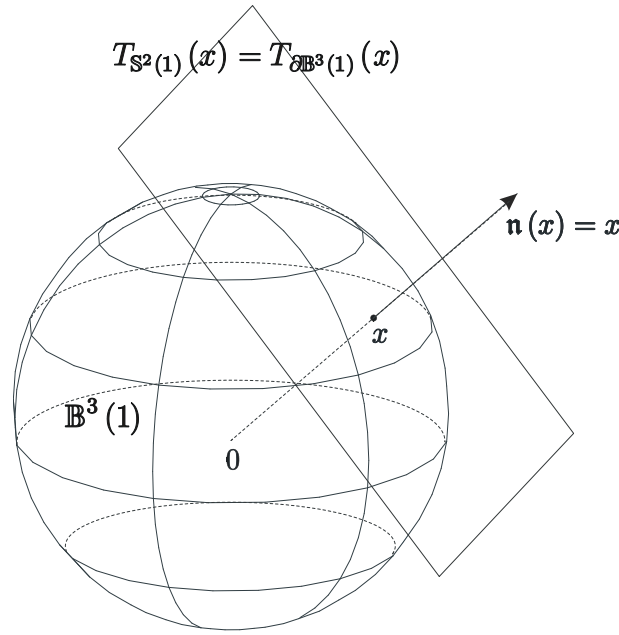
pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^m$ . ————  $\square$

**EXEMPLE 1** D'après l'exemple 13.6.2 la boule  $\mathbb{B}^n(r)$  est une sous-variété de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , dont le bord est la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ .

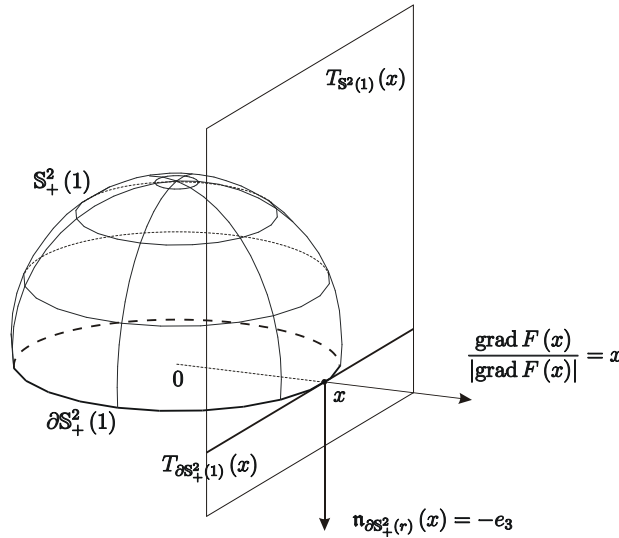
L'espace tangent en tout point  $x$  de  $\mathbb{B}^n(r)$  est  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathbb{S}^{n-1}(r)$ , on a immédiatement

$$\mathbf{n}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x) = \frac{\text{grad } \delta(x)}{|\text{grad } \delta(x)|} = \frac{2x}{|2x|} = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad T_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x) = \left\{ \mathbf{n}_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x) \right\}^\perp$$

par la remarque (b) ci-dessus.



**EXEMPLE 2** D'après l'exemple 13.6.3 la calotte supérieure  $S_+^2(r)$  est une sous-variété de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ , dont le bord est  $S^1(r) \times \{0\}$ .



L'espace tangent en tout point  $x$  de  $S_+^2(r)$  est

$$T_{S_+^2(r)}(x) = \{x\}^\perp,$$

puisque  $\text{grad } F(x) = 2x$ . Pour tout  $x \in \partial S_+^2(r)$ , la remarque (c) ci-dessus montre que

$$P_x \text{grad } \delta(x) = \text{grad } \delta(x) - \frac{(\text{grad } F(x) | \text{grad } \delta(x))}{|\text{grad } F(x)|^2} \cdot \text{grad } F(x) = -e_3 - \frac{(2x | e_3)}{|2x|^2} \cdot 2x = -e_3,$$

donc que

$$n_{\partial S_+^2(r)}(x) = -e_3 \quad \text{et} \quad T_{\partial S_+^2(r)}(x) = \{e_3, x\}^\perp = \{e_3\}^\perp \cap \{x\}^\perp = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cap \{x\}^\perp.$$

**EXEMPLE 3** D'après l'exemple 13.6.4, si  $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continûment dérivable,  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in J$ , et  $\gamma$  est un homéomorphisme de  $J$  sur  $\gamma(J)$ , alors  $\gamma(J)$  une sous-variété de dimension 1, dont le bord est  $\gamma(J \setminus J^\circ)$ .

Pour tout  $t \in J$ , l'espace tangent en  $\gamma(t)$  est

$$T_{\gamma(J)}(\gamma(t)) = \mathbb{R} \cdot \gamma'(t) .$$

Si  $\inf J$ , respectivement  $\sup J$ , appartient à  $J \setminus J^\circ$ , on a

$$\mathbf{n}_{\partial\gamma(J)}(\gamma(\inf J)) = -\frac{\gamma'(\inf J)}{|\gamma'(\inf J)|} , \text{ resp. } \mathbf{n}_{\partial\gamma(J)}(\gamma(\sup J)) = \frac{\gamma'(\sup J)}{|\gamma'(\sup J)|} .$$

C'est immédiat par la proposition, en remarquant que

$$J - \inf J \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad J - \sup J \subset \mathbb{R}_- .$$

---

□