Kapitel 2

MENGENLEHRE

In diesem Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die Mengenlehre, mit der man die ganze Mathematik begründen kann. Wir werden sehen, daß jedes mathematische Objekt eine Menge ist.

Fassung vom 27. November 2001

2.1 Mengen und Zugehörigkeit

Die Mengenlehre ist eine Theorie mit Gleichung, dessen Alphabet das *Zugehörigkeitszeichen* $\in$ enthält. Zusätzlich hat man folgende Konstruktionsregel:

R_6 Sind x, y Buchstaben, dann ist $x \in y$ eine Relation.

Alle Terme dieser Theorie sind als *Mengen* zu interpretieren. Die Relation

$$x \in y \quad \text{bedeutet} \quad \text{die Menge } x \text{ ist Element der Menge } y \ .$$

Die Axiome dieser Theorie werden sukzessiv in diesem und im nächsten Paragraphen eingeführt.

DEFINITION 1 Man schreibt $x \notin y$, und man sagt, daß x *nicht zu* y *gehört* , falls

$$\neg (x \in y) \ .$$

Man schreibt $x \subset y$, und sagt, daß x *ist in* y *enthalten* oder x *ist eine Teilmenge von* y , falls

$$\forall z \, (z \in x \Rightarrow z \in y) \ .$$

Extensionalitätsaxiom $$\forall x \forall y \, [(x \subset y \wedge y \subset x) \Rightarrow x = y]$$

Dies bedeutet, daß $x = y$ ist, wenn x und y die gleichen Elemente besitzen.

Axiom der leeren Menge $$\exists x \forall y \, (y \notin x)$$

Dies bedeutet, daß es eine Menge gibt, die kein Element besitzt.

HAUPTSATZ *Es gibt höchstens eine Menge x mit $\forall y \, (y \notin x)$.*

DEFINITION 2 Die so charakterisierte Menge wird mit $\emptyset$ bezeichnet und heißt die *leere Menge* . Es gilt

$$x = \emptyset \Leftrightarrow \forall y \, (y \notin x) \ .$$

Wir arbeiten also in einer neuen Theorie, wo $\emptyset$ eine Konstante ist, die folgendes Axiom erfüllt :

$$\forall y \, (y \notin \emptyset) \ .$$

SATZ *Für alle x gilt $x \subset x$ und $\emptyset \subset x$.*

2.2 Mengen mit ein oder zwei Elementen

Axiom des ungeordneten Paares

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \left[w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y) \right]$$

Dies bedeutet, daß für alle Mengen x und y eine Menge z existiert, deren Elemente x und y sind.

HAUPTSATZ *Sind x und y Mengen, dann gibt es höchstens eine Menge z mit*

$$\forall w \left[w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y) \right] \ .$$

DEFINITION 1 Man kann somit ein neuen Term einführen, der mit $\{x, y\}$ bezeichnet wird und das charakterisierende Axiom

$$w \in \{x, y\} \Leftrightarrow (w = x \text{ oder } w = y)$$

erfüllt.

DEFINITION 2 Für alle x definiert man $\{x\} := \{x, x\}$.

Es gilt genau dann $w \in \{x\}$, wenn $w = x$. Ist insbesondere X eine Menge, dann ist $x \in X$ äquivalent zu $\{x\} \subset X$.

DEFINITION 3 Man sagt, daß $\{x\}$ eine *einelementige Menge* ist. Falls $x \neq y$, so sagt man daß $\{x, y\}$ eine *zweielementige Menge* ist.

Aufgabe 1 Gilt $\{x, y\} = \{x, z\}$, so ist $y = z$.

DEFINITION 4 Man sagt, daß $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ein *geordnetes Paar* ist.

Aufgabe 2 Ist $(x, y) = (u, v)$, dann gilt $x = u$ und $y = v$.

2.3 Die Menge aller Teilmengen

Axiom der Potenzmenge

$$\forall x \exists z \forall y \, (y \in z \Leftrightarrow y \subset x)$$

Die Menge z ist eindeutig bestimmt.

DEFINITION Man nennt diese Menge die *Potenzmenge von* x und sie wird mit $\mathfrak{P}(x)$ bezeichnet. Dieser neue Term ist durch

$$y \in \mathfrak{P}(x) \text{ genau dann, wenn } y \subset x$$

charakterisiert.

BEISPIEL Es gilt $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ und $\mathfrak{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.4 Die Vereinigung von Mengen

Axiom der Vereinigung

$$\forall x \exists y \forall z \left[z \in y \Leftrightarrow \exists t \left(t \in x \wedge z \in t \right) \right]$$

Die Menge y ist eindeutig bestimmt.

DEFINITION 1 Man kann somit ein neuen Term einführen, der mit $\bigcup_{t \in x} t$ bezeichnet wird und das charakterisierende Axiom

$$z \in \bigcup_{t \in x} t \text{ genau dann, wenn ein } t \in x \text{ existiert mit } z \in t$$

erfüllt. Diese Menge heißt *Vereinigung aller Mengen in* x .

Die Elemente in $\bigcup_{t \in x} t$ sind alle Elemente der Mengen t die zu x gehören.

DEFINITION 2 Sind X und Y Mengen, so nennt man

$$X \cup Y := \bigcup_{t \in \{X,Y\}} t$$

die *Vereinigung der Mengen* X *und* Y .

Es gilt

$$z \in X \cup Y \text{ genau dann, wenn } z \in X \text{ oder } z \in Y \ .$$

BEISPIEL Seien X, Y Mengen. Für $x \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$\{x\} \in \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(X \cup Y) \ \text{ und } \ \{x, y\} \in \mathfrak{P}(X \cup Y) \ ,$$

also

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \ .$$

2.5 Durchschnitt und Produkt von zwei Mengen

DEFINITION 1 Ist A eine Relation, in der ein Buchstabe x vorkommt, an dem man interessiert ist, so schreibt man auch $A(x)$ und nennt sie eine *Eigenschaft* von x .

Selektionsaxiom Sei $A(x)$ eine Eigenschaft. Dann ist

$$\forall X \exists Y \forall x \left[x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge A(x) \right]$$

ein implizites Axiom.

Die Menge Y ist eindeutig bestimmt.

DEFINITION 2 Diese Menge wird mit

$$\{x \in X \mid A(x)\}$$

bezeichnet, und man sagt, daß sie die *Menge aller* $x \in X$ *mit* $A(x)$ ist.

BEMERKUNG 1 Diese Axiom impliziert das Axiom der leeren Menge, da

$$\emptyset = \{x \in X \mid x \neq x\} \ .$$

BEMERKUNG 2 Man kann sagen, daß $Y = \{x \in X \mid A(x)\}$ eine *externe Beschreibung der Menge* Y und daß "$x \in X$ und $A(x)$ ist wahr" die *Gleichung* von Y in X ist.

BEISPIEL 1 Sei x eine Menge. Die Menge

$$\bigcap_{t \in x} t := \left\{ y \in \bigcup_{t \in x} t \mid \text{für alle } t \in x \text{ ist } y \in t \right\}$$

heißt *Durchschnitt aller Mengen in* x .

BEISPIEL 2 Seien X, Y Mengen. Die Menge

$$X \cap Y := \{z \in X \cup Y \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$$

heißt *Durchschnitt* der Mengen X und Y .

Die Mengen X und Y heißen *disjunkt* , wenn $X \cap Y = \emptyset$.

BEISPIEL 3 Seien X, Y Mengen. Man definiert

$$X \smallsetminus Y := \{z \in X \mid z \notin Y\} \ .$$

Ist A eine Teilmenge von X, d.h. $A \subset X$, so schreibt man $\complement_X A$ anstelle von $X \setminus A$ und nennt die Menge das *Komplement* von A in X. Liegt X von vorneherein fest, und ist keine Verwechslung möglich, so schreibt man für $\complement_X A$ auch $\complement A$.

Aufgabe Es seien A, B und C drei Mengen. Zeigen Sie:

(a) (i) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
(ii) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.
und diese Vereinigungen sind disjunkt.

(b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

BEISPIEL 4 Die Menge

$$X \times Y := \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X \text{ und } \exists y \in Y \text{ mit } z = (x, y)\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

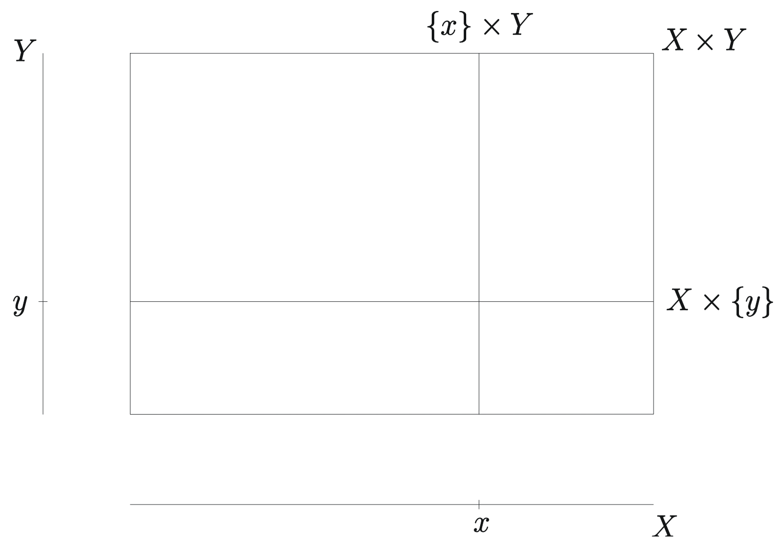
heißt *Produkt* von X und Y.

Zur Vereinfachung schreibt man

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\} ,$$

da für jedes $z \in X \times Y$ genau ein $x \in X$ und ein $y \in Y$ existieren mit $z = (x, y)$. Man sagt, daß x die *erste* und y die *zweite Komponente* von z ist.

Für alle $x \in X$ und $y \in Y$ sind die Mengen $\{x\} \times Y$ und $X \times \{y\}$ Teilmengen von $X \times Y$.



Es gilt $\emptyset \times Y = X \times \emptyset = \emptyset$.

DEFINITION 3 Für alle x, y, z sagt man, daß

$$(x, y, z) := ((x, y), z)$$

ein *Tripel* ist. Sind X, Y, Z Mengen, so definiert man

$$X \times Y \times Z := (X \times Y) \times Z .$$

DEFINITION 4 Ist R eine Relation, die zwei verschiedene Buchstaben x und y enthält, an denen man interessiert ist, so schreibt man $R(x,y)$ und nennt sie eine *Relation* zwischen x und y .

Wir werden auch das folgende stärkere Axiom benutzen:

Substitutionsaxiom Sei $R(x,y)$ eine Relation. Dann ist

$$(\forall x \exists! y \ R(x,y)) \Rightarrow \forall X \exists Y \forall y \, (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \, [x \in X \wedge R(x,y)])$$

ein implizites Axiom.

Die Menge Y ist eindeutig bestimmt. Dies bedeutet, daß wenn $R(x,y)$ eine Relation ist, so daß für alle x genau ein y mit $R(x,y)$ existiert, dann existiert für jede Menge X genau eine Menge Y mit

$$y \in Y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } x \in X \text{ mit } R(x,y) \ .$$

Diese Menge Y wird mit

$$\{y \mid \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } R(x,y)\}$$

bezeichnet.

BEMERKUNG 3 Das Selektionsaxiom folgt wenn man die Relation

$$R(x,y) \quad : \quad (y = x) \wedge A(x)$$

betrachtet.

2.6 Der Begriff Abbildung

DEFINITION 1 Seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* f von X nach Y ist ein Tripel $f = (X, Y, G)$, wobei G eine Teilmenge von $X \times Y$ ist, d.h.

$$G \subset X \times Y \ ,$$

und folgende Eigenschaft besitzt :

$$\text{Für alle } x \in X \text{ gibt es genau ein } y \in Y \text{ mit } (x, y) \in G \ .$$

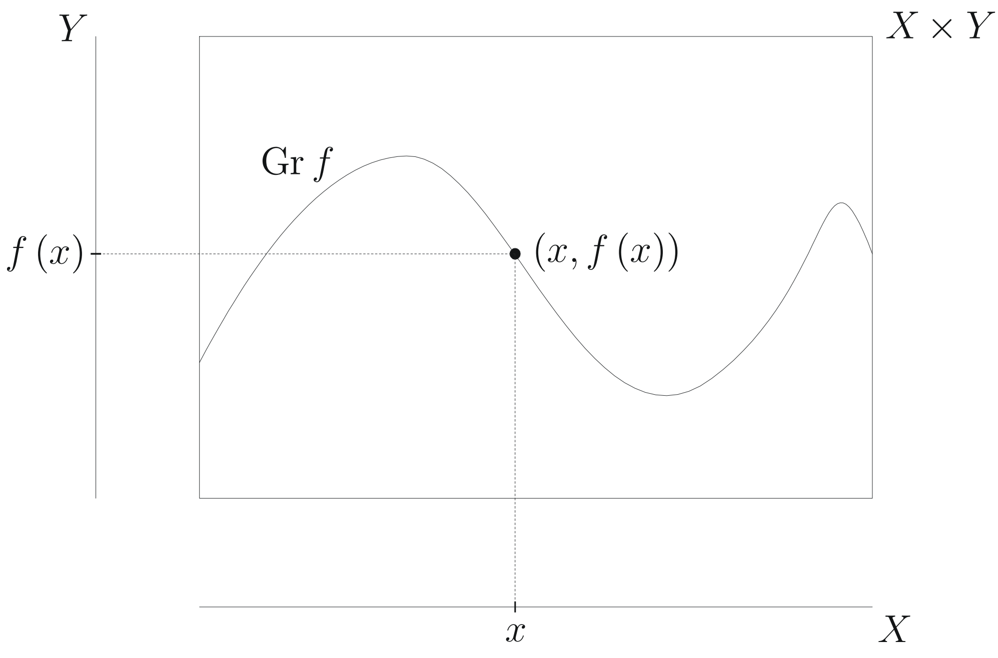
Man sagt, daß die Teilmenge G *funktional* ist, und nennt sie den *Graph* von f . Sie wird mit $\mathrm{Gr}\, f$ bezeichnet. Die Mengen X bzw. Y heißen der *Definitionsbereich* bzw. die *Zielmenge* von f .

Für jedes $x \in X$ wird das einzige $y \in Y$ mit $(x, y) \in \mathrm{Gr}\, f$ durch $f(x)$ bezeichnet. Man schreibt auch

$$f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x) \ .$$

Für alle $x \in X$ gilt

$$\{x\} \times Y \cap \mathrm{Gr}\, f = \{(x, f(x))\} \ .$$



Es ist

$$\mathrm{Gr}\, f = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in \mathrm{Gr}\, f\} = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \ .$$

DEFINITION 2 Man sagt, daß

$$y = f(x)$$

die *Gleichung des Graphen* von f ist.

Sei A eine Teilmenge von X , d.h. $A \subset X$. Man definiert

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} \ ,$$

und nennt diese Menge das *Bild* von A unter f . Die Menge $f(X)$ nennt man auch das *Bild* von f .

Für alle $x \in X$ gilt

$$f(\{x\}) = \{f(x)\} \ .$$

BEMERKUNG Schreibt sich eine Menge $B \subset Y$ in der Form $B = f(A)$, so spricht man von einer *internen Beschreibung* oder einer *Parametrisierung* der Menge B . Dann sagt man, A sei die *Parametermenge* die B durch f beschreibt.

DEFINITION 3 Sei B eine Teilmenge von Y . Man definiert

$$\overset{-1}{f}(B) := \{x \in X \mid \exists y \in B \text{ mit } f(x) = y\} \ ,$$

und nennt sie das *Urbild* von B unter f .

BEISPIEL 1 Sind X und Y Mengen, dann sind

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X : (x, y) \longmapsto x$$

und

$$\mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y : (x, y) \longmapsto y$$

Abbildungen. Es gilt

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{pr}_1 = \{((x, y), z) \in (X \times Y) \times Z \mid z = x\}$$

und

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{pr}_2 = \{((x, y), z) \in (X \times Y) \times Z \mid z = y\} \ .$$

BEISPIEL 2 Sind X, Y, Z Mengen und

$$f : X \longrightarrow Y \ , \ g : X \longrightarrow Z$$

Abbildungen, dann ist

$$(f, g) : X \longrightarrow Y \times Z : x \longmapsto (f(x), g(x))$$

eine Abbildung.

BEISPIEL 3 Ist X eine Menge, so nennt man

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$$

die *identische Abbildung* in X und es gilt

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{id}_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\} \ .$$

Diese Menge heißt die *Diagonale* von $X \times X$.

BEISPIEL 4 Seien X, Y, Z Mengen und

$$f : X \longrightarrow Y \ , \ g : Y \longrightarrow Z$$

Abbildungen. Die Abbildung

$$g \circ f : X \longrightarrow Z : x \longmapsto g\left(f\left(x\right)\right)$$

heißt die *Verkettung* von f und g .

Sind X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so gilt

$$\mathrm{pr}_1 \circ (\mathrm{id}_X, f) = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad \mathrm{pr}_2 \circ (\mathrm{id}_X, f) = f \ .$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (x,y) & \longmapsto & x \\
 & & & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\
X & \xrightarrow{(\mathrm{id}_X, f)} & X \times Y & & \\
x & \longmapsto & (x, f(x)) & & \\
 & & & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & Y \\
 & & (x,y) & \longmapsto & y
\end{array}$$

BEISPIEL 5 Seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, $A \subset X$ und $B \subset Y$ mit $B \supset f(A)$. Dann heißt die Abbildung $(A, B, \mathrm{Gr}\, f \cap A \times B)$ die *Einschränkung* von f auf A mit Zielmenge B , und wird mit $f_{|A,B}$ oder einfacher mit $f_{|A}$, falls $B = Y$, oder auch

$$f_{|A} : A \longrightarrow B : x \longmapsto f(x) \ ,$$

bezeichnet.

Man sagt, daß die Einschränkung von id_X auf A

$$\iota_A := \mathrm{id}_{X|A} : A \longrightarrow X : x \longmapsto x$$

die *kanonische Injektion* von A in X ist.

BEISPIEL 6 Das Tripel $(\emptyset, Y, \emptyset)$, die *leere Abbildung* , ist die einzige Abbildung von $\emptyset$ in Y .

Aufgabe 1 Seien X, Y Mengen und $f, g : X \longrightarrow Y$ Abbildungen. Zeigen Sie, daß genau dann $f = g$ ist, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Aufgabe 2 Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.

(a) Beschreiben Sie den Graph von $g \circ f$ nur mit Hilfe der Graphen $\mathrm{Gr}\, f$ und $\mathrm{Gr}\, g$.

(b) Zeigen Sie, daß für jede Teilmenge $C \subset Z$ gilt

$$(g \circ f)^{-1}(C) = \overset{-1}{f}\left(\overset{-1}{g}(C)\right) \ .$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von X unter der Abbildung $(\mathrm{id}_X, f) : X \longrightarrow X \times Y$ und zeigen Sie, daß die Abbildung

$$X \longrightarrow (\mathrm{id}_X, f)(X) : x \longmapsto (\mathrm{id}_X, f)(x)$$

bijektiv (vgl. Definition 2.7.1) ist. Beachten Sie, daß die beiden Abbildungen sich nur um die Zielmenge unterscheiden.

2.7 Umkehrabbildung

DEFINITION 1 Sind X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so nennt man f *injektiv* , wenn für alle $u, v \in X$ aus $u \neq v$ auch $f(u) \neq f(v)$ folgt. Man nennt sie *surjektiv* wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert. Die Abbildung f heißt dann *bijektiv* wenn sie injektiv und surjektiv ist.

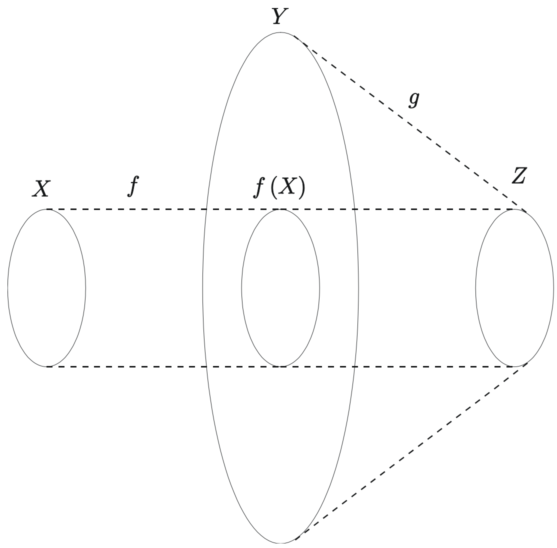
BEMERKUNG Genau dann ist f injektiv, wenn für alle $u, v \in X$ aus $f(u) = f(v)$ auch $u = v$ folgt.

BEISPIEL 1 Ist X eine Menge, so ist die identische Abbildung id_X eine bijektive Abbildung.

SATZ *Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.*

(i) *Sind f, g injektiv bzw. surjektiv, dann ist $g \circ f$ injektiv bzw. surjektiv.*

(ii) *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv, und ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.*



BEISPIEL 2 Die Abbildung

$$S : X \times Y \longrightarrow Y \times X : (x, y) \longmapsto (y, x)$$

ist bijektiv.

HAUPTSATZ *Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive Abbildung, dann ist*

$$\{(f(x), x) \mid x \in X\} = S(\mathrm{Gr}\, f) \subset Y \times X$$

funktional.

DEFINITION 2 Ist f bijektiv, so definiert man

$$\overset{-1}{f} := (Y, X, S(\mathrm{Gr}\, f))$$

und nennt dieses Tripel die *Umkehrabbildung* von f .

KOROLLAR *Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann bijektiv, wenn für jedes $y \in Y$ die Gleichung $f(\cdot) = y$ eindeutig lösbar ist.*

In diesem Fall ist $\overset{-1}{f}(y)$ dessen einzige Lösung und es gilt

$$f \circ \overset{-1}{f} = \mathrm{id}_Y \quad \textit{und} \quad \overset{-1}{f} \circ f = \mathrm{id}_X \ .$$

Aufgabe Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung

$$f : X \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$$

gibt. (*Hinweis*: Betrachten Sie die $x \in X$ mit $x \notin f(x)$.)

2.8 Der Begriff Familie

DEFINITION 1 Seien X und Y Mengen. Eine Abbildung von X nach Y , mit

$$X \longrightarrow Y : x \longmapsto y_x$$

oder $(y_x)_{x \in X}$ bezeichnet, heißt eine *Familie* von Elementen aus Y durch X indiziert . Die Menge aller solchen Familien, d.h. die Menge aller Abbildungen von X nach Y , wird mit Y^X bezeichnet.

In vielen Situationen wird die Zielmenge nicht präzisiert und J als Indexmenge benutzt. Z.B. nennt man $(X_j)_{j \in J}$ eine *Familie von Mengen* .

Das Bild von J unter der Abbildung $j \longmapsto X_j$ wird mit $\{X_j \mid j \in J\}$ bezeichnet. Für die Vereinigung der Mengen in dieser Menge schreibt man

$$\bigcup_{j \in J} X_j$$

und nennt sie die *Vereinigung* der Familie $(X_j)_{j \in J}$. Es gilt

$$x \in \bigcup_{j \in J} X_j \quad \Longleftrightarrow \quad \exists j \in J \text{ mit } x \in X_j \ .$$

Die Menge

$$\bigcap_{j \in J} X_j := \left\{ x \in \bigcup_{j \in J} X_j \mid \forall j \in J \text{ gilt } x \in X_j \right\}$$

heißt der *Durchschnitt* der Familie $(X_j)_{j \in J}$.

BEMERKUNG Ist A eine Eigenschaft und X eine Menge, so wird die Relation

$$\forall x \, (x \in X \Rightarrow A(x))$$

durch

$$\text{für alle } x \in X \text{ gilt } A(x)$$

ausgedrückt.

DEFINITION 2 Sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen. Die Menge aller Familien $(x_j)_{j \in J}$ mit $x_j \in X_j$ für alle $j \in J$, d.h. die Menge aller Abbildungen

$$f : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} X_j : j \longmapsto f(j)$$

mit $f(j) \in X_j$ für alle $j \in J$, wird mit

$$\prod_{j \in J} X_j$$

bezeichnet und heißt *Produkt* der Familie $(X_j)_{j \in J}$.

Auswahlaxiom Falls $X_j \neq \emptyset$ für alle $j \in J$ gilt, so ist $\prod_{j \in J} X_j \neq \emptyset$.

Aufgabe 1 Seien J, X, Y Mengen, $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $(A_j)_{j \in J}$, $(B_j)_{j \in J}$ Familien von Teilmengen von X bzw. Y . Dann sind $(f(A_j))_{j \in J}$ und $\left(\overset{-1}{f}(B_j)\right)_{j \in J}$ Familien von Teilmengen von Y bzw. X .

Beweisen Sie die folgenden Formeln:

(a)
$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} \overset{-1}{f}(B_j)$$

(b)
$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} \overset{-1}{f}(B_j)$$

(c)
$$f\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$$

(d)
$$f\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} f(A_j)$$

Untersuchen Sie, ob in der letzten Formel sogar immer Gleichheit gilt!

Aufgabe 2 Seien X, Y Mengen, $a, b \in X$, $u, v \in Y$. Es gelte $a \neq b$ und $u \neq v$. Zeigen Sie, daß die Abbildungen

$$\mathrm{pr}_a : Y^X \longrightarrow Y : f \longmapsto f(a) \quad \text{und} \quad \mathrm{pr}_b : Y^X \longrightarrow Y : f \longmapsto f(b)$$

verschieden sind.

Aufgabe 3 Seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : Z^{X \times Y} \longrightarrow \left(Z^Y\right)^X : \ f \longmapsto \Phi(f) \ ,$$

wobei

$$[\Phi(f)(x)](y) := f(x, y) \quad \text{ist} \ ,$$

bijektiv ist. Welche Abbildung wird durch $\Phi(f)(x)$ beschrieben?