Chapitre 1

THÉORIES FORMELLES

Nous allons donner dans ce chapitre une introduction rapide à la notion de théorie formelle permettant de décrire les fondements de la Mathématique. Le but est de donner une formalisation , i.e. une codification très précise, d'une partie de la "réalité". On parle d'un modèle . C'est un jeu avec des lettres et des mots se déroulant sur une feuille de papier, un tableau ou dans un ordinateur. Le résultat d'un jeu correct est un théorème . On parle du *point de vue syntactique* . L'interprétation de ce modèle consiste à donner un sens à ce jeu dans la réalité de telle manière qu'un théorème en devienne une affirmation considérée comme vraie. On parle du *point de vue sémantique* .

Pour illustrer certains points, sous forme d'exemples ou d'exercices, nous utiliserons les nombres réels tels qu'on les appréhende à l'école.

Version du 27 novembre 2001

1.1 Théories formelles

Une *expression* est une suite finie de symboles pris dans un *alphabet* . Une *expression bien formée* est une expression obtenue à l'aide d'un ensemble fini de *règles de construction* données.

Une *règle d'inférence* associe à certaines expressions bien formées une expression bien formée, dite la *conséquence directe* de ces expressions par cette règle.

Une *théorie formelle* consiste à se donner les règles de construction des expressions bien formées, un nombre fini de règles d'inférence, un nombre fini d'expressions bien formées, les *axiomes explicites* et un nombre fini de schémas d'axiomes, i.e. de règles permettant de créer les *axiomes implicites* .

Une *démonstration* est une suite d'expressions bien formées telle que chaque expression de cette suite soit ou bien un axiome, explicite ou implicite, ou bien la conséquence directe d'expressions la précédant par une règle d'inférence de la théorie.

Un *théorème* est une expression bien formée appartenant à une démonstration.

1.2 Théories logiques ou calcul des propositions

Une théorie est dite *logique* si les conditions minimales suivantes sont satisfaites :

(a) Son alphabet contient au moins les signes logiques $\neg$ et $\vee$, ainsi que des parenthèses. Une partie des règles de construction des expressions bien formées permettent de former ce que l'on appelle les *relations* (ou *propositions*). Parmi celles-ci figurent les deux règles suivantes :

Si A et B sont des relations, alors

R_1 $\qquad\neg(A)$

R_2 $\qquad(A) \vee (B)$

sont des relations.

Nous supprimerons parfois les parenthèses superflues lorsque aucune confusion n'est à craindre et nous utiliserons des parenthèses carrées ou des accolades si la lisibilité est augementée. Nous écrirons par exemple $\neg A \vee B$ à la place de $(\neg(A)) \vee (B)$. On introduit les abréviations suivantes :

$$A \Rightarrow B \quad : \quad \neg A \vee B$$

$$A \wedge B \quad : \quad \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \Leftrightarrow B \quad : \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \ .$$

(b) On peut appliquer la règle d'inférence dite du *modus ponens* :

MP $\qquad B$ est la conséquence directe des deux relations A et $A \Rightarrow B$.

On obtient immédiatement le métathéorème suivant en écrivant les démonstrations de A et B respectivement l'une derrière l'autre :

Syllogisme *Si A et $A \Rightarrow B$ sont des théorèmes, alors B est un théorème.*

(c) Les schémas d'axiomes suivants font partie de la théorie :

Si A, B, C sont des relations, alors

$L_1(A)$ $\qquad(A \vee A) \Rightarrow A$

$L_2(A, B)$ $\qquad A \Rightarrow (A \vee B)$

$L_3(A, B)$ $\qquad(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

$L_4(A, B, C)$ $\qquad(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)]$

sont des axiomes implicites.

EXEMPLE 1 *Si une théorie logique est* contradictoire , *i.e. s'il existe une relation A telle que A et $\neg A$ soient des théorèmes, alors toute relation est un théorème.*

Un logicien écrira la démonstration suivante :

$Th.$	$\neg A$
$L_2(\neg A, B)$	$\neg A \Rightarrow (\neg A \vee B)$
MP	$\neg A \vee B$
$i.e.$	$A \Rightarrow B$

$Th.$	A
MP	B

Quant au mathématicien il écrira : En effet soit B une relation quelconque. La relation

$$\neg A \Rightarrow (\neg A \vee B)$$

est un théorème d'après $L_2(\neg A, B)$, donc $\neg A \vee B$ est aussi un théorème par syllogisme. Mais cette dernière relation est $A \Rightarrow B$, donc B est un théorème à nouveau par syllogisme. □

Comme pour le syllogisme il est souvent utile d'interpréter un théorème sous forme de métathéorème. C'est le cas par exemple de $L_4(B, C, \neg A)$.

EXEMPLE 2 Syllogisme hypothétique *Si A, B, C sont des relations et si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ sont des théorèmes, alors $A \Rightarrow C$ est un théorème.*

D'après $L_4(B, C, \neg A)$, la relation $(B \Rightarrow C) \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$ est un théorème, d'où le résultat en appliquant deux fois le syllogisme, ce qui revient à écrire la démonstration suivante :

$Th.$	$B \Rightarrow C$
$L_4(B, C, \neg A)$	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$
MP	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
$Th.$	$A \Rightarrow B$
MP	$(A \Rightarrow C)$

EXERCICE 1 *Montrer, si A, B, C sont des relations, que les relations suivantes sont des théorèmes :*

(i)	$A \Rightarrow A$
(ii)	$A \vee \neg A$
(iii)	$A \Rightarrow \neg\neg A$
(iv)	$B \Rightarrow (A \vee B)$
(v)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(vi)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Démonstration de (i)

$L_2(A, A)$	$A \Rightarrow (A \vee A)$
$L_1(A)$	$(A \vee A) \Rightarrow A$
Exemple 2	$A \Rightarrow A$

Démonstration de (ii)

i	$\neg A \vee A$
$L_3(\neg A, A)$	$(\neg A \vee A) \Rightarrow (A \vee \neg A)$
MP	$A \vee \neg A$

Démonstration de (iii)

$ii\,(\neg A)$	$\neg A \vee \neg\neg A$
i.e.	$A \Rightarrow \neg\neg A$

Démonstration de (iv)

$L_2\,(B, A)$	$B \Rightarrow (B \vee A)$
$L_3\,(B, A)$	$(B \vee A) \Rightarrow (A \vee B)$
Exemple 2	$B \Rightarrow (A \vee B)$

Démonstration de (v)

$L_2\,(A, \neg B)$	$A \Rightarrow (A \vee \neg B)$
$L_3\,(A, \neg B)$	$(A \vee \neg B) \Rightarrow (\neg B \vee A)$
Exemple 2	$A \Rightarrow (\neg B \vee A)$
i.e.	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Démonstration de (vi)

$L_4\,(B, \neg\neg B, \neg A)$	$(B \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow [(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B)]$
$iii\,(B)$	$B \Rightarrow \neg\neg B$
MP	$(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B)$
$L_3\,(\neg A, \neg\neg B)$	$(\neg A \vee \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$
Exemple 2	$(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$
i.e.	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

EXERCICE 2 On a le métathéorème suivant : *Si A est un théorème et B une relation, alors $A \vee B$ et $B \Rightarrow A$ sont des théorèmes.*

Démonstration

$Th.$	A
$L_2\,(A, B)$	$A \Rightarrow A \vee B$
MP	$A \vee B$
Exercice $1.v\,(A, B)$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
MP	$B \Rightarrow A$

COMPLEMENTS On peut remplacer le signe logique $\vee$ par $\Rightarrow$ et on introduit les abréviations suivantes :

$$A \vee B \quad : \quad \neg A \Rightarrow B$$

$$A \wedge B \quad : \quad \neg\,(A \Rightarrow \neg B)$$

$$A \Leftrightarrow B \quad : \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Les schémas d'axiomes sont remplacés par les suivants :

Si A, B, C sont des relations, alors

$L'_1\,(A, B)$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
$L'_2\,(A, B, C)$	$[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$

$L_3'(A,B)$ $\qquad (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow [(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B]$

sont des axiomes implicites.

La démonstration de l'exercice 1.i est dans ce cadre un peu plus difficile :

$L_1'(A, A \Rightarrow A)$ $\qquad A \Rightarrow [(A \Rightarrow A) \Rightarrow A]$

$L_2'(A, A \Rightarrow A, A)$ $\qquad \{A \Rightarrow [(A \Rightarrow A) \Rightarrow A]\} \Rightarrow \{[A \Rightarrow (A \Rightarrow A)] \Rightarrow (A \Rightarrow A)\}$

MP $\qquad [A \Rightarrow (A \Rightarrow A)] \Rightarrow (A \Rightarrow A)$

$L_1'(A,A)$ $\qquad A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$

MP $\qquad A \Rightarrow A$

On peut remplacer $L_3'(A,B)$ par

$L_3''(A,B)$ $\qquad (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

C.A. Meredith a montré en 1953 que l'on peut prendre le seul schéma d'axiomes suivant : si A, B, C, D, E sont des relations, alors

$$(\{[(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg D)] \Rightarrow C\} \Rightarrow E) \Rightarrow [(E \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow A)]$$

est un axiome implicite.

On peut n'utiliser qu'un signe logique introduit par J. Nicod en 1917, la *dénégation alternative* $|$ et le schéma d'axiome suivant : si A, B, C, D, E sont des relations alors

$$\Big[A \,\Big|\, (B|C)\Big] \,\Bigg|\, \Bigg(\Big[D \,\Big|\, (D|D)\Big] \,\Bigg|\, \Bigg\{(E|B) \,\Big|\, \Big[(A|E) \,\Big|\, (A|E)\Big]\Bigg\}\Bigg)$$

est un axiome implicite.

1.3 Interprétation d'une théorie logique

Une théorie logique est un modèle de la pensée logique ordinaire. On interpréte une relation A comme une affirmation qui peut être vraie ou fausse. Un théorème est interprété comme une affirmation vraie. Dans ce qui suit nous ne ferrons pas de distinction typographique entre une relation et son interprétation. Nous donnons maintenant l'interprétation des principales relations, ainsi que la condition de véracité :

$\neg A$	*non-A* : négation	A est fausse
$A \vee B$	A *ou* B : disjonction (non-exclusive)	l'une des propositions A, B au moins est vraie
$A \Rightarrow B$	A *entraîne* B : implication	A est fausse ou B est vraie
$A \wedge B$	A *et* B : conjonction	les deux propositions A, B sont vraies
$A \Leftrightarrow B$	A *est équivalent à* B : équivalence	les propositions A, B sont simultanément vraies ou fausses

L'équivalence $A \Leftrightarrow B$ s'exprime aussi en disant

on a A si, et seulement si, on a B ,

mais aussi

pour que l'on ait A , il faut et il suffit que l'on ait B .

La partie de la réalité que nous formalisons ne contient que des affirmations qui ne peuvent être que vraies ou fausses : *principe du tiers exclu* , puisque $A \vee \neg A$ est un théorème. En particulier une affirmation est vraie si, et seulement si, sa négation est fausse. Mais cela ne signifie pas nécessairement que soit A , soit $\neg A$ est un théorème, une relation A pouvant être indécidable (théorème de Gödel).

On peut aussi déterminer la véracité d'une proposition en utilisant les tabelles de vérité. Nous n'allons pas poursuivre l'étude de ce système formel en détail, notre bon sens étant en fait suffisant pour traiter les problèmes logiques que nous rencontrerons. Nous argumenterons essentiellement au niveau de l'interprétation.

1.4 Méthodes de démonstration

Critère de la déduction (J. Herbrand 1930) *Soient A, B des relations. Pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est un théorème, on peut supposer que A est un théorème et il suffit de montrer que B en est aussi un.*

Pour simplifier le langage, on peut l'exprimer par exemple sous la forme : *Pour démontrer $A \Rightarrow B$, on peut supposer A et il suffit de prouver B .*

Du point de vue formel cela revient à rajouter l'axiome explicite A à la théorie logique considérée et dans cette nouvelle théorie de démontrer B .

Démonstration

Soit $A, A_1, \ldots, A_n$ une démonstration de B , i.e. $B = A_n$, dans la nouvelle théorie. Nous allons modifier successivement la suite d'expressions bien formées $A_1, \ldots, A_n$, qui n'est plus une démonstration, de telle manière que $A \Rightarrow A_j$ soit un théorème, i.e. une ligne d'une démonstration, dans l'ancienne théorie. La dernière ligne, qui sera évidemment $A \Rightarrow B$, est alors un théorème de cette théorie.

On remplace A par

Exercice 1.2.1.*i*	$A \Rightarrow A$

Si A_j est un axiome, on rajoute

Exercice 1.2.1.*v* (A_j, A)	$A_j \Rightarrow (A \Rightarrow A_j)$
MP	$A \Rightarrow A_j$

Reste le cas où A_j a été obtenue par modus ponens à partir de A_k et de A_l ayant la forme $A_k \Rightarrow A_j$ pour des indices $k, l < j$. Mais dans la démonstration que nous sommes en train de faire figure déjà les lignes

$$A \Rightarrow A_k$$

et

$$A \Rightarrow (A_k \Rightarrow A_j)$$

Il nous suffit alors de remplacer la ligne A_j par

$L_2'(A, A_k, A_j)$	$[A \Rightarrow (A_k \Rightarrow A_j)] \Rightarrow [(A \Rightarrow A_k) \Rightarrow (A \Rightarrow A_j)]$
MP	$(A \Rightarrow A_k) \Rightarrow (A \Rightarrow A_j)$
MP	$A \Rightarrow A_j$

EXEMPLE 1 Redémontrons le syllogisme hypothétique (exemple 1.2.2) en utilisant le critère de la déduction.

En supposant A , on obtient B par syllogisme puisque l'on a $A \Rightarrow B$, puis de même C puisque $B \Rightarrow C$. □

EXERCICE 1 Montrer que si B et $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ sont des théorèmes, alors $A \Rightarrow C$ est un théorème.

Démonstration

En supposant A , on obtient $B \Rightarrow C$ par syllogisme puisque l'on a $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, puis de même C puisque $B \Rightarrow C$. $\square$

Méthode de réduction à l'absurde *Soit A une relation. Si $\neg A$ entraîne une contradiction, alors on a A .*

Puisqu'en supposant $\neg A$, on a contradiction, toute relation est vraie d'après l'exemple 1.2.1, en particulier A . Par le critère de la déduction on en déduit $\neg A \Rightarrow A$. Mais $L_4(\neg A, A, A)$ montre que l'on a

$$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow [(A \vee \neg A) \Rightarrow (A \vee A)] \ ,$$

donc aussi $(A \vee \neg A) \Rightarrow (A \vee A)$ par syllogisme. Finalement, puisqu'on a $A \vee \neg A$ par l'exercice 1.2.1.ii, on obtient $A \vee A$, donc A par $L_1(A)$. $\square$

EXEMPLE 2 *Si A est une relation, alors $\neg\neg A \Rightarrow A$. En particulier les relations A et $\neg\neg A$ sont équivalentes.*

D'après le critère de la déduction nous pouvons supposer $\neg\neg A$ et il sufffit de prouver A . Mais si l'on a $\neg A$, on a contradiction, d'où le résultat par la méthode de réduction à l'absurde. La seconde partie découle de l'exercice 1.2.1.iii. $\square$

Contraposition *Soient A, B des relations. Alors on a*

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \ .$$

En particulier les relations $A \Rightarrow B$ et $\neg B \Rightarrow \neg A$ sont équivalentes.

D'après le critère de la déduction nous pouvons supposer que $\neg B \Rightarrow \neg A$ et A sont vraies, et il nous faut prouver B . Mais si $\neg B$ est vraie, on a $\neg A$ par le critère de déduction, donc une contradiction et le résultat découle de la méthode de réduction à l'absurde. La seconde partie découle de l'exercice 1.2.1.vi. $\square$

EXEMPLE 3 *Si x est un nombre rationnel quelconque, alors $x^2 \neq 2$.*

Cela revient à démontrer que $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2$. Par le critère de la déduction nous pouvons supposer que $x \in \mathbb{Q}$ et il nous suffit de montrer que $x^2 \neq 2$. Nous le faisons par la méthode de réduction à l'absurde en supposant que $x^2 = 2$ et en montrant que l'on obtient une contradiction. Soit $x = \frac{p}{q}$ tel que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. En simplifiant nous pouvons supposer en outre que p est impair ou q est impair. Comme

$$2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \ ,$$

on a $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair. Mais p impair entraîne p^2 impair par contraposition. En effet si p est impair, en l'écrivant sous la forme $2k+1$, on a $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$, donc p^2 est impair. Ainsi $p = 2r$, donc $4r^2 = p^2 = 2q^2$, i.e. $q^2 = 2r^2$, ce qui montre que q^2 , et par suite q , sont pairs. Ceci est contradictoire. $\square$

Pour terminer formulons encore quelques critères de déduction intuitivement clairs.

EXERCICE 2 *Soient A, B, C des relations.*

(i) ***Disjonction des cas***

Si l'on a $A \vee B$, $A \Rightarrow C$ *et* $B \Rightarrow C$, *alors on a* C .

(ii) *Si l'on a* A *et* B , *alors on a* $A \wedge B$.

(iii) *On a* $(A \wedge B) \Rightarrow A$ *et* $(A \wedge B) \Rightarrow B$.

(iv) *Si l'on a* $A \Rightarrow B$ *et* $B \Rightarrow A$, *alors* $A \Leftrightarrow B$, *et réciproquement.*

(v) *Si* $A \Leftrightarrow B$ *et si* A *est une sous-relation d'une relation plus complexe* C , *alors la relation obtenue en remplaçant* A *par* B *dans* C *est équivalente à* C .

(vi) ***Règles de Morgan***
On a

$$A \wedge (B \vee C) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

et

$$A \vee (B \wedge C) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C) \ .$$

Démonstration de (i)

Th.	$A \Rightarrow C$
$L_4(A, C, C)$	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow [(C \vee A) \Rightarrow (C \vee C)]$
MP	$(C \vee A) \Rightarrow (C \vee C)$
$L_1(C)$	$(C \vee C) \Rightarrow C$
Exemple 1.2.2	$(C \vee A) \Rightarrow C$
Th.	$B \Rightarrow C$
$L_4(B, C, A)$	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)]$
MP	$(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$
$L_3(A, C)$	$(A \vee C) \Rightarrow (C \vee A)$
Exemple 1.2.2	$(A \vee B) \Rightarrow (C \vee A)$
Exemple 1.2.2	$(A \vee B) \Rightarrow C$
Th.	$A \vee B$
MP	C

Démonstration de (ii)

Hyp.	$\neg(A \wedge B)$
i.e.	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$
Exemple 2	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
MP	$\neg A \vee \neg B$
i.e.	$A \Rightarrow \neg B$
Th.	A
MP	$\neg B$
Th.	B
	contradiction

EXERCICE 3 Soit $x \in \mathbb{R}$ et définissons

$$|x| := \left\{ \begin{array}{ccc} x & & x \geqslant 0 \\ & \text{si} & \\ -x & & x < 0 \end{array} \right. .$$

Montrer en utilisant les règles élémentaires de calcul dans $\mathbb{R}$ que

$$x^2 = |x|^2$$

et que

$$x^2 = x \quad \Rightarrow \quad (x = 0 \vee x = 1) \ .$$

1.5 Théories quantifiées ou calcul des prédicats

Une théorie logique est dite *quantifiée* si les conditions supplémentaires suivantes sont satisfaites :

(a) Son alphabet contient en plus le *quantificateur universel* $\forall$ et des *lettres* (on dit aussi *variables*) $x, y, \ldots$. On se permet au besoin de rajouter les lettres nécessaires. Dans ce cadre, on a deux types de règles de construction des expressions bien formées : celles permettant de former les relations (on dit ici que ce sont des *prédicats*), et celles permettant de former ce que l'on appelle les *termes* .

Parmi ces règles figurent, en plus de R_1 et R_2 de 1.2, les règles suivantes :

T_1 Une lettre est un terme.

T_2 Si S, T sont des termes et x une lettre, alors l'expression bien formée, notée $(S|x)\,T$ et obtenue en remplaçant x partout dans T par S , est un terme.

Si A est une relation, x une lettre et T un terme, alors

R_3 $\forall x\,(A)$

R_4 $(T|x)\,A$ obtenu en remplaçant x partout dans A par T

sont des relations.

Ces expressions, les relations et les termes, contiennent donc des lettres. Dans une relation du type $\forall x\ A$, qui peut être une partie d'une relation plus compliquée, on dit que x est *liée dans* A . En fait il faudrait faire disparaître cette lettre comme le fait Bourbaki dans son système formel. Pratiquement, on convient de remplacer cette lettre par une autre, non encore utilisée, pour ne pas avoir de collision en employant les règles de construction. Par exemple si la lettre x apparait dans T et si y apparait dans A , alors l'expression $(T|y)\,(\forall x\ A)$ ne serait pas celle que l'on veut, puisque le quantificateur $\forall x$ agit sur des lettres supplémentaires. Ceci montre aussi qu'il n'est pas adéquat d'utiliser le mot variable ! Une lettre qui n'est nulle part liée dans un axiome explicite est dite une *constante* de la théorie. Une lettre qui n'est pas une constante et qui n'est nulle part liée dans A est dite *libre dans* A .

On introduit le *quantificateur d'existence* grâce à l'abréviation suivante :

$$\exists x\,(A) \quad : \quad \neg\forall x\,(\neg A)$$

(b) Les schémas d'axiomes suivants font en plus partie de la théorie :

Si A, B, C sont des relations, x une lettre ne figurant pas dans C et T un terme, alors

$Q_1\,(A, x, T)$ $\quad (\forall x\ A) \Rightarrow (T|x)\,A$

$Q_2\,(A, B, x)$ $\quad [\forall x\,(A \Rightarrow B)] \Rightarrow [(\forall x\ A) \Rightarrow (\forall x\ B)]$

$Q_3\,(A, C, x)$ $\quad [\forall x\,(C \Rightarrow A)] \Rightarrow [C \Rightarrow (\forall x\ A)]$

sont des axiomes implicites.

(c) On suppose que tous les schémas d'axiomes satisfont à la propriété suivante : si A est un axiome implicite, x une lettre libre dans A et T un terme, alors $(T|x)\,A$ et $\forall x\ A$ sont aussi des axiomes implicites. Remarquons que les schémas Q_1 , Q_2 et Q_3 satisfont à cette propriété.

On interpréte les termes comme étant des objets pouvant satisfaire à certaines propriétés exprimées par une relation. La relation $\forall x\ A$ est interprétée sous la forme :

pour tout x *, on a* A .

Le premier axiome signifie donc que si une propriété A est satisfaite par tous les objets x , alors elle est en particulier satisfaite par l'objet T .

L'interprétation de $\exists x\ A$ est

il existe un x tel que l'on ait A .

REMARQUE Si A est une relation, alors $\neg (T|x)\, A$ est identique à $(T|x)\, \neg A$. De même si A, B sont des relations, alors $(T|x)\,(A \vee B)$ est identique à $(T|x)\, A \vee (T|x)\, B$.

On a le

Principe de généralisation *Soient A une relation et x une lettre libre dans A . Si l'on a A , alors on a $\forall x\ A$.*

En particulier si A est un théorème, x une lettre libre dans A et T un terme, alors $(T|x)\, A$ est un théorème.

EXEMPLE 1 Dans l'exemple 1.4.2, nous avons montrer

$$\forall x \left(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2\right) \ ,$$

que l'on exprime sous la forme : pour tout nombre rationnel x , on a $x^2 \neq 2$.

EXEMPLE 2 *Si A est une relation, T un terme et x une lettre libre dans A , alors*

$$(T|x)\, A \Rightarrow \exists x\ A \ .$$

En effet, d'après $Q_1(\neg A, x, T)$, on a $\forall x \neg A \Rightarrow (T|x)\, \neg A$, d'où l'on tire

$$\neg (T|x)\, \neg A \Rightarrow \neg \forall x \neg A$$

par l'exercice 1.2.1.vi. Mais grâce à l'exercice 1.2.iii, on a $(T|x)\, A \Rightarrow \neg\neg (T|x)\, A$, d'où le résultat par syllogisme, puisque $\neg (T|x)\, \neg A$ est identique à $\neg\neg (T|x)\, A$. □

Méthode de la constante auxiliaire *Soient A, B des relations et x une lettre libre dans A qui ne figure pas dans B . Si $\exists x\ A$ est un théorème et si, en supposant que A soit vraie, on peut démontrer B , alors B est un théorème.*

On indique que l'on va utiliser cette méthode en disant par exemple : considérons un x tel que A .

EXERCICE *Soient A, B des relations et x une lettre libre dans A et B .*

(i) *Si $A \Rightarrow B$ est un théorème, alors $\forall x\ A \Rightarrow \forall x\ B$ et $\exists x\ A \Rightarrow \exists x\ B$ sont des théorèmes.*

(ii) *On a*

$$\forall x\,(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x\ A) \wedge (\forall x\ B)$$

et

$$\exists x\ \ (A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x\ A) \vee (\exists x\ B)$$

(iii) *Si x ne figure pas dans A , alors*

$$\forall x\ \ (A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee \forall x\ B)$$

et

$$\exists x \ \ (A \wedge B) \Leftrightarrow A \wedge \exists x \ \ B$$

Soit y une lettre libre dans A et B .

(iv) *On a*

$$\forall x \ \forall y \ \ A \Leftrightarrow \forall y \ \forall x \ \ A$$

et

$$\exists x \ \exists y \ \ A \Leftrightarrow \exists y \ \exists x \ \ A$$

(v) *On a*

$$\exists x \ \forall y \ \ A \Rightarrow \forall y \ \exists x \ \ A \ ,$$

mais en général

$$\forall y \ \exists x \ \ A \Rightarrow \exists x \ \forall y \ \ A$$

n'est pas un théorème.

1.6 Théories égalitaires

Une théorie quantifiée est dite *égalitaire* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) Son alphabet contient en plus le *signe d'égalité* $=$ et on a la règle de construction des expressions bien formées supplémentaire suivante :

R_5 si x, y sont des lettres, alors $x = y$ est une relation.

(b) L'axiome explicite et le schémas d'axiome suivants font partie de la théorie :

E_1 $$\forall x\,(x = x)$$

Si A est une relation et x, y des lettres libre dans A , alors

$E_2\,(A, x, y)$ $$(x = y) \Rightarrow [(x|y)\,A \Rightarrow A]$$

est un axiome implicite.

On introduit l'abréviation suivante :

$$x \neq y \quad : \quad \neg\,(x = y)\ .$$

EXEMPLE Pour tout terme T , on a $T = T$.

Démonstration

E_1 $$\forall x\,(x = x)$$

$Q_1\,(x = x, x, T)$ $$[\forall x\,(x = x)] \Rightarrow (T = T)$$

MP $$T = T\ .$$

□

Si A est une relation et x, y, z des lettres, x étant libre et y, z ne figurant pas dans A , la relation

$$\forall y \forall z\,[(y|x)\,A \wedge (z|x)\,A \Rightarrow y = z]$$

signifie qu' *il existe au plus un* x *tel que* A . On dit que A est *univoque en* x . On introduit l'abréviation suivante

$$\exists! x\ A \quad : \quad \exists x\ A \wedge \forall y \forall z\,[(y|x)\,A \wedge (z|x)\,A \Rightarrow y = z]$$

et on dit qu' *il existe un unique* x *tel que* A .

Introduction d'une constante Si l'on a $\exists! x\ A$ on introduit un nouveau terme, que nous noterons a , dépendant des lettres figurant dans A qui sont différentes de x , ainsi que l'axiome $(a|x)\,A$. Cet axiome est implicite si A contient des lettres différentes de x , explicite sinon. Dans cette nouvelle théorie a est une constante et on a

$$(x = a) \Leftrightarrow A\ .$$

Remarquons que tout théorème dans cette nouvelle théorie possède une transcription dans l'ancienne, supprimant le terme a et qui soit un théorème équivalent. Par exemple :

Soit B une relation de l'ancienne théorie. Si la relation $(a|x)\,B$ est un théorème de la nouvelle, alors cette relation est équivalente à

$$\exists x\,(A \wedge B)\ .$$

Littérature

N. Bourbaki, *Théorie des ensembles,* Hermann, Paris, 1970.
E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic,* Van Nostrand.
A. Prestel, *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie,* Vieweg.