Kapitel 16

SATZ VON FUBINI UND DIE TRANSFORMATIONSFORMEL

Im folgenden sind X und Y metrische Räume,
oder allgemeiner topologische Hausdorffräume,
μ und ν sind Radon-Integrale auf X bzw. Y .

Fassung vom 24. Januar 2002

16.1 Zerlegung eines Radon-Integrals

DEFINITION Seien μ und ν Radon-Integrale auf X bzw. Y und $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ eine Familie von Radon-Integralen auf X , d.h. eine Abbildung $Y \longrightarrow \mathcal{M}_+(X)$. Wir nennen $\left(\mu_y\right)_{y\in Y}$ eine *Zerlegung* von μ bzgl. ν und schreiben

$$\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$$

wenn für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt

$$\mu(s) = \int^* \mu_y(s)\ d\nu(y) \ .$$

BEISPIEL 1 Für jedes Radonintegral μ auf X gilt

$$\mu = \int \varepsilon_y \, d\mu(y) \ .$$

BEISPIEL 2 Lebesgue-Integrale und Cavalieri-Prinzip.

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und λ_X und λ_Y die entspechenden Lebesgue-Integrale. Für jedes $y \in Y$ definiert die positive Linearform

$$\mathcal{K}(X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \lambda_X(\varphi(\cdot, y))$$

ein Radon-Integral $\lambda_{X,y}$ auf $X \times Y$. Man sagt auch, daß $\lambda_{X,y}$ das Bild von λ_X unter der Abbildung

$$j_y : x \longmapsto (x, y) : X \longrightarrow X \times Y$$

ist (vgl. 16.6 und 16.7). Es gilt

$$\lambda_{X\times Y} = \int \lambda_{X,y} \, d\lambda_Y(y) \ .$$

Analog gilt

$$\lambda_{X\times Y} = \int \lambda_{x,Y} \, d\lambda_X(x) \ ,$$

wobei $\lambda_{x,Y}$ das Bild von λ_Y unter der Abbildung ${}_xj : y \longmapsto (x, y) : Y \longrightarrow X \times Y$ ist.

BEMERKUNG 1 Für alle $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$ gilt

$$\lambda_{X,y}(s) = \lambda_X(s(\cdot, y)) \ .$$

Insbesondere folgt

$$\lambda^*_{X,y}\left(X \times Y \smallsetminus X \times \{y\}\right) = \lambda_{X,y}\left(1_{X\times Y \smallsetminus X\times\{y\}}\right) = \lambda_X\left(0\right) = 0\ .$$

Man sagt, daß $\lambda_{X,y}$ von $X \times \{y\}$ *getragen* wird. Weiter gilt

$$\lambda_{X,\diamond}\left(s\right) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X\times Y),\varphi\leqslant s} \int \varphi\left(x,\cdot\right)\, d\lambda_X\left(x\right) \in \mathcal{SK}\left(Y\right)\ .$$

SATZ *Sei $\mu = \int \mu_y \, d\nu\left(y\right)$ eine Zerlegung von μ . Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt*

$$\int^* f\ d\mu \geqslant \int^* \left(\int^* f\ d\mu_y\right) d\nu\left(y\right)\ .$$

HAUPTSATZ (Sukzessive Integration) *Sei $\mu = \int \mu_y \, d\nu\left(y\right)$ eine Zerlegung von μ .*

(i) Ist $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) μ-integrierbar, dann ist f μ_y-integrierbar für ν-fast alle $y \in Y$. Definiert man $\int f\ d\mu_y$ durch 0 in den y , für die f nicht μ_y-integrierbar ist, so ist die Funktion $\int f\ d\mu_\diamond$ ν-integrierbar, und es gilt

$$\int f\ d\mu = \int \left(\int f\ d\mu_y\right) d\nu\left(y\right)\ .$$

Ist f reell, dann sind die Funktionen $\int_* f\ d\mu_\diamond$ und $\int^* f\ d\mu_\diamond$ ν-integrierbar, und es gilt

$$\int f\ d\mu_\diamond = \int_* f\ d\mu_\diamond = \int^* f\ d\mu_\diamond \quad \nu - f.ü.\ .$$

(ii) Ist A eine μ-Nullmenge, dann ist A für ν-fast alle $y \in Y$ eine μ_y-Nullmenge.

BEMERKUNG 2 Im Falle des Produkts zweier Radon-Integrale, das wir in 16.3 behandeln werden, ist dieses Resultat der Hauptsatz von Fubini.

16.2 Integrabilitätssatz

Der vorige Hauptsatz gibt uns die Möglichkeit, das Integral einer Funktion f bzgl. μ durch sukzessive Integration zu berechnen, aber dafür muß man vorher wissen, daß f μ-integrierbar ist ! Nach dem Integrabilitätssatz 15.10 und Beispiel 15.12.1 muß f μ-meßbar und μ-moderat sein. Wir werden jetzt sehen, daß sich unter diesen notwendigen Bedingungen die Endlichkeit des Oberintegrals durch sukzessive Integration formulieren läßt.

HAUPTSATZ *Seien $\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$ eine Zerlegung von μ und f eine reelle oder komplexe μ-meßbare und μ-moderate Funktion auf X . Dann gilt*

(i) f ist μ_y-meßbar für ν-fast alle $y \in Y$. Die Funktion $\int^* |f| \, d\mu_\diamond$ ist ν-meßbar und es gilt

$$\int^* |f| \, d\mu = \int^* \left(\int^* |f| \, d\mu_y \right) d\nu(y) \ .$$

(ii) Insbesondere ist f genau dann μ-integrierbar, wenn f μ-meßbar ist und

$$\int^* \left(\int^* |f| \, d\mu_y \right) d\nu(y) < \infty$$

gilt.

(iii) Ist A eine μ-meßbare und μ-moderate Teilmenge und ist A eine μ_y-Nullmenge für ν-fast alle $y \in Y$, dann ist A eine μ-Nullmenge.

BEMERKUNG 1 Im Falle des Produkts zweier Radon-Integrale, das wir in 16.3 behandeln werden, ist dieses Resultat der Hauptsatz von Tonelli.

BEMERKUNG 2 Man kann in Bemerkung 16.3 sehen, daß man die μ-Meßbarkeitsvoraussetzung über f oder A nicht weglassen kann. Im Falle eines Integrals von Punktmassen verschwinden diese Schwierigkeiten (vgl. 16.9).

BEMERKUNG 3 Man kann auch zeigen mit Hauptsatz 15.9.i, daß für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$ die Funktion

$$\mu_\diamond(s) = \int^* s \, d\mu_\diamond$$

ν-meßbar ist.

16.3 Die Sätze von Fubini und Tonelli

Sind μ und ν zwei Radon-Integrale auf X bzw. Y , so kann man zeigen (vgl. 16.11), daß ein Radon-Integral $\mu \otimes \nu$ auf $X \times Y$ derart existiert, daß für alle $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$ gilt

$$\mu \otimes \nu (s) = \int^* \mu (s(\cdot, y))\, d\nu (y) = \int^* \nu (s(x, \cdot))\, d\mu (x) \ ,$$

d.h.

$$\mu \otimes \nu = \int \mu_{X,y}\, d\nu (y) = \int \nu_{x,Y}\, d\mu (x) \ .$$

Die Radon-Integrale $\mu_{X,y}$ und $\nu_{x,Y}$ auf $X \times Y$ sind die Bilder von μ bzw. ν unter den Abbildungen

$$j_y : x \longmapsto (x, y) : X \longrightarrow X \times Y \quad \text{und} \quad {}_x j : y \longmapsto (x, y) : Y \longrightarrow X \times Y \ ,$$

d.h. für alle $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$ gilt

$$\mu_{X,y}(s) := \mu (s(\cdot, y)) \quad \text{und} \quad \nu_{x,Y}(s) := \nu (s(x, \cdot)) \ .$$

Für alle $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt dann

$$\int^* f\, d\mu_{X,y} = \int^* f(\cdot, y)\, d\mu \quad \text{et} \quad \int^* f\, d\nu_{x,Y} = \int^* f(x, \cdot)\, d\nu \ .$$

In Beispiel 16.1.2 haben wir eigentlich gezeigt, falls X und Y offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, daß

$$\lambda_{X \times Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y$$

gilt.

Der Hauptsatz 16.1 über sukzessive Integrationen wird der

HAUPTSATZ (von Fubini) *Sei f eine reelle oder komplexe Funktion auf $X \times Y$, die $\mu \otimes \nu$-integrierbar ist.*

Dann sind für ν-fast alle $y \in Y$ bzw. für μ-fast alle $x \in X$ die Funktionen $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$ μ- bzw. ν-integrierbar. Die Funktionen

$$y \longmapsto \int f(\cdot, y)\, d\mu \quad \textit{und} \quad x \longmapsto \int f(x, \cdot)\, d\nu$$

— geeignet definiert — sind dann ν- bzw. μ-integrierbar, und es gilt

$$\int f\, d\mu \otimes \nu = \int \left(\int f(x, y)\, d\mu (x) \right) d\nu (y) = \int \left(\int f(x, y)\, d\nu (y) \right) d\mu (x) \ .$$

Der Integrabilitätssatz 16.2 wird der

HAUPTSATZ (von Tonelli) *Sei f eine reelle oder komplexe $\mu \otimes \nu$-moderate Funktion auf $X \times Y$.*

(i) Ist f $\mu \otimes \nu$-meßbar, so sind für ν-fast alle $y \in Y$ und μ-fast alle $x \in X$ die Funktionen $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$ μ- bzw. ν-meßbar.

Die Funktionen

$$y \longmapsto \int^* |f(\cdot, y)| \, d\mu \quad \text{und} \quad x \longmapsto \int^* |f(x, \cdot)| \, d\nu$$

sind ν- bzw. μ-meßbar, und es gilt

$$\int^* |f| \, d\mu \otimes \nu = \int^* \left(\int^* |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int^* \left(\int^* |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \ .$$

(ii) Insbesondere ist f genau dann $\mu \otimes \nu$-integrierbar, wenn f $\mu \otimes \nu$-meßbar ist und

$$\int^* \left(\int^* |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int^* \left(\int^* |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

gilt.

(iii) Ist A eine $\mu \otimes \nu$-meßbare und $\mu \otimes \nu$-moderate Menge und ist $A_y := \{x \in X \mid (x,y) \in A\}$ eine μ-Nullmenge für ν-fast alle $y \in Y$, oder ${}_xA := \{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$ ist eine ν-Nullmenge für μ-fast alle $x \in X$, dann ist A eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge.

BEMERKUNG Die $\mu \otimes \nu$-Meßbarkeit von f kann man nicht weglassen. Es gibt eine Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \ ,$$

deren Graph $\operatorname{Gr} f \subset [0,1]^2$ nicht $\lambda_{[0,1]} \otimes \lambda_{[0,1]}$-meßbar ist. Es kann sogar gelten

$$\int^* \left(\int^* 1_{\operatorname{Gr} f}(x,y) \, d\lambda_{[0,1]}(x) \right) d\lambda_{[0,1]}(y) = 1 \ ,$$

aber

$$\int^* \left(\int^* 1_{\operatorname{Gr} f}(x,y) \, d\lambda_{[0,1]}(y) \right) d\lambda_{[0,1]}(x) = 0$$

da der Graph über jedem x nur einen Punkt enthält.

Die Konstruktion von $\mu \otimes \nu$-meßbaren Funktionen benutzt oft den Hauptsatz 15.9.ii. Dafür muß man $\mu \otimes \nu$-Nullmengen konstruieren können, ohne im voraus zu wissen, daß sie $\mu \otimes \nu$-meßbar sind. Man könnte sonst den Satz von Tonelli (iii) benutzen !

LEMMA *Ist $N \subset X$ eine μ-Nullmenge und B eine ν-moderate Menge, so ist $N \times B$ eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge.*

DEFINITION Sind f und g reelle oder komplexe Funktionen auf X bzw. Y , so definiert man die Funktion $f \otimes g : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) durch

$$f \otimes g(x,y) := f(x) \cdot g(y) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } y \in Y \ .$$

KOROLLAR *Seien f und g reelle oder komplexe Funktionen auf X bzw. Y .*

(i) *Sind f und g μ- bzw. ν-integrierbar, dann ist $f \otimes g$ $\mu \otimes \nu$-integrierbar, und es gilt*

$$\int f \otimes g \; d\mu \otimes \nu = \left(\int f \; d\mu \right) \cdot \left(\int g \; d\nu \right) \; .$$

(ii) *Sind f und g μ- bzw. ν-meßbar, dann ist $f \otimes g$ $\mu \otimes \nu$-meßbar.*

BEISPIEL Seien $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ-meßbare Funktionen und $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine ν-meßbare Funktion. Dann ist die Menge

$$A := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \leqslant h(y) \leqslant g(x)\}$$

$\mu \otimes \nu$-meßbar, und setzt man

$$A_x := \{y \in Y \mid f(x) \leqslant h(y) \leqslant g(x)\} \; ,$$

so gilt

$$\mu \otimes \nu^* (A) = \int^* \nu^* (A_x) \; d\mu(x) \; .$$

Sind insbesondere $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f \leqslant g$, so ist die Menge

$$B := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

$\mu \otimes \lambda$-integrierbar, und es gilt

$$\mu \otimes \lambda(B) = \int g \; d\mu - \int f \; d\mu \; .$$

16.4 Fall von $\mathbb{R}^n$

DEFINITION Wir bezeichnen mit λ^n das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\lambda^n = \bigotimes_{j=1}^{n} \lambda \ ,$$

d.h. λ^n ist das Produkt von n Kopien des Lebesgue-Integrals auf $\mathbb{R}$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\lambda^{n+m} = \lambda^n \otimes \lambda^m \ .$$

BEISPIEL 1 Die abzählbaren Teilmengen sowie Hyperebenen und Spären in $\mathbb{R}^n$ sind λ^n-Nullmengen.

BEISPIEL 2 Seien $Q :=]0,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $s \in \mathbb{R}$. Es gilt $\lambda_Q = \lambda_{]0,1[} \otimes \lambda_{]0,1[}$. Die Funktion

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{(x+y)^s} : Q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

ist genau dann λ_Q-integrierbar, wenn $s < 2$. In diesem Fall gilt

$$\iint_Q^* \frac{1}{(x+y)^s} \, d(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 \cdot \ln 2 & & s = 1 \\ & \text{falls} & \\ \frac{2^{2-s}-2}{(1-s)(2-s)} & & s < 2 \text{ und } s \neq 1 \end{array} \right. .$$

BEISPIEL 3 Analog ist die Funktion

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^s} : Q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

genau dann λ_Q-integrierbar, wenn $s < 1$.

HAUPTSATZ (Partielle Integration) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ und $a, b \in J$. Dann gilt*

$$\int_a^b \partial F \cdot G = \Big[F \cdot G \Big]_a^b - \int_a^b F \cdot \partial G \ .$$

16.5 Die Transformationsformel

HAUPTSATZ *Seien X , Y offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : Y \longrightarrow X$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\Phi\left(|\det D\Phi| \cdot \lambda_Y\right) = \lambda_X \ ,$$

d.h.

$$\lambda_X = \int |\det D\Phi\,(y)| \cdot \varepsilon_{\Phi(y)}\, d\lambda_Y\,(y) \ .$$

KOROLLAR

(i) Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist

$$\int^* f\ d\lambda_X = \int^* f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi|\ d\lambda_Y \ .$$

(ii) Eine reell- oder komplexwertige Funktion f ist genau dann λ_X-integrierbar, wenn die Funktion $f \circ \Phi \cdot |Det\ D\Phi|$ λ_Y-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int f\ d\lambda_X = \int f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi|\ d\lambda_Y \ .$$

(iii) Eine reell- oder komplexwertige Funktion f auf X ist genau dann λ_X-meßbar, wenn $f \circ \Phi$ λ_Y-meßbar ist.

(iv) Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann eine λ_X-Nullmenge, wenn $\overset{-1}{\Phi}(A)$ eine λ_Y-Nullmenge ist.

16.6 Beispiele

BEISPIEL 1 Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine bijektive Transformation, d.h.

$$\Phi : x \longmapsto Ax + b$$

mit $A \in \mathbb{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int^* f(y)\ dy = |\det A| \cdot \int^* f(Ax + b)\ dx \ .$$

Insbesondere ist das Lebesgue-Integral unter orthogonalen Transformationen und Translationen invariant, d.h.

$$\int^* f(y)\ dy = \int^* f(Ax + b)\ dx \quad , \text{falls} \quad A \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R}) \ ,$$

und für alle $r \in \mathbb{R}^*$ gilt

$$\int^* f(y)\ dy = |r|^n \cdot \int^* f(rx)\ dx \ .$$

BEISPIEL 2 Sei $(v_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Folge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit

$$P[v_1, \ldots, v_n] := \left\{ x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot v_j \ \middle|\ 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1 \text{ für } j = 1, \ldots, n \right\}$$

das Parallelotop mit Seitenvektoren v_j .

Es gilt

$$\lambda^n(P[v_1, \ldots, v_n]) = |\det(v_1, \ldots, v_n)| \ .$$

BEMERKUNG Man hat

$$\Phi(y + [0, \varepsilon[^n) \simeq \Phi(y) + P[\varepsilon D\Phi(y) \cdot e_1, \ldots, \varepsilon D\Phi(y) \cdot e_n] \ ,$$

also

$$\lambda^n(\Phi(y + [0, \varepsilon[^n)) \simeq \lambda^n(\varepsilon \cdot P[D\Phi(y) \cdot e_1, \ldots, D\Phi(y) \cdot e_n]) =$$

$$= \varepsilon^n \cdot |\det D\Phi(y)| = |\det D\Phi(y)| \cdot \lambda^n(y + [0, \varepsilon[^n) \ .$$

Dies ist eine heuristische Begründung der Transformationsformel.

$|\det D\Phi| \cdot \lambda_Y$ heißt das *Volumenelement* bzgl. der *krummlinigen Koordinaten* , die durch Φ definiert sind.

BEISPIEL 3 Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.

Die Abbildung

$$\Phi_2 : \left]0,\infty\right[\times \left]-\pi,\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} : (r,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist ein Diffeomorphismus und $\det D\Phi_2\,(r,\varphi) = r$. Da $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ eine λ^2-Nullmenge ist, bekommt man folgende Transformationsformel

$$\iint_{\mathbb{R}^2}^{*} f\,(x,y)\ d\,(x,y) = \iint_{\left]0,\infty\right[\times\left]-\pi,\pi\right[}^{*} f\,(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\cdot r\ d\,(r,\varphi)\ .$$

BEISPIEL 4 Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$.

Die Abbildung

$$\Phi_3 : \left]0,\infty\right[\times \left]-\pi,\pi\right[\times \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R} : (\rho,\varphi,\vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi \\ \rho\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi \\ \rho\cdot\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

ist ein Diffeomorphismus und $\det\ D\Phi_3\,(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho^2\cdot\cos\ \vartheta$. Da $\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$ eine λ^3-Nullmenge ist, bekommt man folgende Transformationsformel

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}^{*} f\,(x,y,z)\ d\,(x,y,z) =$$

$$= \iiint_{\left]0,\infty\right[\times\left]-\pi,\pi\right[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}^{*} f\,(\rho\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi, \rho\cdot\sin\vartheta)\cdot\rho^2\cdot\cos\vartheta\, d\,(\rho,\varphi,\vartheta)\ .$$

BEISPIEL 5 Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$.

Die Abbildung

$$\Phi_n : \left]0,\infty\right[\times \left]-\pi,\pi\right[\times \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}$$

$$(\rho,\varphi_2,\ldots,\varphi_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\cos\varphi_{n-1}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_3\cdot\cos\varphi_2 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_4\cdot\cos\varphi_3\cdot\sin\varphi_2 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\cos\varphi_4\cdot\sin\varphi_3 \\ \rho\cdot\cos\varphi_n\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\sin\varphi_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho\cdot\sin\varphi_n \end{pmatrix}$$

ist ein Diffeomorphismus mit

$$\det D\Phi_n\,(\rho,\varphi_2,\ldots,\varphi_n) = \rho^{n-1}\cdot\cos^{n-2}\varphi_n\cdot\cos^{n-3}\varphi_{n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\ \varphi_3\ .$$

Zum Beispiel gilt

$$\lambda^n\,(\mathbb{B}^n\,(r)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot r^n\ .$$

Dabei wurde benutzt, daß

$$\int \cdots \int_{]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^{n-2}} \cos^{n-2}\varphi_n \cdot \cos^{n-3}\varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_3 \, d\left(\varphi_{2,} \ldots, \varphi_n\right) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ .$$

Später werden wir sehen (Beispiel 23.2), daß diese Zahl die Oberfläche der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$ ist.

BEISPIEL 6 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) ist genau dann *rotationsinvariant* (oder invariant unter orthogonale Transformationen), wenn eine Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) mit

$$f(x) = \widetilde{f}(|x|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

existiert.

Eine rotationsinvariante Funktion $f : x \longmapsto \widetilde{f}(|x|)$ ist genau dann λ^n-integrierbar, wenn die Funktion $r \longmapsto \widetilde{f}(r) \cdot r^{n-1}$ $\lambda_{]0,\infty[}$-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int f \, d\lambda^n = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \widetilde{f}(r) \cdot r^{n-1} \, dr \ .$$

Die Funktion $1_{\mathbb{B}^n(1)} \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s}$ ist genau dann λ^n-integrierbar, wenn $s < n$. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{B}^n(1)} \frac{1}{|x|^s} dx = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{(n-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ .$$

16.7 μ-dichte Familien von Funktionen

Wir werden jetzt Bedingungen an eine Familie $(\mu_y)_{y\in Y}$ angeben, so daß man ein Radon-Integral μ konstruieren kann, für das $(\mu_y)_{y\in Y}$ bzgl. eines Radon-Integrals ν eine Zerlegung ist.

DEFINITION Sei μ ein Radon-Integral auf X . Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{SK}_-(X)$ heißt *μ-dicht* , falls für alle $s \in \mathcal{SK}_+(X)$ gilt

$$\mu(s) = \sup\nolimits_{u\in\mathcal{U}, -u\leqslant s} -\mu(u) \ .$$

BEISPIEL Ist X lokal kompakt, dann ist $\mathcal{K}_-(X)$ μ-dicht.

LEMMA *Für jede kompakte Teilmenge K von X ist die Menge*

$$\left\{u \in \mathcal{SK}_-(X) \;\middle|\; u_{|K} \text{ ist stetig}\right\}$$

μ-dicht.

16.8 Integration einer Familie von Integralen

Im folgenden seien ν ein Radon-Integral auf Y und $\left(\mu_y\right)_{y \in Y}$ eine Familie von Radon-Integralen auf X . Für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$ setzen wir

$$\mu_\diamond(s) : y \longmapsto \mu_y(s) : Y \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} \ .$$

DEFINITION 1 Die Familie $\left(\mu_y\right)_{y \in Y}$ heißt *vernünftig ν-meßbar*, falls für alle kompakten Teilmengen L von Y und alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $L' \subset L$ existiert mit

(a) $\nu(L \smallsetminus L') \leqslant \varepsilon$.

(b) Es gibt eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{SK}_-(X)$, die für alle $z \in L'$ μ_z-dicht ist und so daß $\mu_\diamond(u)_{|L'}$ für alle $u \in \mathcal{U}$ stetig ist.

Sie heißt *vernünftig ν-integrierbar* , falls sie vernünftig ν-meßbar ist und falls für alle $x \in X$ ein $t \in \mathcal{SK}_+(X)$ existiert mit $t(x) > 0$ und

$$\int^* \mu_\diamond(t) \, d\nu < \infty \ .$$

BEISPIEL 1 Für jedes Radon-Integral μ ist die Familie $(\varepsilon_y)_{y \in X}$ vernünftig μ-integrierbar.

BEISPIEL 2 Ist X lokal kompakt, dann ist $\left(\mu_y\right)_{y \in Y}$ vernünftig ν-meßbar, wenn für jede kompakte Teilmenge L von Y und jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $L' \subset L$ existiert mit

$$\nu(L \smallsetminus L') \leqslant \varepsilon \quad \text{und} \quad \mu_\diamond(\varphi)_{|L'} \text{ ist stetig für alle } \varphi \in \mathcal{K}(X) \ .$$

BEISPIEL 3 Mit den Notationen aus Beispiel 16.1.2 gilt :

$(\lambda_{X,y})_{y \in Y}$ und $(\lambda_{Y,x})_{x \in X}$ sind vernünftig λ_Y- bzw. λ_X-integrierbar.

LEMMA

(i) Ist $\left(\mu_y\right)_{y \in Y}$ vernünftig ν-meßbar, so ist die Funktion $\mu_\diamond(s)$ für alle $s \in \mathcal{SK}_+(X)$ Lusin ν-meßbar, also ν-meßbar.

(ii) Ist $\left(\mu_y\right)_{y \in Y}$ vernünftig ν-integrierbar, so ist die Funktion $\mu_\diamond(s)$ für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$ bzw. alle $s \in \mathcal{SK}_-(X)$ ν-meßbar bzw. ν-integrierbar. Insbesondere ist

$$s \longmapsto \int^* \mu_\diamond(s) \, d\nu : \mathcal{SK}_-(X) \longrightarrow \mathbb{R}_-$$

wachsend und linear.

BEMERKUNG 1 Die Umkehrung von (i) kann man nicht mit dem Satz von Lusin 15.11 beweisen, da die Existenz von L' unabhängig von $u \in \mathcal{U}$ vorausgesetzt wird.

DEFINITION 2 Ein Radon-Integral μ auf X heißt *moderat*, falls X μ-moderat ist.

HAUPTSATZ *Sei $(\mu_y)_{y \in Y}$ eine vernünftig ν-integrierbare Familie von Radon-Integralen auf X . Falls*

$$\int_* \mu_\diamond (s) \, d\nu = \int^* \mu_\diamond (s) \, d\nu \quad \text{für alle } s \in \mathcal{SK}_+ (X) \tag{$*$}$$

gilt, so ist

$$\mu := \int \mu_y d\nu (y) : s \longmapsto \int^* \mu_y (s) \, d\nu (y) : \mathcal{SK} (X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$$

ein Radon-Integral auf X und $(\mu_y)_{y \in Y}$ eine Zerlegung von μ .

Die Bedingung $(*)$ ist insbesondere in jedem der beiden folgenden Fälle erfüllt :

(i) ν *ist moderat.*

(ii) *Für alle $s \in \mathcal{SK}_+ (X)$ ist die Funktion $\mu_\diamond (s)$ n.u.h.*

BEMERKUNG 2 Obige Resultate kann man verallgemeinern und die Bedingung $(*)$ weglassen, wenn man den Begriff des wesentlichen Oberintegrals einführt.

16.9 Integration von Punktmassen

Seien $\rho : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine ν-meßbare Funktion und $p : Y \longrightarrow X$ eine *Lusin ν-meßbare* Abbildung, d.h. für jede kompakte Teilmenge L von Y und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Teilmenge $L' \subset L$ mit

$$\nu\left(L \smallsetminus L'\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{und} \quad p_{|L'} \text{ ist stetig.}$$

HAUPTSATZ (Integrierbarkeitsbedingung) *Existiert für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U von x mit $\int^* \rho \cdot 1_{\overset{-1}{p}(U)} \, d\nu < \infty$, dann ist die Familie $\left(\rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)}\right)_{y \in Y}$ vernünftig ν-integrierbar.*

KOROLLAR *Ist die Integrierbarkeitsbedingung erfüllt und gilt*

$$\int_* \rho \cdot s \circ p \, d\nu = \int^* \rho \cdot s \circ p \, d\nu \quad \text{für alle } s \in \mathcal{SK}_+\left(X\right) \ ,$$

z.B. ist

$$\nu \text{ moderat}$$

oder

$$\rho \text{ n.u.h. und } p \text{ stetig,}$$

so ist $\int \rho \cdot \varepsilon_p \, d\nu$ ein Radon-Integral.

DEFINITION Das Radon-Integral

$$p\left(\rho \cdot \nu\right) := \int \rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)} \, d\nu\left(y\right)$$

nennt man ein *Integral von Punktmassen* .

Für alle $s \in \mathcal{SK}\left(X\right)$ gilt

$$p\left(\rho \cdot \nu\right)\left(s\right) = \int^* s \circ p \cdot \rho \, d\nu$$

und

$$\int^* f \, d\left[\rho\left(y\right) \cdot \varepsilon_{p(y)}\right] = f \circ p\left(y\right) \cdot \rho\left(y\right)$$

für alle $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

HAUPTSATZ (Meßbarkeitssatz) *Sei $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine $p\left(\rho \cdot \nu\right)$-moderate Funktion.*

(i) *f ist genau dann $p\left(\rho \cdot \nu\right)$-meßbar, wenn $f \circ p \cdot \rho$ ν-meßbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int^* \left|f\right| \, dp\left(\rho \cdot \nu\right) = \int^* \left|f\right| \circ p \cdot \rho \, d\nu \ .$$

(ii) f *ist genau dann* $p(\rho \cdot \nu)$*-integrierbar, wenn* $f \circ p \cdot \rho$ ν*-integrierbar ist, und es gilt*

$$\int f \; dp(\rho \cdot \nu) = \int f \circ p \cdot \rho \; d\nu \; .$$

(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ *ist genau dann eine* $p(\rho \cdot \nu)$*-Nullmenge, wenn* $\rho = 0$ $\nu - f.ü.$ *auf* $\overset{-1}{p}(A)$ *gilt.*

LEMMA *Seien* X *und* Y *kompakte Räume,* Z *ein topologischer Raum und* $p : X \longrightarrow Y$ *eine stetige surjektive Abbildung. Ist* $f : Y \longrightarrow Z$ *eine Abbildung, so daß* $f \circ p$ *stetig ist, so ist* f *stetig.*

BEMERKUNG Ein analoges Resultat für das Produkt von zwei Radon-Integralen ist nicht gültig, wie wir es in Bemerkung 16.3 gesehen haben.

SATZ *Für alle* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *gilt*

$$\int^* f \; dp(\rho \cdot \nu) = \int^* f \circ p \cdot \rho \; d\nu \; .$$

16.10 Operationen auf Radon-Integralen

Wir betrachten jetzt die wichtigsten Integrale von Punktmassen.

BEISPIEL 1 Bild eines Radon-Integrals.

Sei $\rho = 1$ und man setze voraus, daß ν moderat ist oder p stetig. Das Radon-Integral

$$p(\nu) := \int \varepsilon_{p(y)} \, d\nu(y)$$

auf X heißt das *Bild* von ν unter p .

Die Integrierbarkeitsbedingung bedeutet, daß p Lusin ν-meßbar ist und daß für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U von x mit $\nu^*\left(\overset{-1}{p}(U)\right) < \infty$ existiert. Man sagt dann, daß p ν*-eigentlich* ist.

BEISPIEL 2 Radon-Integrale mit Dichten.

Sei $X = Y$, $p = \mathrm{id}$ und man setze voraus, daß ν moderat ist oder ρ n.u.h. ist. Man nennt das Radon-Integral

$$\rho \cdot \nu := \int \rho(y) \cdot \varepsilon_y \, d\nu(y)$$

auf Y das *Radon-Integral mit Dichte* ρ bzgl. ν .

Die Integrierbarkeitsbedingung bedeutet, daß $\rho \in \mathcal{L}^1_{loc,\mathbb{R}_+}(\nu)$. Eine Abänderung von ρ auf einer ν-Nullmenge ändert $\rho \cdot \nu$ nicht.

BEISPIEL 3 Induziertes Radon-Integral.

Sei X eine nicht-leere ν-meßbare Teilmenge von Y . Für $x_0 \in X$ ist die Abbildung

$$q : Y \longrightarrow X : y \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} y & & y \in X \\ & \text{si} & \\ x_0 & & y \in Y \smallsetminus X \end{array} \right. .$$

Lusin ν-meßbar. Mit $\rho = 1_X$ ist die Integrierbarkeitsbedingung 16.9 erfüllt und Satz 16.8.ii kann angewendet werden.

Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) , gilt $f \circ q \cdot 1_X = f_0$, wobei f_0 die Fortsetzung von f mit 0 außerhalb von X ist.

Man sagt, daß das Radon-Integral

$$\nu_X := \int 1_X(y) \cdot \varepsilon_{q(y)} \, d\nu(y)$$

von ν auf X *induziert* ist.

Es ist $\nu_\emptyset := 0$ und für jedes $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt

$$\nu_X(s) = \int^* s_0 \, d\nu \ .$$

Dieses Radon-Integral hängt vom Punkt x_0 nicht ab !

Die Umformulierung der Hauptsätze 16.1 (sukzessive Integration), 16.2 (Integrierbarkeit) und 16.9 (Meßbarkeit) wird dem Leser überlassen.

SATZ *Seien X eine ν-meßbare Teilmenge von Y und $j : X \hookrightarrow Y$ die kanonische Injektion. Dann gilt*

$$j(\nu_X) = 1_X \cdot \nu \ .$$

BEISPIEL 4 Sind I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $I \subset J$ und $j : I \hookrightarrow J$ die kanonische Injektion, dann gilt

$$(\lambda_J)_I = \lambda_I \quad \text{und} \quad j(\lambda_I) = 1_I \cdot \lambda_J \ .$$

Haben I und J dieselben Endpunkte, dann ist $j(\lambda_I) = \lambda_J$.

BEISPIEL 5 Seien I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lokal absolut stetige Funktion (vgl. Definition 15.19.3 und Bemerkung 15.19.1). Dies bedeutet, daß es eine eindeutige Funktion $\partial F \in \mathbf{L}^1_{loc}(\lambda_I)$ mit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b \partial F(t)\, dt \quad \text{für alle } a, b \in I$$

existiert. Wir setzen $a < b$ voraus und bezeichnen mit $I(F(a), F(b))$ das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $F(a)$ und $F(b)$.

HAUPTSATZ *Sei $f : F([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}$. Ist $f \circ F \cdot \partial F$ $\lambda_{[a,b]}$-integrierbar , dann ist f $\lambda_{I(F(a),F(b))}$-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{F(a)}^{F(b)} f(s)\, ds = \int_a^b f \circ F(t) \cdot \partial F(t)\, dt \ .$$

Ist F wachsend, d.h. $\partial F \geqslant 0$, so ist das Bild von $\partial F \cdot \lambda_{[a,b]}$ unter F das Radon-Integral $\lambda_{F([a,b])}$. In diesem Fall ist f genau dann $\lambda_{F([a,b])}$-integrierbar, wenn $f \circ F \cdot \partial F$ $\lambda_{[a,b]}$-integrierbar ist.

Im allgemeinen ist $F([a,b]) \neq I(F(a), F(b))$.

KOROLLAR *Seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $F : I \longrightarrow J$, $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal absolut stetige Funktionen. Ist $\partial G \circ F \cdot \partial F$ lokal λ_I-integrierbar, dann ist $G \circ F$ lokal absolut stetig und es gilt*

$$\partial(G \circ F) = \partial G \circ F \cdot \partial F \ .$$

Die Bedingung ist insbesondere erfüllt falls $\partial G \in \mathbf{L}^\infty_{loc}(\lambda_J)$, d.h. G ist lokal lipschitzstetig.

16.11 Produkt zweier Radon-Integrale

LEMMA *Für alle $u \in \mathcal{SK}_{\pm}(X)$ und $v \in \mathcal{SK}_{\pm}(Y)$ gilt $\pm u \otimes v \in \mathcal{SK}(X \times Y)$.*

BEMERKUNG Jedes $s \in \mathcal{SK}_{+}(X \times Y)$ kann man in der Form

$$s = \sup_k \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{l=1}^{k \cdot 2^k} 1_{\left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}}$$

schreiben, wobei $\left\{s > \frac{l}{2^k}\right\}$ eine offene Menge in $X \times Y$ ist, und jede offene Menge in $X \times Y$ ist Vereinigung eine nach oben gerichteten Familie $\mathcal{O}$ von offenen Mengen der Gestalt

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_k \times H_k \ .$$

Für alle $y \in Y$ ist die Abbildung

$$j_y : X \longrightarrow X \times Y : x \longmapsto (x, y) \ .$$

stetig und μ-eigentlich. Man kann somit das Radon-Integral auf $X \times Y$

$$\mu_{X,y} := j_y(\mu) = \int \varepsilon_{(x,y)} \, d\mu(x)$$

definieren.

SATZ

(i) Für jede Funktion $h : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt $h \circ j_y = h(\cdot, y)$ und

$$\int^* h \ d\mu_{X,y} = \int^* h(\cdot, y) \ d\mu \ .$$

Die offene Menge $X \times (Y \setminus \{y\})$ ist eine $\mu_{X,y}$-Nullmenge.

(ii) Für jedes $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ und $u \in \mathcal{SK}_-(X)$, $v \in \mathcal{SK}_-(Y)$ gilt

$$\int^* f \otimes g \ d\mu_{X,y} = \left(\int^* f \ d\mu\right) \cdot g(y) \quad \text{und} \quad \mu_y(-u \otimes v) = -\mu(u) \cdot v(y) \ .$$

(iii) Sei L eine kompakte Teilmenge in Y und definiere

$$\mathcal{V} := \left\{v \in \mathcal{SK}_-(Y) \ \middle| \ v_{|L} \text{ ist stetig}\right\} \ .$$

Für alle $y \in L$ ist die Menge

$$-\mathcal{SK}_-(X) \otimes \mathcal{V} := \{-u \otimes v \mid u \in \mathcal{SK}_-(X), v \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{SK}_-(X \times Y)$$

$\mu_{X,y}$-dicht.

(iv) Die Familie $\left(\mu_{X,y}\right)_{y \in Y}$ ist vernünftig ν-integrierbar.

(v) Für alle $s \in \mathcal{SK}_+ (X \times Y)$ ist die Funktion

$$\mu_{X,\diamond} (s) = \int^* s (x, \cdot) \; d\mu (x)$$

n.u.h.

DEFINITION Das Radon-Integral auf $X \times Y$

$$\mu \otimes \nu := \int \mu_{X,y} \, d\nu (y)$$

heißt das Produkt von μ mit ν .

Für jedes $s \in \mathcal{SK} (X \times Y)$ gilt

$$\mu \otimes \nu (s) = \int^* \left(\int^* s (\cdot, y) \; d\mu \right) \, d\nu (y) \; .$$

BEISPIEL In Beispiel 16.1.2 haben wir gesehen, daß $\lambda_{X \times Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y$.

HAUPTSATZ *Die Abbildung $S : Y \times X \longrightarrow X \times Y : (y, x) \longmapsto (x, y)$ ist $\nu \otimes \mu$-eigentlich, und es gilt*

$$S (\nu \otimes \mu) = \mu \otimes \nu \; ,$$

d.h.

$$\mu \otimes \nu = \int \nu_{x,Y} \, d\mu (x) \; ,$$

wobei $\nu_{x,Y}$ für jedes $x \in X$ das Bild auf $X \times Y$ von ν unter ${}_xj : y \longmapsto (x, y)$ ist.

Zusätzlich gilt für alle $u \in \mathcal{SK}_+ (X)$ und $v \in \mathcal{SK}_+ (Y)$

$$\mu \otimes \nu (u \otimes v) = \mu (u) \cdot \nu (v) \; ,$$

und $\mu \otimes \nu$ ist moderat, falls μ und ν moderat sind.