Kapitel 1

FORMALE THEORIEN

In diesem Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die formalen Theorien, die zur Fundierung der Mathematik dienen. Man redet von dem *syntaktischen Standpunkt* . Eine formale Theorie ist ein Modell eines Teiles der "Realität", dessen Interpretation als *semantischer Standpunkt* bezeichnet wird.

Um einige Punkte zu illustrieren, z.B. als Beispiel oder Übung, werden wir die reellen Zahlen benutzen, wie sie aus der Schule bekannt sind.

Fassung vom 27. November 2001

1.1 Formale Theorien

Ein *Ausdruck* ist eine endliche Folge von Zeichen aus einem *Alphabet* . Ein *wohlgeformter Ausdruck* ist ein Ausdruck, den man unter Benutzung endlich vieler gegebener Konstruktionsregeln erzeugt.

Eine *Deduktionsregel* ordnet manchen wohlgeformten Ausdrücken einen wohlgeformten Ausdruck zu, den man die *direkte Konsequenz* dieser Ausdrücke unter dieser Regel nennt.

Eine *formale Theorie* besteht aus endlich vielen Konstruktionsregeln und Deduktionsregeln, aus endlich vielen wohlgeformten Ausdrücken, den *expliziten Axiomen* , und eine endliche Zahl von *Axiomenschemata* , d.h. von Regeln, welche die *impliziten Axiome* erzeugen.

Ein *Beweis* ist eine Folge wohlgeformter Ausdrücke, so daß jeder Ausdruck dieser Folge ein (explizites oder implizites) Axiom, oder die direkte Konsequenz von vorigen Ausdrücken durch eine Deduktionsregel ist.

Ein *Theorem* oder *Satz* ist ein wohlgeformter Ausdruck, der zu einem Beweis gehört.

1.2 Logische Theorien oder Aussagenlogik

Eine Theorie heißt *logisch* , falls folgende Mindestbedingungen erfüllt sind :

(a) Ihr Alphabet enthält mindestens die logischen Zeichen $\neg$ und $\vee$, sowie Klammern. Ein Teil der Konstruktionsregeln dienen zur Bildung der sogenannten *Relationen* (oder *Aussagen*). Unter anderem gibt es folgende Regeln:

Sind A und B Relationen, so sind

R_1 $$\neg(A)$$

R_2 $$(A) \vee (B)$$

auch Relationen.

Zur Vereinfachung schreibt man zum Beispiel $\neg A \vee B$ anstelle von $(\neg(A)) \vee (B)$. Man führt folgende Abkürzungen ein:

$$A \Rightarrow B \quad : \quad \neg A \vee B$$

$$A \wedge B \quad : \quad \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \Leftrightarrow B \quad : \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \ .$$

(b) Man kann die Deduktionsregel *modus ponens* anwenden:

MP B ist die direkte Konsequenz der Relationen A und $A \Rightarrow B$.

Man bekommt sofort folgendes Metatheorem:

Syllogismus *Sind A und $A \Rightarrow B$ Theoreme, dann ist auch B ein Theorem.*

(c) Folgende Axiomenschemata gehören zur Theorie:
Sind A, B, C Relationen, dann sind

$L_1(A)$ $$(A \vee A) \Rightarrow A$$

$L_2(A, B)$ $$A \Rightarrow (A \vee B)$$

$L_3(A, B)$ $$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

$L_4(A, B, C)$ $$(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)]$$

implizite Axiome.

BEISPIEL 1 *Ist eine logische Theorie* widersprüchlich *, d.h. es gibt eine Relation A , so daß A und $\neg A$ Theoreme sind, dann ist jede Relation ein Theorem.*

BEISPIEL 2 (Kettenschluß) *Sind A, B, C Relationen und $A \Rightarrow B$ sowie $B \Rightarrow C$ Theoreme, dann ist $A \Rightarrow C$ ein Theorem.*

Aufgabe 1 *Falls A, B, C Relationen sind, dann sind folgende Relationen Theoreme:*

(i) $$A \Rightarrow A$$

(ii) $$A \vee \neg A$$

(iii) $$A \Rightarrow \neg\neg A$$

(iv) $$B \Rightarrow (A \vee B)$$

(v) $$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

(vi) $$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Aufgabe 2 *Sind A ein Theorem und B eine Relation, so sind $A \vee B$ und $B \Rightarrow A$ auch Theoreme.*

1.3 Interpretation einer logischen Theorie

Ein Theorem ist eine wahre Relation.

Hier ist die Interpretation der wichtigsten Relationen und ihre Wahrheitsbedingung:

$\neg A$	*nicht-A* : Negation	A ist falsch
$A \vee B$	A *oder* B : nicht-exklusive Disjunktion	mindestens eine der Relationen A, B ist wahr
$A \Rightarrow B$	A *impliziert* B : Implikation	A ist falsch oder B ist wahr
$A \wedge B$	A *und* B : Konjunktion	beide Relationen A, B sind wahr
$A \Leftrightarrow B$	A *ist zu* B *äquivalent* : Äquivalenz	die Relationen A, B sind entweder beide wahr oder beide falsch

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ kann man auch folgendermaßen ausdrücken :

Es gilt genau dann A , wenn B gilt.

1.4 Beweismethoden

Deduktionskriterium (J. Herbrand 1930) *Seien A, B Relationen. Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kann man annehmen, daß A wahr ist, und es genügt zu zeigen, daß B wahr ist.*

BEISPIEL 1 Der Kettenschluß (Beispiel 1.2.2) kann man mit Hilfe des Deduktionskriteriums einfacher beweisen.

Aufgabe 1 Beweisen Sie :

Falls B und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ Theoreme sind, so ist $A \Rightarrow C$ ein Theorem.

Beweis durch Widerspruch *Sei A eine Relation. Falls $\neg A$ einen Widerspruch impliziert, dann ist A wahr.*

BEISPIEL 2 *Ist A eine Relation, dann gilt $\neg\neg A \Rightarrow A$. Insbesondere sind die Relationen A und $\neg\neg A$ äquivalent.*

Kontraposition *Seien A, B Relationen. Dann gilt*

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \ .$$

Insbesondere sind die Relationen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ äquivalent.

BEISPIEL 3 Ist x eine rationale Zahl, dann gilt $x^2 \neq 2$.

Aufgabe 2 *Seien A, B, C Relationen.*

(i) ***Fallunterscheidung***

$$\textit{Gilt } A \vee B \ , \ A \Rightarrow C \textit{ und } B \Rightarrow C \ , \textit{ so gilt } C \ .$$

(ii) Gilt A und B , so gilt $A \wedge B$.

(iii) Es gilt $(A \wedge B) \Rightarrow A$ und $(A \wedge B) \Rightarrow B$.

(iv) Falls $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, so ist $A \Leftrightarrow B$, und umgekehrt.

(v) Falls $A \Leftrightarrow B$ gilt und A eine Teilrelation von C ist, so ist die Relation gebildet durch Ersetzen von A überall in C durch B äquivalent zu C .

(vi) ***Morgan-Regeln*** *Es gilt*

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

und

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \ .$$

Aufgabe 3 Sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$|x| := \begin{cases} x & \\ & \text{falls} \\ -x & \end{cases} \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ \\ x < 0 \end{matrix} \quad .$$

Beweisen Sie mit Hilfe der bekannten Rechenregeln in $\mathbb{R}$ die Aussagen

(a)
$$x^2 = |x|^2 \ .$$

(b)
$$x^2 = x \quad \Rightarrow \quad (x = 0 \vee x = 1) \ .$$

1.5 Theorien mit Quantoren oder Prädikatenkalkül

Eine logische Theorie heißt *mit Quantoren* , falls folgende zusätzliche Bedingungen erfüllt sind :

(a) Ihr Alphabet enthält zusätzlich den *Allquantor* $\forall$ und *Buchstaben* (oder *Variablen*) $x, y, \ldots$. Es gibt zwei Klassen von Konstruktionsregeln: die einen zur Bildung der Relationen (die man in diesem Rahmen auch *Prädikate* nennt) und die anderen zur Bildung der sogenannten *Terme* . Innerhalb dieser Regeln gibt es zusätzlich zu R_1 und R_2 folgende Regeln:

T_1 Ein Buchstabe ist ein Term.

T_2 Sind S, T Terme und x ein Buchstabe, so ist der wohlgeformte Ausdruck, der entsteht, indem man x überall in T durch S ersetzt, ein Term. Er wird mit $(S|x)\,T$ bezeichnet.

Ist A eine Relation, x ein Buchstabe und T ein Term, dann sind

R_3 $$\forall x\,(A)$$

R_4 $(T|x)\,A$, gebildet durch Ersetzen von $x$überall in A durch T

auch Relationen.

Man beachte, daß wir durch diese Regeln noch nicht in der Lage sind, komplexere Terme zu konstruieren.

Relationen und Terme enthalten Buchstaben. Bei Relationen des Typs $\forall x\ A$, was Teil einer komplizierteren Relation sein kann, sagt man, daß *x in A gebunden* ist. Eigentlich müßte dieser Buchstabe verschwinden. Praktisch vereinbart man, diesen Buchstaben durch einen noch nicht benutzten zu ersetzen, falls es bei der Anwendung von Konstruktionsregeln zu Kollisionen kommt. Die Buchstaben, die in den expliziten Axiomen vorkommen, heißen *Konstanten* der Theorie. Ein Buchstabe, der keine Konstante ist und der in A nirgendwo gebunden ist, heißt *frei in A* .

Man führt den *Existenzquantor* durch folgende Abkürzung ein:

$$\exists x\,(A) \quad : \quad \neg\forall x\,(\neg A)\ .$$

(b) Folgende Axiomenschemata gehören zur Theorie:

Sind A, B, C Relationen, x ein Buchstabe, der nicht in C vorkommt, und T ein Term, dann sind

$Q_1\,(A, x, T)$ $$(\forall x\ A) \Rightarrow (T|x)\,A$$

$Q_2\,(A, B, x)$ $$[\forall x\,(A \Rightarrow B)] \Rightarrow [(\forall x\ A) \Rightarrow (\forall x\ B)]$$

$Q_3\,(A, x, C)$ $$[\forall x\,(C \Rightarrow A)] \Rightarrow [C \Rightarrow (\forall x\ A)]$$

implizite Axiome.

(c) Man setzt voraus, daß alle Axiomenschemata folgende Bedingung erfüllen: sind A ein implizites Axiom, x ein freier Buchstabe in A und T ein Term, dann sind auch $(T|x)\,A$ und $\forall x\ A$ implizite Axiome. Man beachte, daß die Axiomenschemata Q_1 , Q_2 und Q_3 diese Bedingung erfüllen.

Man interpretiert die Terme als Objekte, welche Eigenschaften, ausgedrückt durch eine Relation, besitzen. Die Relationen $\forall x\ A$ und $\exists x\ A$ werden durch

$$\textit{für alle } x \textit{ gilt } A$$

und

$$\textit{es gibt ein } x \textit{ mit } A$$

ausgedrückt.

BEMERKUNG Ist A eine Relation, so ist $\neg\,(T|x)\,A$ mit $(T|x)\,\neg A$ identisch. Ebenso sind A, B Relationen, so ist $(T|x)\,(A \vee B)$ identisch mit $(T|x)\,A \vee (T|x)\,B$.

Verallgemeinerungsprinzip *Seien A eine Relation und x ein freier Buchstabe. Gilt A , dann gilt $\forall x\ A$.*

Sind insbesondere A ein Theorem, x ein freier Buchstabe in A und T ein Term, so ist $(T|x)\,A$ ein Theorem.

BEISPIEL 1 In Beispiel 1.4.2 haben wir gezeigt, daß

$$\forall x \left(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2\right) \ ,$$

d.h. für jede rationale Zahl x gilt $x^2 \neq 2$.

BEISPIEL 2 *Ist A eine Relation, T ein Term und x ein Buchstabe, dann gilt*

$$(T|x)\,A \Rightarrow \exists x\ A \ .$$

Methode der Hilfskonstante *Seien A, B Relationen und x ein Buchstabe, der nicht in B vorkommt. Wenn $\exists x\ A$ ein Theorem ist, und wenn man aus der Annahme A ist wahr, B beweisen kann, dann ist B ein Theorem.*

Aufgabe *Seien A, B Relationen und x, y Buchstaben.*

(i) *Ist $A \Rightarrow B$ ein Theorem, dann sind $\forall x\ A \Rightarrow \forall x\ B$ und $\exists x\ A \Rightarrow \exists x\ B$ auch Theoreme.*

(ii) *Es gilt*

$$\forall x\,(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x\ A) \wedge (\forall x\ B)$$

und

$$\exists x\ \ (A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x\ A) \vee (\exists x\ B)$$

(iii) *Kommt x in A nicht vor, dann gilt*

$$\forall x\ \ (A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee \forall x\ B)$$

und

$$\exists x\ \ (A \wedge B) \Leftrightarrow A \wedge \exists x\ B$$

(iv) *Es gilt*

$$\forall x\ \forall y\ A \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ A$$

und

$$\exists x \; \exists y \; A \Leftrightarrow \exists y \; \exists x \; A$$

(v) *Es gilt*

$$\exists x \; \forall y \; A \Rightarrow \forall y \; \exists x \; A \; ,$$

aber i.a. ist

$$\forall y \; \exists x \; A \Rightarrow \exists x \; \forall y \; A$$

kein Theorem.

1.6 Theorien mit Gleichungen

Eine Theorie mit Quantoren heißt *mit Gleichungen* , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) Ihr Alphabet enthält zusätzlich das *Gleichheitzeichen* $=$. Es gibt noch folgende Konstruktionsregel:

R_5 Sind x, y Buchstaben, dann ist $x = y$ eine Relation.

(b) Das explizite Axiom und das Axiomenschema gehören zur Theorie :

G_1 $$\forall x\,(x = x)$$

Ist A eine Relation , und sind x, y freie Buchstaben, dann ist

$G_2\,(A, x, y)$ $$(x = y) \Rightarrow [(x|y)\,A \Rightarrow A]$$

ein implizites Axiom.

Man führt folgende Abkürzung ein:

$$x \neq y \quad : \quad \neg\,(x = y) \ .$$

BEISPIEL Für jeden Term T gilt $T = T$.

Sind A eine Relation und x, y, z Buchstaben, wobei x in A frei ist und y, z in A nicht vorkommen, dann bedeutet die Relation

$$\forall y \forall z\,[(y|x)\,A \wedge (z|x)\,A \Rightarrow y = z]$$

es gibt höchstens ein x *mit* A . Man führt folgende Abkürzung ein:

$$\exists! x\ A \quad : \quad \exists x\ A \wedge \forall y \forall z\,[(y|x)\,A \wedge (z|x)\,A \Rightarrow y = z]$$

und sagt *es gibt genau ein* x *mit* A .

Einführung einer Konstanten Falls $\exists! x\ A$ wahr ist, führt man einen neuen Buchstaben a , der von den Buchstaben in A abhängt, die von x verschieden sind, und ein neues Axiom $(a|x)\,A$ ein. Dieses Axiom ist implizit wenn A Buchstaben enthält, die von x verschieden sind, explizit sonst. In dieser neuen Theorie ist a eine Konstante und es gilt

$$(x = a) \Leftrightarrow A \ .$$

Jedes Theorem in dieser Theorie besitzt eine Übersetzung in der alten, die den Buchstaben a entfernt und ein äquivalentes Theorem ist. Z.B. ist B eine Relation der alten Theorie und ist $(a|x)\,B$ ein Theorem in der neuen, so ist diese Relation äquivalent zu

$$\exists x\,(A \wedge B) \ .$$

Literatur

N. Bourbaki, *Théorie des ensembles,* Hermann, Paris, 1970.
E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic,* Van Nostrand.
A. Prestel, *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie,* Vieweg.