Kapitel 12

GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DER FIXPUNKTSATZ

Fassung vom 5. November 2002

12.1 Die gewöhnlichen Differentialgleichungen

Studiert man die Variation einer bestimmten Größe z in Abhängigkeit einer Variable t , so kann man oft diese Situation modellieren, indem man die Variation z' von z mit Hilfe von t und z ausdrücken kann, d.h.

$$z' = F(t, z) \ .$$

Präziser :

DEFINITION 1 Seien D eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ und $F : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Man sagt, daß eine Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$, die auf einem Intervall J von $\mathbb{R}$ definiert ist, eine *Lösung der gewöhlichen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$f' = F(\cdot, f)$$

ist, falls f differenzierbar ist sowie

$$(t, f(t)) \in D \quad \text{und} \quad f'(t) = F(t, f(t)) \quad \text{für alle } t \in J$$

erfüllt. Falls notwendig sagt man, daß die Differentialgleichung $f' = F(\cdot, f)$ auf D definiert ist.

I.a. hat man noch eine sogenannte *Anfangsbedingung* $(\tau, \xi) \in D$. Man sagt dann, daß f eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi$$

ist, falls f Lösung der Differentialgleichung mit $\tau \in J$ und $f(\tau) = \xi$ ist.

BEISPIEL Wir haben schon einige Differentialgleichungen betrachtet.

Z.B. ist die Suche nach einer Stammfunktion einer Funktion $g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ (vgl. 8.7 und 9.8) zur Lösung der Differentialgleichung

$$f' = g$$

äquivalent. In diesem Fall ist die Funktion F durch

$$F : J \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (t, z) \longmapsto g(t)$$

gegeben.

Explizit gelöst haben wir auch die Differentialgleichung

$$f' = c \cdot f \ ,$$

wobei $c : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist (vgl. Beispiel 8.7.1 und Satz 9.8). Hier ist

$$F : J \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (t, z) \longmapsto c(t) \cdot z \ .$$

Schließlich haben wir in 9.15 die besondere Klasse der Differentialgleichungen mit getrennten Variablen betrachtet :

$$f' = \sigma \cdot \rho(f) \ ,$$

wobei $\sigma : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\rho : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Es ist

$$F : \widetilde{J} \times \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x) \longmapsto \sigma(t) \cdot \rho(x) \ .$$

Es ist nützlich auch Systeme von Differentialgleichungen zu betrachten. Diese tauchen in Modellen auf, in denen n Größen z_j , die von einer Variable t abhängen, sich gegenseitig beeinflußen.

Präziser :

DEFINITION 2 Seien D eine Teilmenge in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ und

$$F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n : (t, z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (F_j(t, z_1, \ldots, z_n))_{j=1,\ldots,n} \ .$$

Man sagt, daß eine Funktion

$$f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n : t \longmapsto (f_j(t))_{j=1,\ldots,n} \ ,$$

die auf einem Intervall J von $\mathbb{R}$ definiert ist, eine *Lösung der gewöhnlichen vektorwertigen Differentialgleichung erster Ordnung* oder des *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{oder} \quad f_j' = F_j(t, f_1, \ldots, f_n)$$

ist, falls f differenzierbar ist und

$$(t, f(t)) \in D \quad \text{und} \quad f'(t) = F(t, f(t)) \quad \text{für alle } t \in J$$

erfüllt. Wenn nötig, sagt man, daß die Differentialgleichung $f' = F(\cdot, f)$ auf D definiert ist.

Ist eine *Anfangsbedingung* $(\tau, \xi) \in D$ gegeben, so definiert man wie vorher das *Anfangswertproblem*

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi \ .$$

SATZ *Ist $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und ist $f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $f' = F(\cdot, f)$, dann ist f stetig differenzierbar.*

12.2 Die lipschitzstetigen Abbildungen

DEFINITION 1 Seien X, Y metrische Räume und $q \in \mathbb{R}_+$.
Eine Abbildung $\Phi : X \longrightarrow Y$ heißt *q-lipschitzstetig* , falls für alle $u, v \in X$ gilt

$$d_Y\left(\Phi\left(u\right), \Phi\left(v\right)\right) \leqslant q \cdot d_X\left(u, v\right) \ .$$

Man sagt, daß Φ *lokal lipschitzstetig* ist, falls für alle $x \in X$ eine Umgebung V von x und ein $q \in \mathbb{R}_+$ existieren, so daß die Einschränkung von Φ auf V q-lipschitzstetig ist.

BEMERKUNG 1 Eine lipschitzstetige Abbildung ist gleichmäßig stetig. Eine lokale lipschitzstetige Abbildung ist stetig. Dies ist ein Begriff zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

SATZ *Seien $\widetilde{X}$ eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, $\Phi : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und X eine Teilmenge von $\widetilde{X}$. Dann gilt*

(i) Ist X konvex und

$$\left\|D\Phi\left(x\right)\right\| \leqslant q \quad \text{für alle } x \in X \ ,$$

so ist die Einschränkung von Φ auf X q-lipschitzstetig.

(ii) Die Einschränkung von Φ auf X ist lokal lipschitzstetig.

BEISPIEL Die Funktion $x \longmapsto |x| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist 1-lipschitzstetig, aber in 0 nicht differenzierbar.

DEFINITION 2 Seien X, Y, Z metrische Räume, D eine Teilmenge von $X \times Z$,

$$\Phi : D \longrightarrow Y : (x, z) \longmapsto \Phi\left(x, z\right)$$

eine Abbildung und $q \in \mathbb{R}_+$. Man sagt, daß Φ *in der ersten Variablen* (oder *bzgl. x*) *q-lipschitzstetig* ist, falls für alle $z \in Z$ die Abbildungen

$$\Phi\left(\cdot, z\right) : \{x \in X \mid (x, z) \in D\} \longrightarrow Y$$

q-lipschitzstetig sind, d.h. für alle $u, v \in X$ und $z \in Z$ mit $(u, z), (v, z) \in D$ gilt

$$d_Y\left(\Phi\left(u, z\right), \Phi\left(v, z\right)\right) \leqslant q \cdot d_X\left(u, v\right) \ .$$

Man sagt, daß Φ *lokal lipschitzstetig bzgl. x* ist, falls für alle $(x, z) \in D$ eine Umgebung V von (x, z) in D und ein $q \in \mathbb{R}_+$ existieren, so daß die Einschränkung von Φ auf V q-lipschitzstetig bzgl. x ist.

Man definiert analog die Abbildungen, die (lokal) lipschitzstetig in der zweiten Variable (oder bzgl. z) sind.

KOROLLAR *Seien D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times Z$ und $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine in der ersten Variablen differenzierbare Abbildung, so daß*

$$(x, z) \longmapsto D_x\Phi(x, z) : D \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$$

stetig ist. Dann ist Φ lokal lipschitzstetig in der ersten Variablen.

BEISPIEL 1 Es reicht nicht aus, daß für alle $z \in Z$ die Abbildung $\Phi(\cdot, z)$ auf der offenen Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, z) \in D\}$$

stetig differenzierbar ist. Zwar ist $x \longmapsto D_x\Phi(x, z)$ stetig, aber man braucht die globale Stetigkeit in (x, z) , so daß in einer Umgebung V von (x, z) gilt

$$\sup_{(u,w)\in V} \|D_x\Phi(u, w)\| < \infty \ .$$

12.3 Eindeutigkeitssatz

Wir betrachten erneut eine Differentialgleichung $f' = F(\cdot, f)$, die auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ durch

$$F : D :\longrightarrow \mathbb{K}^n$$

definiert ist. Ist D offen, F differenzierbar bzgl. der zweiten Variablen, wobei man $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}^2$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetzt, und ist

$$(t, x) \longmapsto D_x F(t, x) : D \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$$

stetig, dann ist F lokal lipschitzstetig in der zweiten Variablen.

HAUPTSATZ *Sei $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige Abbildung, die in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig ist. Sind J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $g, h : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ Lösungen von $f' = F(\cdot, f)$ und ist $g(\tau) = h(\tau)$ für ein bestimmtes $\tau \in J$, dann gilt $g = h$.*

Mit anderen Worten besitzt das Anfangswertproblem

$$f' = F(\cdot, f) \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \xi$$

höchstens eine Lösung.

BEISPIEL 1 Für die Eindeutigkeit kann man allgemeinere Differentialgleichungen mit getrennten Variablen $f' = \sigma \cdot \rho(f)$ als in Hauptsatz 9.15 betrachten.

Seien $\sigma : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Funktion, $\widetilde{D}$ eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ und $\rho : \widetilde{D} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine lokal lipschitzstetige Funktion, z.B. falls $\widetilde{D}$ offen ist und ρ stetig differenzierbar ist (vgl. Satz 12.2.ii).

Für jedes Intervall $J \subset \widetilde{J}$ besitzt dann das Anfangswertproblem zu $(\tau, \xi) \in J \times \widetilde{D}$ höchstens eine Lösung auf J .

Die Existenz ist vorläufig (vgl. Hauptsatz 9.15) nur im reellen Fall und $n = 1$ gesichert.

BEISPIEL 2 Der Eindeutigkeitssatz ist auf die Differentialgleichung

$$f' = \sqrt[3]{f^2} \ ,$$

wobei $\sqrt[3]{\cdot}$ die Umkehrfunktion von $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist, nicht anwendbar, da diese Funktion in der Nähe von 0 nicht lipschitzstetig ist. Die Eindeutigkeit ist in der Tat nicht vorhanden, wie wir es schon in Beispiel 9.15.2 gesehen haben.

Aufgabe Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

$$f' = \mathrm{id} \cdot f^2 \quad \text{und} \quad f' = |f| \ ,$$

die auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ definiert sind.

12.4 Einige Beispiele von Differentialgleichungen

Demographische Modelle

Sei $p(t) \in \widetilde{I}$, wobei $\widetilde{I}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist, das “Maß” einer “Population” zur Zeit t . Man nehme an, daß die “Vermehrungsrate” (Fortpflanzung − Tod) nur von der Größe der Population abhängt, d.h daß sie durch eine Funktion $\tilde{\rho} : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschrieben wird. Man bekommt so die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$p' = \tilde{\rho}(p) \cdot p \ .$$

In manchen Situationen beobachtet man, daß sich die Population um eine Größe $M \in \mathbb{R}$ stabilisiert. Dies bedeutet, daß $\tilde{\rho}(M) = 0$, $\tilde{\rho} > 0$ auf $]0, M[$ und $\tilde{\rho} < 0$ auf $]M, \infty[$ gilt. Das einfachste Modell ist, wenn man annimmt, daß

$$\tilde{\rho}(z) = a \cdot (M - z)$$

für $a, M > 0$. Man nennt

$$p' = a \cdot p \cdot (M - p)$$

die *logistische Differentialgleichung* .

Aufgabe 1 Diskutieren Sie die logistische Differentialgleichung (Eindeutigkeit und Existenz).

Homogene Differentialgleichungen

Seien $\tilde{I}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $h : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Die Differentialgleichung

$$f' = h\left(\frac{f}{\mathrm{id}}\right)$$

nennt man *homogen* . Sie ist durch die Funktion

$$F : (t, z) \longmapsto h\left(\frac{z}{t}\right) : \left\{(t, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{K} \mid z \in t \cdot \widetilde{I}\right\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

definiert.

SATZ *Ist J ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 \notin J$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$, so definiert man*

$$g : J \longrightarrow \mathbb{K} :\longmapsto \frac{f(t)}{t} \ .$$

Genau dann ist f Lösung von $f' = h\left(\frac{f}{\mathrm{id}}\right)$, wenn g Lösung von

$$g' = \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot [h(g) - g]$$

ist.

Diese Methode heißt *Lösung durch Substitution* . Die neue Differentialgleichung ist einfacher, da sie mit getrennten Variablen ist.

Bernoulli-Differentialgleichungen

Seien $\widetilde{J}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, $a, b : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Man nennt

$$f' = a \cdot f + b \cdot f^\alpha$$

die *Bernoulli-Differentialgleichung* .

Sie ist durch

$$F : \widetilde{J} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x) \longmapsto a(t) \cdot x + b(t) \cdot x^\alpha$$

definiert. Es gilt die Eindeutigkeit, und man kann sie durch die Substitution

$$g = f^{1-\alpha}$$

lösen.

Aufgabe 2 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f' = -2 \cdot \frac{f}{\mathrm{id}} - 2 \cdot \mathrm{id}^2 \cdot f^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \quad f(2) = \frac{1}{4} \; .$$

Riccati-Differentialgleichungen

Seien $\widetilde{J}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $p, q, r : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man nennt

$$f' = p \cdot f^2 + q \cdot f + r$$

die *Riccati-Differentialgleichung-Differentialgleichung* .

Sie ist auf $\widetilde{J} \times \mathbb{R}$ definiert, und es gilt die Eindeutigkeit. Für $r = 0$ ist sie eine Bernoulli-Differentialgleichung. Ist $r \neq 0$ und kennt man eine spezielle Lösung f_0 , so kann man alle anderen Lösungen durch die Substitution

$$g = \frac{1}{f - f_0}$$

bestimmen. Man hat sich auf die Differentialgleichung

$$g' = -(2 \cdot p \cdot f_0 + q) \cdot g - p$$

zurückgeführt.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$f' = f^2 + 2 \cdot \mathrm{id} \cdot f + 2 \; .$$

Beachten Sie, daß $-\frac{1}{\mathrm{id}}$ eine Lösung ist und benutzen Sie die Funktion

$$E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_0^x e^{t^2} \, dt \; .$$

12.5 Der Fixpunktsatz

DEFINITION Seien X eine Menge und $\Phi : X \longrightarrow X$ eine Abbildung. Ein Element $\xi \in X$ heißt *Fixpunkt* von Φ , wenn $\Phi(\xi) = \xi$ gilt.

Viele Gleichungen kann man in die Form einer Fixpunktgleichung bringen. Die Existenz eines Fixpunktes kann man mit einer sehr allgemeinen Methode im Rahmen der metrischen Räume oft nachweisen :

SATZ (Fixpunktprinzip) *Für einen gegebenen Punkt $x_0 \in X$, betrachtet man die durch*

$$x_{k+1} := \Phi(x_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

induktiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ist X ein metrischer Raum, $\Phi : X \longrightarrow X$ stetig und konvergiert diese Folge gegen $\xi \in X$, dann ist ξ ein Fixpunkt von Φ .

Dieses Verfahren nennt man *Methode der sukzessiven Approximationen* . Das Problem ist die Konvergenz der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert man die Abbildungen $\Phi^k : X \longrightarrow X$ durch

$$\overset{0}{\Phi} := \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad \overset{k+1}{\Phi} := \Phi \circ \overset{k}{\Phi} = \overset{k}{\Phi} \circ \Phi \ .$$

Es gilt dann

$$x_k = \overset{k}{\Phi}(x_0) \ .$$

Falls die zu lösende Gleichung von einem Parameter abhängt und genau eine Lösung für jeden Wert dieses Parameters besitzt, kann man sich fragen, ob diese Lösung stetig von diesem Parameter abhängt.

Sei $\Phi : X \times Y \longrightarrow X$ eine Abbildung. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert man die Abbildungen

$$\overset{k}{\Phi} : X \times Y \longrightarrow X$$

durch

$$\overset{0}{\Phi}(x,y) := x \quad \text{und} \quad \overset{k+1}{\Phi}(x,y) := \Phi\left(\overset{k}{\Phi}(x,y), y\right) = \overset{k}{\Phi}(\Phi(x,y), y) \ .$$

Man kann auch schreiben

$$\overset{0}{\Phi} := \mathrm{pr}_1 \quad \text{und} \quad \overset{k+1}{\Phi} := \Phi \circ \left(\overset{k}{\Phi}, \mathrm{pr}_2\right) = \overset{k}{\Phi} \circ (\Phi, \mathrm{pr}_2) \ .$$

Mit Φ sind auch alle $\overset{k}{\Phi}$ stetig. Die Abbildung $\overset{0}{\Phi}$ ist 1-lipschitzstetig bzgl. x .

HAUPTSATZ (von Banach-Caccioppoli) *Seien X ein vollständiger nicht-leerer metrischer Raum und $\Phi : X \times Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\overset{k}{\Phi}$ q_k-lipschitzstetig bzgl. x ist, und es gilt*

$$\sum_{l=0}^{\infty} q_l < \infty \ .$$

Dann besitzt für jedes $y \in Y$ *die Abbildung* $\Phi(\cdot, y)$ *genau einen Fixpunkt* $\xi(y) \in X$ *, und für jedes* $x_0 \in X$ *konvergiert die Folge der sukzessiven Approximationen* $\left(\overset{k}{\Phi}(x_0, y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* $\xi(y)$ *. Zusätzlich gilt*

$$d_X\left(\overset{k}{\Phi}(x_0, y), \xi(y)\right) \leqslant \left(\sum_{l=k}^{\infty} q_l\right) \cdot d_X(x_0, \Phi(x_0, y)) \ ,$$

und die Abbildung der Fixpunkte

$$\xi : Y \longrightarrow X : y \longmapsto \xi(y)$$

ist stetig.

BEISPIEL 1 Ist Φ q-lipschitzstetig (bzgl. x) mit $q < 1$, dann sind die Voraussetzungen des Satzes von Banach-Caccioppoli erfüllt; man spricht dann vom *Banachschen Fixpunktsatz* und sagt, daß Φ eine (strikte) *Kontraktion* ist.

BEISPIEL 2 Das Newtonverfahren ist ein Spezialfall der Methode der sukzessiven Approximation. Ist nämlich J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f' \neq 0$ überall, so ist $f(x) = 0$ zu

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

äquivalent. Definiert man

$$\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

und ist $x_0 \in J$, so ist die Folge der sukzessiven Approximation $\left(\overset{k}{\Phi}(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ die des Newtonverfahrens, falls $\Phi(J) \subset J$ gilt. Man beachte aber, daß Hauptsatz 8.14 und 8.15 nicht aus dem Hauptsatz von Banach-Caccioppoli folgt.

Die Gleichung $f(x) = 0$ kann man auch lösen, indem man sie in der äquivalenten Form

$$x - f(x) = x$$

schreibt. Man betrachtet also die Abbildung

$$\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x - f(x) \ .$$

Ist $\Phi(J) \subset J$ und gilt

$$q := \sup\nolimits_{x\in J} |1 - f'(x)| < 1 \ ,$$

so ist Φ q-lipschitzstetig, und f besitzt genau eine Nullstelle in J .

12.6 Globale Existenzsätze

LEMMA *Seien D eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige Abbildung, J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ mit $\operatorname{Gr} f \subset D$ und $(t, \xi) \in D$.*

Genau dann ist f differenzierbar und Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

wenn f stetig und Lösung der Integralgleichung

$$f(t) = \xi + \int_\tau^t F(s, f(s)) \, ds \quad \text{für alle } t \in J$$

ist.

HAUPTSATZ (von Picard-Lindelöf) *Sind D eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$,*

$$F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine stetige Abbildung, $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\tau \in [a, b]$, so definiert man

$$X := \{ g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}^n) \mid \operatorname{Gr} g \subset D \} \ ,$$

und für alle $t \in [a, b]$

$$Y_t := \{ z \in \mathbb{K}^n \mid (t, z) \in D \} \ .$$

Man nehme an, daß folgende Eigenschaften erfüllt sind :

(i) Es gilt $X \neq \emptyset$.

(ii) Für alle $t \in [a, b]$ ist Y_t in $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen.

(iii) Für alle $\xi \in Y_\tau$ und alle $g \in X$ gilt

$$\operatorname{Gr} \Phi(g, \xi) \subset D \ ,$$

wobei

$$\Phi(g, \xi)(t) := \xi + \int_\tau^t F(s, g(s)) \, ds \quad \text{für alle } t \in [a, b] \ .$$

Falls F q-lipschitzstetig bzgl. z für ein $q \in \mathbb{R}_+$ ist, so existiert für jedes $\xi \in Y$, genau eine Lösung $f_\xi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

die stetig bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,[a,b]}$ von ξ abhängt.

Man beachte, daß man die Resultate in §10 über gleichmäßige Konvergenz auf Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^n$, oder sogar in einem Banachraum, verallgemeinern kann. Insbesondere ist die Menge $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}^n)$ der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ mit Werten in $\mathbb{K}^n$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \ ,$$

ein Banachraum.

KOROLLAR (Stetige Abhängigkeit bzgl. der Anfangsbedingung) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $F : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft : Für jedes Intervall $[a,b] \subset J$ existiert ein $q \in \mathbb{R}_+$, so daß die Funktion F q-lipschitzstetig bzgl. z auf $[a,b] \times \mathbb{K}^n$ ist.*

Für alle $\tau \in J$ und $\xi \in \mathbb{K}^n$ existiert dann genau eine Lösung $f_\xi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems

$$f' = F(\cdot, f) \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \xi \ .$$

Diese Lösung, präziser ihre Einschränkung auf jedem Intervall $[a,b] \subset J$, hängt stetig von ξ ab.

Allgemeiner gilt das

KOROLLAR (Stetige Abhängigkeit bzgl. einer Störung von F) *Sei $\widetilde{Y}$ eine Teilmenge von $\mathcal{C}^b(D, \mathbb{K}^n)$. Man nehme an, daß $F \in \widetilde{Y}$ und ersetzt die Bedingung (iii) durch*

(iv)Für alle $\xi \in Y_\tau$ und $G \in \widetilde{Y}$ gilt

$$\operatorname{Gr} \Phi(g, \xi, G) \subset D \ ,$$

wobei

$$\Phi(g, \xi, G)(t) := \xi + \int_\tau^t G(s, g(s)) \, ds \quad \textit{für alle } t \in [a,b] \ .$$

Existiert ein $q \in \mathbb{R}_+$, so daß jedes $G \in \widetilde{Y}$ q-lipschitzstetig bzgl. z ist, dann existiert für jedes $\xi \in Y$ und $G \in \widetilde{Y}$ genau eine Lösung $f_{\xi,G} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems

$$f' = G(\cdot, f) \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

die stetig von ξ und G abhängt.

BEMERKUNG Will man die Einschränkung $\widetilde{Y} \subset \mathcal{C}^b(D, \mathbb{K}^n)$ fallen lassen und den üblichen Fall $\widetilde{Y} \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{K}^n)$ behandeln, so muß man eine Topologie einführen, die von einer Metrik und nicht von einer Norm erzeugt ist. Man kann auch eine Folge von Normen betrachten. Dies führt zur Theorie der lokal konvexen Vektorräume.

12.7 Vektorwertige lineare Differentialgleichungen erster Ordnung : homogener Fall

Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $A : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n)$, $b : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen. Die Differentialgleichung

$$f' = Af + b$$

definiert durch

$$F : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n : (t, z) \longmapsto A(t)\, z + b(t)$$

heißt *linear* , sowie *homogen* falls $b = 0$ und *inhomogen* sonst.

Für alle Intervalle $[a, b] \subset J$ gilt

$$|F(t, u) - F(t, v)| \leqslant q \cdot |u - v|$$

für alle $t \in [a, b]$ und $u, v \in \mathbb{K}^n$, wobei

$$q := \sup\nolimits_{t\in[a,b]} \|A(t)\| \ .$$

HAUPTSATZ *Für alle $\tau \in J$ und $\xi \in \mathbb{K}^n$ besitzt das Anfangswertproblem*

$$f' = Af + b \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \xi$$

genau eine Lösung, die auf J definiert ist.

KOROLLAR (Homogener Fall) *Für alle $\xi \in \mathbb{K}^n$ sei $f_\xi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems*

$$f' = Af \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \xi \ .$$

Die Abbildung

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n) : \xi \longmapsto f_\xi$$

ist linear, injektiv und ihr Bild ist die Menge der Lösungen der homogenen Differentialgleichung $f' = Af$.

Insbesondere ist diese Menge ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$ der Dimension n .

Sei $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Folge in $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$. Setzt man

$$\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n) : t \longmapsto (\varphi_1(t), .., \varphi_n(t)) \ ,$$

so gilt

$$\Phi' = (\varphi_1', \ldots, \varphi_n') \quad \text{und} \quad A\Phi = (A\varphi_1, \ldots, A\varphi_n) \ ;$$

dies zeigt :

SATZ *Die φ_j sind genau dann Lösung von $f' = Af$, wenn gilt*

$$\Phi' = A\Phi \ .$$

Sei $\tau \in J$ *. Genau dann ist* $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ *eine Basis des Vektorraumes der Lösungen von* $f' = Af$ *, wenn* $\Phi' = A\Phi$ *und die Vektoren* $\left(\varphi_j(\tau)\right)_{j=1,\ldots,n}$ *linear unabhängig sind, d.h.*

$$\det \Phi(\tau) \neq 0 \ .$$

DEFINITION Ist $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ eine Basis des Vektorraumes der Lösungen von $f' = Af$, so sagt man, es sei ein *Fundamentalsystem* von Lösungen. Die Funktion $\det \Phi$ heißt *Wronski-Determinante* .

Z.B. wenn $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$ bezeichnet, ist $\left(f_{e_j}\right)_{j=1,\ldots,n}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen, da

$$\Phi(\tau) = \mathrm{Id} \ .$$

BEMERKUNG Kennt man ein Fundamentalsystem von Lösungen, so kann man jede Lösung des Anfangswertproblems explizit schreiben :

Für $\xi \in \mathbb{K}^n$, gilt

$$f_\xi = \Phi \circ \Phi(\tau)^{-1} \xi \ .$$

12.8 Vektorwertige lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir untersuchen jetzt der Fall, wo A eine konstante Matrix-wertige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Wir erinnern daran, daß das Spektrum $\operatorname{Sp} A$ von A die Menge der *Eigenwerte* von A ist, d.h. die Menge der $\lambda \in \mathbb{K}$, für die $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ nicht invertierbar ist oder mit

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\} \ ,$$

oder für die λ eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms* ist, d.h.

$$\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = 0 \ .$$

Für alle $\mu \in \mathbb{K}$ existiert eine kleinste natürliche Zahl $q(\mu) \in \mathbb{N}$, so daß

$$\operatorname{Ker}(A - \mu \cdot \mathrm{Id})^{q(\mu)+1} = \operatorname{Ker}(A - \mu \cdot \mathrm{Id})^{q(\mu)} \ .$$

Es gilt

$$\lambda \in \operatorname{Sp} A \quad \Leftrightarrow \quad q(\lambda) > 0 \ .$$

Man sagt, daß $q(\lambda)$ die *Ordnung* , daß $\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ der *Eigenraum* und daß

$$v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$$

ein *Eigenvektor* von λ ist. Die ganze Zahl $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ heißt *geometrische Multiplizität* von λ .

Man nennt $\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$ den *Hauptraum* und

$$v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \setminus \{0\}$$

einen *Hauptvektor* zu λ . Die ganze Zahl $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$ heißt *algebraische Multiplizität* von λ .

HAUPTSATZ *Kann man das charakteristische Polynom in lineare Terme über $\mathbb{K}$ zerlegen, d.h.*

$$\det(A - \mu \cdot \mathrm{Id}) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (\lambda - \mu)^{m(\lambda)} \ ,$$

z.B. falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann gilt

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \quad \text{und} \quad m(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \ .$$

Insbesondere existiert eine Basis von $\mathbb{K}^n$, die aus Hauptvektoren $(v_{\lambda,k})_{\lambda,k}$ besteht, wobei $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ und $k = 1, \ldots, m_\lambda$.

Praktisch bestimmt man die Haupträume durch Angabe einer Basis in diesen Räumen. Man prüft meistens sehr leicht, daß diese Hauptvektoren eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden.

SATZ *Ist v ein Hauptvektor von A zum Eigenwert λ , dann ist*

$$\varphi_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n : t \longmapsto e^{\lambda \cdot t} \cdot \sum_{j=0}^{q(\lambda)-1} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j v$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = Af \quad \textit{und} \quad f(0) = v \ .$$

SCHOLIE (Komplexer Fall) *Allgemeiner können wir den Fall betrachten in dem man das charakterische Polynom in lineare Faktoren über* $\mathbb{K}$ *zerlegen kann.*

Der Hauptsatz zeigt, daß es eine Basis von Hauptvektoren $(v_{\lambda,k})_{\lambda,k}$ mit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ und $k = 0, \ldots, m_\lambda$ existiert. Die zugehörigen Funktionen $\varphi_{\lambda,k} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ bilden also ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $f' = Af$, da

$$\det \Phi(0) = \det (v_{\lambda,k})_{\lambda,k} \neq 0 \ .$$

Um das Anfangswertproblem

$$f' = Af \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi$$

zu lösen, zerlegt man ξ in der Basis $(v_{\lambda,k})_{\lambda,k}$ in der Form

$$\xi = \sum_{\lambda,k} c_{\lambda,k} \cdot v_{\lambda,k} \ .$$

Dann ist

$$f := \sum_{\lambda,k} c_{\lambda,k} \cdot \varphi_{\lambda,k}(\cdot - \tau)$$

eine Lösung dieses Problems.

SCHOLIE (Reeller Fall) *Die Matrix* A *ist also reell und wir nehmen an, daß man das charakterische Polynom nicht in lineare Faktoren über* $\mathbb{R}$ *zerlegen kann.*

Wir betrachten A als komplexe Matrix. Nach obiger Methode exitiert ein Fundamentalsystem von komplexen Lösungen. Kann man daraus ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen konstruieren ?

Für jeden komplexen Eigenwert λ von A , ist auch $\overline{\lambda}$ einen Eigenwert und es gilt $m(\lambda) = m\left(\overline{\lambda}\right)$. Zusätzlich gilt für $v \in \mathbb{C}^n$

$$(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^q \, v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^q \overline{v} = 0 \ ,$$

wobei $\overline{v}$ den Vektor mit den komplex-konjugierten Komponenten von v bezeichnet. Dies zeigt, daß $q(\lambda) = q\left(\overline{\lambda}\right)$ und

$$\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \longrightarrow \operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n} \left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^{q\left(\overline{\lambda}\right)} : v \longmapsto \overline{v}$$

eine Bijektion ist.

Ist λ reeller Eigenwert, so ist $\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$ unter $v \longmapsto \overline{v}$ stabil und schreibt man

$$v = \operatorname{Re} v + i \cdot \operatorname{Im} v \ ,$$

mit

$$\operatorname{Re} v := \frac{1}{2} \cdot (v + \overline{v}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} v := \frac{1}{2i} \cdot (v - \overline{v}) \ ,$$

so folgt

$$\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} = \operatorname{Ker}_{\mathbb{R}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} + i \cdot \operatorname{Ker}_{\mathbb{R}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \ .$$

Wählt man eine Basis $(v_{\lambda,k})_k$ in $\operatorname{Ker}_{\mathbb{R}^n}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$, die aus reellen Hauptvektoren besteht, so sind die zugehörigen Lösungen reell.

Ist λ ein komplexer Eigenwert mit $\operatorname{Im}\lambda > 0$ und ist $(v_{\lambda,k})_k$ eine Basis von

$$\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \ ,$$

dann ist $(\overline{v}_{\lambda,k})_k$ eine Basis von $\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n}\left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^{q(\overline{\lambda})}$. Somit ist

$$(\operatorname{Re} v_{\lambda,k})_k \cup (\operatorname{Im} v_{\lambda,k})_k$$

eine Basis aus reellen Vektoren von

$$\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \oplus \operatorname{Ker}_{\mathbb{C}^n}\left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^{q(\overline{\lambda})} \ ,$$

die aber keine Hauptvektoren mehr sind. Ist $\varphi_{\overline{\lambda},k}$ die zu $\overline{v}_{\lambda,k}$ gehörigen Lösung, so gilt

$$\varphi_{\overline{\lambda},k} = \bar{\varphi}_{v,k} \ .$$

Durch Linearität stimmen die zu $\operatorname{Re} v_{\lambda,k}$ und $\operatorname{Im} v_{\lambda,k}$ gehörigen Funktionen mit

$$\operatorname{Re}\varphi_{\lambda,k} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\varphi_{\lambda,k}$$

überein und sind reelle Lösungen.

Ingesamt haben wir eine reelle Basis von $\mathbb{K}^n$ konstruiert; die zugehörigen Funktionen bilden also ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen.

Das Anfangswertproblem löst man wie im komplexen Fall.

BEMERKUNG Bei der Konstruktion der Basis aus Hauptvektoren in $\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$ wählt man diese sukzessiv in der wachsenden Folge

$$\left(\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^q\right)_{q=1,\ldots,q(\lambda)} \ .$$

Ist $v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^q$ so ist

$$\varphi_v(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \sum_{j=0}^{q-1} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \, v \ .$$

BEISPIEL 1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Es ist

$$\det(A - \mu \cdot \mathrm{Id}) = (-1 - \mu) \cdot (3 - \mu)^2 \ ,$$

also $\operatorname{Sp} A = \{-1, 3\}$. Man erhält

$$\operatorname{Ker}(A + \mathrm{Id}) = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

da

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot z_1 \\ 0 \\ 4 \cdot z_3 \end{pmatrix} = 0$$

zu $z_1 = z_3 = 0$ äquivalent ist. Analog ist

$$\operatorname{Ker}(A - 3 \cdot \mathrm{Id}) = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \cdot z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

zu $z_2 = z_3 = 0$ äquivalent ist. Schließlich gilt

$$\operatorname{Ker}(A - 3 \cdot \mathrm{Id})^2 = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \cdot z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

zu $z_2 = 0$ äquivalent ist. Dies zeigt, daß die kanonische Basis von $\mathbb{K}^3$ aus Hauptvektoren besteht. Die drei Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi_{-1,1}(t) := e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_{3,1}(t) := e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi_{3,2}(t) := e^{3t} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = e^{3t} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen.

BEISPIEL 2 Die Matrix zum System von linearen Differentialgleichungen

$$f_1' = f_2 \quad \text{und} \quad f_2' = -f_1$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es gilt

$$\det(A - \mu \cdot \mathrm{Id}) = \mu^2 + 1 ,$$

also

$$\operatorname{Sp} A = \{\pm i\} .$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Ker}(A - i \cdot \mathrm{Id}) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} ,$$

da

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \cdot z_1 + z_2 \\ -z_1 - i \cdot z_2 \end{pmatrix} = 0$$

zu $z_2 = i \cdot z_1$ äquivalent ist. Somit ist

$$\operatorname{Ker}(A + i \cdot \mathrm{Id}) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

Ein Fundamentalsystem von komplexen Lösungen auf $\mathbb{R}$ ist also durch

$$\varphi_i(t) = e^{it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_{-i}(t) = e^{-it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

gegeben. Damit ist

$$\operatorname{Re} \varphi_i(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + e^{-it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

und

$$\operatorname{Im} \varphi_i(t) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - e^{-it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} .$$

ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen.

12.9 Vektorwertige lineare Differentialgleichungen erster Ordnung : inhomogener Fall

Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $A : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n)$ und $b : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen. Wir bezeichnen mit Σ_b die Teilmenge von $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$ der Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $f' = Af + b$.

Σ_0 ist der Untervektorraum der Lösungen der homogenen Differentialgleichung $f' = Af$.

SATZ *Sei $f_0 \in \Sigma_b$ eine spezielle Lösung von $f' = Af + b$. Genau dann ist f eine Lösung dieser Gleichung, wenn $f - f_0$ eine Lösung von $f' = Af$. Mit anderen Worten gilt*

$$\Sigma_b = f_0 + \Sigma_0 \ ,$$

und Σ_b ist ein affiner Unterraum von $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$.

Somit ist die Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung auf die Lösung der homogenen und die Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen zurückgeführt. Letztere wird mit Hilfe eines Ansatzes, die sogenannte *Methode der Variation der Konstanten* , bestimmt.

Man beachte, daß jede Lösung von $f' = Af$ der Gestalt

$$f = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \varphi_j = \Phi v \quad \text{für ein } v \in \mathbb{K}^n$$

ist, wobei $\Phi = (\varphi_j)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen ist. Man definiert

$$\overset{-1}{\Phi} : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n) : t \longmapsto \Phi(t)^{-1}$$

und macht den Ansatz

$$f = \Phi g$$

mit $g : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$, d.h. $g = \overset{-1}{\Phi} f$. Daraus ergibt sich eine spezielle Lösung f_0 in der Form

$$f_0(t) := \Phi(t) \int_{\tau}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s) \, ds \ .$$

BEISPIEL Man betrachte das System von inhomogenen linearen Differentialgleichungen

$$f_1' = f_2 + \cos \quad \text{und} \quad f_2' = -f_1 + \sin \ ,$$

d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \ .$$

Nach dem Beispiel 12.8.2 gilt

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \quad , \text{also} \quad \overset{-1}{\Phi} = \Phi^{\intercal} \ .$$

Daraus folgt

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \cdot \cos t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} \ ;$$

somit ist

$$f_0\left(t\right) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \cdot \cos t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

eine spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung ist dann

$$f\left(t\right) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$f\left(0\right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \ .$$

12.10 Vektorwertige Differentialgleichungen m-ter Ordnung

DEFINITION Seien D eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^m$ und

$$G = (G_j)_{j=1,\ldots,n} : D \longrightarrow \mathbb{K}^n : (t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}) \longmapsto G(t, z_0, z_1, .., z_{m-1}) \ .$$

Eine auf dem Intervall J von $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g = (g_j)_{j=1,\ldots,n} : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ heißt *Lösung der gewöhnlichen vektorwertigen Differentialgleichung m-ter Ordnung* oder des *Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen m-ter Ordnung*

$$g^{(m)} = G\left(\cdot, g, g^{(1)}, .., g^{(m-1)}\right) \quad \text{oder} \quad g_j^{(m)} = G_j\left(\cdot, g, g^{(1)}, \ldots, g^{(m-1)}\right) \ ,$$

falls g m-mal differenzierbar ist und

$$\left(t, g(t), g^{(1)}(t), .., g^{(m-1)}(t)\right) \in D \quad \text{und} \quad g^{(m)}(t) = G\left(t, g(t), g^{(1)}(t), .., g^{(m-1)}(t)\right)$$

für alle $t \in J$ erfüllt.

Diese Differentialgleichung m-ter Ordnung mit Werten in $\mathbb{K}^n$ kann man auf eine Differentialgleichung erster Ordnung aber mit Werten in $(\mathbb{K}^n)^m$ zurückführen. Man schreibt

$$z := (z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})^\intercal \in (\mathbb{K}^n)^m = \mathbb{K}^{n \cdot m}$$

mit $z_k \in \mathbb{K}^n$ für $k = 0, \ldots, m-1$ und definiert

$$F := (F_k)_{k=0,\ldots,m-1} : D \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^m$$

durch

$$F_k(t, z) := z_{k+1} \quad \text{für } k = 0, \ldots, m-2$$

und

$$F_{m-1}(t, z) := G(t, z) \ .$$

SATZ

(i) Ist $g : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ Lösung von

$$g^{(m)} = G\left(\cdot, g, g^{(1)}, .., g^{(m-1)}\right) \ , \qquad (*)$$

dann ist $f := \left(g, g^{(1)}, \ldots, g^{(m-1)}\right)^\intercal : J \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^m$ Lösung von

$$f' = F(\cdot, f) \ . \qquad (**)$$

(ii) Umgekehrt ist $f : J \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^m$ Lösung von $(**)$, dann ist $g := f_0$ Lösung von $(*)$.

BEISPIEL Bezeichnet x die Position eines Punktes der Masse m in $\mathbb{R}^3$, in einem von der Zeit, der Position und der Geschwindigkeit abhängigen Kräftefeldes

$$G : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (t, x, v) \longmapsto G(t, x, v)$$

mit $D \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^2$, so ist die Newtonsche Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} = G(t, x, \dot{x}) \ .$$

Die zugehörige Differentialgleichung erster Ordung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1 \\ \frac{1}{m} \cdot G(\cdot, f_0, f_1) \end{pmatrix} .$$

Der Physiker schreibt

$$\dot{x} = v \quad \text{und} \quad \dot{v} = \frac{1}{m} \cdot G(\cdot, x, v) .$$

BEMERKUNG Die Formel

$$|F(t,u) - F(t,v)|^2 = |u_1 - v_1|^2 + \ldots + |u_{m-1} - v_{m-1}|^2 + |G(t,u) - G(t,v)|^2$$

zeigt, daß F genau dann lipschitzstetig bzgl. z ist, wenn dies auch für G zutrifft.

12.11 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung schreibt man i.a. in der Form

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = b \ , \qquad (*)$$

wobei

$$a_0, \ldots, a_{n-1}, b : J \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen auf dem Intervall J in $\mathbb{R}$ sind. Definiert man

$$f_0 = g \quad , \quad f_1 = g' \quad , \ldots , \quad f_{n-1} = g^{(n-1)} \ ,$$

so führt sie zu dem System

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} . \qquad (**)$$

Die Abbildung

$$g \longmapsto \left(g^{(k)}\right)^{\intercal}_{k=0,\ldots,n-1} : \Sigma_b^* \longrightarrow \Sigma_b^{**}$$

ist eine Bijektion von der Menge der Lösungen Σ_b^* von $(*)$ auf diejenigen Σ_b^{**} von $(**)$. Diese Abbildung ist linear, also ist die Menge Σ_0^* der Lösungen der homogenen Differentialgleichung $(*)$ ein n-dimensionaler Vektorraum, und ein System $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ von Lösungen ist genau dann eine Basis von Σ_0^* , wenn gilt

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (\tau) \neq 0$$

für ein $\tau \in J$. In diesem Fall sagt man, daß $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ ein *Fundamentalsystem von Lösungen* von

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = 0$$

ist.

Ist g_0 eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $(*)$, dann ist

$$\Sigma_b^* = g_0 + \Sigma_0^* \ .$$

Man sieht auch, daß ein gut gestelltes Anfangswertproblem durch

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = b$$

und

$$g^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1$$

für ein $\tau \in J$ und $\xi \in \mathbb{K}^n$ gegeben ist.

Sind die Koeffizienten a_k konstant, so bezeichnen wir mit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ die Menge der Nullstellen und mit $m : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}^*$ die *Multiplizitätsfunktion* des *charakteristischen Polynom*

$$P : \mu \longmapsto \mu^n + a_{n-1} \cdot \mu^{n-1} + \ldots + a_0 = \prod_{\lambda \in \Lambda} (\mu - \lambda)^{m(\lambda)} \ .$$

SATZ *Die Funktionen*

$$\psi_{\lambda,k} : t \longmapsto t^k \cdot e^{\lambda t}$$

für $\lambda \in \Lambda$ *und* $k = 0, \ldots, m(\lambda) - 1$ *bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen von*

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = 0 \ .$$

BEMERKUNG 1 Sind die Koeffizienten reell, so geht man wie in 12.8 vor. Ist $\lambda \in \Lambda$ reell, so ist $\psi_{\lambda,k}$ auch reell. Ist $\lambda \in \Lambda$ mit $\operatorname{Im} \lambda > 0$, so betrachtet man die Funktionen

$$t \longmapsto \operatorname{Re} \psi_{\lambda,k}(t) = t^k \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda \cdot t} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda \cdot t)$$

und

$$t \longmapsto \operatorname{Im} \psi_{\lambda,k}(t) = t^k \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda \cdot t} \cdot \sin(\operatorname{Im} \lambda \cdot t) \ .$$

BEMERKUNG 2 Die inhomogene Differentialgleichung löst man, indem man eine spezielle Lösung durch Variation der Konstanten aus dem zugehörige System $(**)$ bestimmt. Es ist nicht möglich diese Methode ohne Matrizen zu formulieren. Es ist besser einen geeigneten Ansatz in der Differentialgleichung $(*)$ zu machen !

12.12 Das Reduktionsverfahren von d'Alembert

Wenn man eine spezielle Lösung einer linearen Differentialgleichung $f' = Af$ der Dimension n kennt, so kann man deren vollständige Lösung auf eine lineare Differentialgleichung der Dimension $n-1$ zurückführen.

Seien $f' = Af$ eine auf J definierte lineare Differentialgleichung und $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine spezielle Lösung. Man zerlegt $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n-1}$ und schreibt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & b \\ a & B \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi \end{pmatrix}$$

mit $a_{1,1}, \varphi_1 : J \longrightarrow \mathbb{K}$, $a, b^\intercal, \psi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ und $B : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}\left((n-1) \times (n-1)\right)$. Für alle $t \in J$ betrachten wir $a(t)$ als Spaltenvektor und $b(t)$ als Zeilenvektor !

Man betrachtet ein maximales Intervall $I \subset J$, so daß $\varphi_1 \neq 0$ auf I . Mit Hilfe des Ansatzes

$$f = \alpha \cdot \varphi + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

für $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{K}$ und $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^{n-1}$, ist f genau dann Lösung von $f' = Af$, wenn α und g Lösung von

$$\alpha' \cdot \varphi + \begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \ ,$$

sind, d.h. Lösung von

$$\alpha' = \frac{bg}{\varphi_1} \quad \text{und} \quad g' = Bg - \frac{bg}{\varphi_1} \cdot \psi = \tilde{B}g \ ,$$

wobei bg das Matrizenprodukt vom Zeilenvektor b mit dem Spaltenvektor g ist und

$$\tilde{B} := B - \frac{1}{\varphi_1} \cdot (b_j \cdot \psi)_{j=1,\ldots,n-1} = \left(a_{j,k} - \frac{1}{\varphi_1} \cdot a_{1,j} \cdot \varphi_k\right)_{j,k=2,\ldots,n-1} \ .$$

12.13 Lineare Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

Die vier folgenden Beispiele sind für Anwendungen in der Physik sehr wichtig.

Legendre-Differentialgleichung

$$\left(1-\mathrm{id}^2\right)\cdot f''-2\cdot \mathrm{id}\cdot f'+n\cdot(n+1)\cdot f=0 \quad \text{auf }]-1,1[$$

mit $n\in\mathbb{N}$.

Das *Legendre-Polynom* vom Grad n definiert durch

$$P_n:=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\partial^n\left[\left(\mathrm{id}^2-1\right)^n\right]$$

ist eine Lösung.

Hermite-Differentialgleichung

$$f''-2\cdot\mathrm{id}\cdot f'+2\cdot n\cdot f=0 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

mit $n\in\mathbb{N}$.

Das *Hermite-Polynom* vom Grad n definiert durch

$$H_n:=(-1)^n\cdot e^{\mathrm{id}^2}\cdot\partial^n\left[e^{-\mathrm{id}^2}\right]$$

ist eine Lösung.

Laguerre-Differentialgleichung

$$\mathrm{id}\cdot f''+(1-\mathrm{id})\cdot f'+n\cdot f=0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^*$$

mit $n\in\mathbb{N}$.

Das *Laguerre-Polynom* vom Grad n definiert durch

$$L_n:=e^{\mathrm{id}}\cdot\partial^n\left[\mathrm{id}^n\cdot e^{-\mathrm{id}}\right]$$

ist eine Lösung.

Bessel-Differentialgleichung

$$\mathrm{id}^2\cdot f''+\mathrm{id}\cdot f+\left(\mathrm{id}^2-\nu\right)\cdot f=0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^*$$

mit $\nu\in\mathbb{R}_+$.

Als Lösung hat man z.B. die *Bessel-Funktion* J_ν definiert durch

$$J_\nu:=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^\pi\cos\left(t\cdot\cos\theta\right)\cdot\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^1\left(1-s^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cdot\cos\left(t\cdot s\right)\,ds\ .$$

Um eine zweite linear unabhängige Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu bestimmen, führt die Reduktionsmethode von d'Alembert auf den Ansatz

$$f=\varphi\cdot g\ .$$

SATZ *Seien* J *ein Intervall in* $\mathbb{R}$, $a, b : J \longrightarrow \mathbb{K}$ *stetige Funktionen,* φ *eine spezielle Lösung der auf* J *definierten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$f'' + a \cdot f' + b \cdot f = 0 \ , \tag{$*$}$$

I *ein maximales Intervall in* J , *auf dem* $\varphi \neq 0$ *ist, und* $\tau \in I$.

Dann ist

$$f_\tau : t \longmapsto \varphi(t) \cdot \int_\tau^t \frac{1}{\varphi^2(s)} \cdot \exp\left(-\int_\tau^s a\right) ds : I \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine von φ *linear unabhängige Lösung auf* I .

Aufgabe Man benutze die Notationen des Satzes. Sei ζ eine Nullstelle von φ , also ein Endpunkt von I . Zeigen Sie mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes :

(a) φ ist streng monoton, wechselt also ihr Vorzeichen in der Nähe von ζ .

(b) f_τ läßt sich in ζ stetig fortsetzen.

(c) f_τ verschwindet in ζ nicht.

12.14 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Man schreibt sie in der Form

$$f'' + 2k \cdot f' + \omega_0^2 \cdot f = a \ ,$$

wobei $k, \omega_0 \in \mathbb{R}_+$ und $a : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist. Dies ist die *Differentialgleichung eines gedämpften und angeregten Oszillators* . Man nennt k den *Dämpfungskoeffizient* und ω_0 die *Kreisfrequenz* des Systems . Wir werden sehen, daß sie die Oszillationsfrequenz ohne Dämpfung ist.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynom $P(\mu) := \mu^2 + 2k \cdot \mu + \omega_0^2$ sind

$$-k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2} \ .$$

Homogene Differentialgleichung Man kann ein Fundamentalsystem (φ_1, φ_2) von Lösungen auf $\mathbb{R}$ angeben. Man muß vier Fälle unterscheiden :

(a) $k = 0$ und $\omega_0 \neq 0$: *Oszillation mit Kreisfrequenz* ω_0 .

$$\varphi_1(t) := \cos \omega_0 t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) := \sin \omega_0 t$$

(b) $0 < k < \omega_0$: *Gedämpfte Oszillation* .

$$\varphi_1(t) := e^{-kt} \cdot \cos \omega t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) := e^{-kt} \cdot \sin \omega t$$

mit Kreifrequenz $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - k^2} < w_0$.

(c) $k = \omega_0$: *Grenzaperiodische Oszillation* .

$$\varphi_1(t) := e^{-kt} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) := t \cdot e^{-kt} \ .$$

(d) $k > \omega_0$: *Aperiodische Oszillation* .

$$\varphi_1(t) := e^{-(k+d)\cdot t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) := e^{-(k-d)\cdot t}$$

mit $d := \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$. Es ist $k \pm d > 0$.

Inhomoge Differentialgleichung Wir betrachten das spezielle Anfangswertproblem :

$$f'' + 2k \cdot f' + \omega_0^2 \cdot f = a \cdot \cos \omega_1 t \quad \text{und} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

mit $0 \leqslant k < \omega_0$ und $a \neq 0$.

Man sucht zuerst eine spezielle Lösung der Form

$$f(t) = c \cdot e^{\mu t}$$

der Differentialgleichung

$$f'' + 2k \cdot f' + \omega_0^2 \cdot f = a \cdot e^{i\omega_1 t} \ . \tag{$*$}$$

Zuerst setzt man voraus, daß

$$P(i\omega_1) = -\omega_1^2 + 2k\omega_1 \cdot i + \omega_0^2 \neq 0 \ ,$$

d.h. $k \neq 0$ oder $\omega_1 \neq \omega_0$. Eine spezielle Lösung von $(**)$ ist durch

$$\mu := i\omega_1 \quad \text{und} \quad c := \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2k\omega_1 \cdot i}$$

gegeben. Eine Lösung von $(*)$ ist dann

$$f_0(t) := \operatorname{Re} \frac{a \cdot e^{i\omega_1 t}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2k\omega_1 \cdot i} = \operatorname{Re} \frac{a \cdot (\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2k\omega_1 \cdot i) \cdot e^{i\omega_1 t}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2k\omega_1)^2} =$$

$$= \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2k\omega_1)^2} \cdot \left(\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) \cdot \cos \omega_1 t + 2k\omega_1 \cdot \sin \omega_1 t \right) .$$

Die Lösung unseres Anfangswertproblems $(*)$ ist also

$$f = f_0 - f_0(0) \cdot \varphi_1 - \frac{k \cdot f_0(0) + f_0'(0)}{\omega} \cdot \varphi_2 .$$

da

$$\varphi_1(0) = 1 \quad , \quad \varphi_1'(0) = -k \quad \text{und} \quad \varphi_2(0) = 0 \quad , \quad \varphi_2'(0) = \omega .$$

Die zwei folgenden Spezialfälle sind interessant :

(a) $k = 0$ und $\omega_1 \neq \omega_0$. Die Lösung ist dann

$$f(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot (\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t) =$$

$$= \frac{2a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \sin \left(\frac{\omega_0 + \omega_1}{2} \cdot t \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \cdot t \right) .$$

Ist $\omega_1 \simeq \omega_0$ so hat man einen Schwebungseffekt :

$$f(t) \simeq \frac{2a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \sin \left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \cdot t \right) \cdot \sin (\omega_0 \cdot t) .$$

Die Amplitude $\frac{2a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \sin \left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \cdot t \right)$ ist moduliert mit großer Periode.

(b) $\omega_1 = \omega_0$ und $k > 0$. Man hat fast Resonanz . Die Lösung ist

$$f_k(t) = \frac{a}{2k} \cdot \left(\frac{1}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t - \frac{1}{\omega} \cdot e^{-kt} \cdot \sin \omega t \right) .$$

Für k klein ist $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2} \simeq \omega_0$ und die Amplitude $\frac{a}{2k}$ groß. Für kleine Zeiten t heben sich die zwei Terme fast auf, und $f_k(t)$ ist klein. Dies ist nicht mehr der Fall für t groß, da der zweite Term sehr klein wird; $f_k(t)$ ist dann groß.

Ein Beispiel eines solchen Phänomen ist das Zusammenbrechen der hängenden Brücke von Tacoma am 7.11.1940, die am 1.7.1940 eingeweiht wurde !

Es bleibt der Fall $P(i\omega_1) = 0$, d.h. $k = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$. Man spricht von Resonanzfall . Die Lösung ist

$$f(t) = \frac{a}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t .$$

In diesem Fall divergiert die Amplitude mit t .

Man beachte, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = \lim_{k \to 0} f_k(t) .$$

12.15 Lokaler Existenzsatz

HAUPTSATZ *Sei* $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *eine stetige und bzgl.* z *lokale lipschitzstetige Abbildung, wobei* D *eine offene Teilmenge von* $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *ist.*

Das Anfangswertproblem

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi$$

besitzt lokal eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h. für alle $(\tau, \xi) \in D$ *existiert ein Intervall* $[a, b]$ *mit* $\tau \in \,]a, b[$ *und eine Funktion* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *, die Lösung des Problems ist.*

KOROLLAR *Für alle* $(\tau, \xi) \in D$ *existiert eine maximale Lösung* $f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *des Anfangswertproblems*

$$f' = F(\cdot, \xi) \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

d.h. für jede andere Lösung $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *dieses Problems gilt* $I \subset J$ *und* $g = f_{|I}$ *.*

Diese Lösung geht in D *von Rand zu Rand, d.h.* $f(t)$ *konvergiert nicht in* D *wenn* t *gegen* $\inf J$ *oder* $\sup J$ *strebt. Insbesondere ist* J *offen.*

BEMERKUNG Man kann zeigen, daß die Graphen der maximalen Lösungen der Differentialgleichung eine Partition von D bilden.