Kapitel 3

KONSTRUKTION DER NATÜRLICHEN ZAHLEN

Fassung vom 21. April 2002

3.1 Induktionsprinzip

Existenz einer unendlichen Menge

$$\exists x\,[\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)]$$

Sagt man, daß $y \cup \{y\}$ die *nachfolgende Menge*(oder *Nachfolger*) von y ist, so bedeutet dieses Axiom die Existenz einer Menge x mit

$N\,(x)$

$$\emptyset \in x \text{ und für alle } y \in x \text{ ist der Nachfolger } y \cup \{y\} \in x\ .$$

HAUPTSATZ *Es gibt eine kleinste Menge, mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, die die Eigenschaft N besitzt, d.h. es gilt $N\,(\mathbb{N})$ und für alle Mengen x mit $N\,(x)$ gilt $x \supset \mathbb{N}$.*

DEFINITION 1 $\mathbb{N}$ heißt die *Menge der natürlichen Zahlen* . Man definiert die Zahlen

$$0 := \emptyset\ ,\ 1 := 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}\ \ ,$$

$$2 := 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\ \ ,$$

$$3 := 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\ \ ,$$

$$4 := 3 \cup \{3\} = \{0,1,2,3\}\ \ ,$$

usw... Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$n+1 := n \cup \{n\}\ \ .$$

Induktionsprinzip *Sei $P\,(x)$ eine Eigenschaft. Falls $P\,(0)$ wahr ist und für alle n der* Induktionsschritt

$$n \in \mathbb{N} \text{ und } P\,(n) \quad \text{implizieren} \quad P\,(n+1)$$

gilt, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $P\,(n)$ wahr.

DEFINITION 2 Man sagt, daß die Relation

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad P\,(n)$$

die *Induktionsannahme* oder *Induktionsvoraussetzung* ist.

BEISPIEL Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \ .$$

Aufgabe 1 Zeigen Sie durch Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \ .$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie durch Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

3.2 Elementare Eigenschaften von $\mathbb{N}$

Nach Definition von $n+1$ gilt

$$n \subset n+1 \quad \text{und} \quad n \in n+1 \ .$$

Insbesondere ist $n+1 \neq \emptyset = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

SATZ

(i) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $x \in n$ *gilt* $x \in \mathbb{N}$ *und* $x \subset n$.

(ii) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $x \in \mathbb{N}$ *mit* $x \subset n$ *und* $x \neq n$ *gilt* $x \in n$.

(iii) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $n \notin n$. *Insbesondere ist* $n \neq n+1$.

3.3 Ordnungsrelationen

Ist $R(x,y)$ eine Relation und X eine Menge, so heißt

$$R_X := \{(x,y) \in X \times X \mid R(x,y)\}$$

der *Graph* dieser Relation in X . Es gilt genau dann $(x,y) \in X \times X$ und $R(x,y)$, wenn $(x,y) \in R_X$.

Umgekehrt ist R eine Teilmenge von $X \times X$, so ist

$$(x,y) \in R$$

eine Relation, dessen Graph in X gleich R ist. Man spricht von einer *Relation auf* X und schreibt $x \ R \ y$, falls $(x,y) \in R$ ist.

DEFINITION 1 Eine Relation R auf X heißt *Ordnungsrelation* , falls für alle $x,y,z \in X$ gilt

(a) *Transitivität* $$x \ R \ y \text{ und } y \ R \ z \quad \Longrightarrow \quad x \ R \ z \ .$$

(b) *Antisymmetrie* $$x \ R \ y \text{ und } y \ R \ x \quad \Longrightarrow \quad x = y \ .$$

(c) *Reflexivität* $$x \ R \ x \ .$$

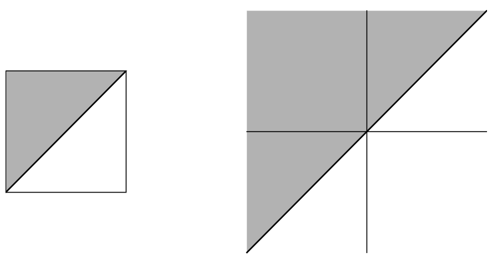
Eine Ordnungsrelation wird oft mit $\leqslant$ bezeichnet und für $x \leqslant y$ sagt man, daß x *kleiner oder gleich* y sei. Man schreibt auch $y \geqslant x$ und sagt, daß y *größer oder gleich* x sei. Man definiert $x < y$ durch $x \leqslant y$ und $x \neq y$ und sagt, daß x *(strikt) kleiner als* y ist. Schreibt man $y > x$ so sagt man, daß y *(strikt) größer als* x ist.

Eine Ordnungsrelation auf X heißt *total* , falls für alle $x,y \in X$ gilt

$$x \leqslant y \quad \text{oder} \quad y \leqslant x \ .$$

Es wäre sprachlich einfacher für $x \leqslant y$ zu sagen, daß x kleiner als y sei, da die strikte Ungleichung $<$ selten benutzt wird !

BEISPIEL 1 Die Ordnungsrelationen $\leqslant$ auf $[0,1]$ bzw. $\mathbb{R}$ sind durch die Graphen



gegeben.

BEISPIEL 2 Ist X eine Menge, so ist die Enthaltensrelation $\subset$ auf $\mathfrak{P}(X)$ eine Ordnungsrelation. Ihr Graph ist

$$\{(A,B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \mid A \subset B\} \ .$$

Falls X mindestens zwei Elemente besitzt, so ist diese Ordnungsrelation nicht total.

DEFINITION 2 Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ schreibt man $n \leqslant m$ anstelle von $n \subset m$.

HAUPTSATZ *Die Relation* $\leqslant$ *auf* $\mathbb{N}$ *ist eine totale Ordnungsrelation, und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \ .$$

BEMERKUNG Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $m + 1 \leqslant n$.

3.4 Endliche und unendliche Mengen

HAUPTSATZ *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $f : n \longrightarrow n$ eine injektive Abbildung, so ist f surjektiv.*

KOROLLAR

(i) *Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Existiert eine Bijektion von n auf m , so ist $n = m$.*

(ii) *Sei A eine Menge. Existieren $n, m \in \mathbb{N}$ und Bijektionen*

$$f : n \longrightarrow A \quad \textit{und} \quad g : m \longrightarrow A \ ,$$

so gilt $n = m$.

Damit ist die folgende Definition sinnvoll :

DEFINITION Eine Menge A heißt *endlich* , falls ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion von n auf A existieren. Man sagt, daß n die *Anzahl der Elemente* in A oder die *Mächtigkeit* von A ist. Man bezeichnet sie mit $\#(A)$.

Ist $n \longrightarrow A : k \longmapsto a_k$ eine Bijektion, so heißt $(a_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ eine *(endliche) Abzählung* von A .

Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt *unendlich* . Man sagt, daß A *abzählbar* ist, falls A endlich ist oder eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf A existiert. Ist diese Bijektion durch

$$\mathbb{N} \longrightarrow A : k \longmapsto a_k$$

gegeben, so heißt $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *(unendliche) Abzählung* von A .

BEMERKUNG Ist A eine Menge mit n Elementen, und existiert eine Bijektion von A auf eine Menge B , so hat B auch n Elemente.

Aufgabe 1 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und X_m, X_n Mengen mit m bzw. n Elementen. Finden sie notwendige und hinreichende Bedingungen an die Zahlen m, n, so daß es eine Abbildung

$$f : X_m \longrightarrow X_n$$

gibt mit der Eigenschaft

(a) f ist injektiv.

(b) f ist surjektiv.

(c) f ist bijektiv.

Aufgabe 2 Gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$?

3.5 Verallgemeinerung des Induktionsprinzips

Induktionsprinzip ab m *Seien* $P(x)$ *eine Eigenschaft und* $m \in \mathbb{N}$ *. Ist* $P(m)$ *wahr und gilt für alle* n

$$n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant m \text{ und } P(n) \quad \text{implizieren} \quad P(n+1)\ ,$$

so ist die Eigenschaft $P(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geqslant m$ *wahr.*

SATZ *Die Abbildung* $x \longmapsto x+1 : \mathbb{N} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\}$ *ist bijektiv. Insbesondere gibt es für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \neq 0$ *genau ein* $x \in \mathbb{N}$ *mit* $n = x+1$ *.*

DEFINITION Man schreibt $\mathbb{N}^* := \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\}$ und für alle $n \in \mathbb{N}^*$ bezeichnet man mit $n-1$ die einzige natürliche Zahl x mit $n = x+1$.

Allgemeiner gilt:

Verallgemeinertes Induktionsprinzip ab m *Seien* $P(x)$ *eine Eigenschaft und* $m \in \mathbb{N}$ *. Gilt für* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geqslant m$ *der* Induktionsschritt

$$\forall l\, [m \leqslant l < n \Rightarrow P(l)] \quad \Longrightarrow \quad P(n)\ ,$$

so ist die Eigenschaft $P(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geqslant m$ *wahr.*

Aufgabe Die Menge $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < n!\}$ ist unendlich.

3.6 Addition in $\mathbb{N}$

DEFINITION 1 Sei X eine Menge. Für $n \in \mathbb{N}$ sagt man, daß eine Familie $(x_j)_{j\in n} = (x_j)_{j=0,\ldots,n-1}$ von Elementen aus X , d.h. eine Abbildung von $n = \{j \in \mathbb{N} \mid j < n\}$ in X , eine *(endliche) Folge* (mit n Elementen) in X .

Eine Familie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus X , d.h. eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X , heißt eine *(unendliche)* Folge in X .

Die Menge aller endlichen Folgen mit n Elementen in X wird natürlicherweise mit X^n bezeichnet, die aller unendlichen Folgen in X mit $X^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß für jede Menge X gilt $X^0 = X^\emptyset = \{0\}$ und daß man X^n mit

$$X^{n+1} := X^n \times X$$

durch Induktion definieren kann. Wie muß man diese Aussage genau präzisieren?

Induktiv definierte Folge Ist $\Phi : X \longrightarrow X$ eine Abbildung und $x_0 \in X$, so existiert genau eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} .$$

DEFINITION 2 Man sagt, daß $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch Induktion bzw. induktiv oder rekursiv mit Startpunkt x_0 definiert wurde.

Für alle $a \in \mathbb{N}$ definiert man durch Induktion

$$a + 0 := a \quad \text{und} \quad a + (k+1) := (a+k) + 1 .$$

BEISPIEL Es gilt

$$2 + 2 = 2 + (1+1) = (2+1) + 1 = 3 + 1 = 4 .$$

HAUPTSATZ *Die Addition in* $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (a,b) \longmapsto a + b$$

ist assoziativ und kommutativ, 0 *ist ihr neutrales Element und jedes Element ist kürzbar, d.h. für alle* $a, b, c \in \mathbb{N}$ *gilt*

(i) *Assoziativität* $$(a+b)+c = a+(b+c)$$

(ii) *Kommutativität* $$a+b = b+a$$

(iii) *Neutralität* $$a+0 = 0+a = a$$

(iv) *Kürzbarkeit* $$a+c = b+c \quad \Longrightarrow \quad a = b .$$

SATZ *Die Addition in $\mathbb{N}$ ist mit der Ordnung verträglich, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt*

Verträglichkeit
$$a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + c \ .$$

BEMERKUNG Allgemeiner kann man eine Folge folgendermaßen induktiv definieren :

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $\Phi_n : X^n \longrightarrow X$ gegeben, so existiert genau eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X mit

$$x_n = \Phi_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Man beachtet, daß $X^0 = \{0\}$, also ist $(x_0, \ldots, x_{-1}) = 0$ eine vernünftige Schreibweise. Die Abbildung $\Phi_0 : X^0 \longrightarrow X$ ist somit eindeutig von $x_0 := \Phi_0(0)$ bestimmt.

Man kann es naiver formulieren. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Eigenschaft P_n , die von $n+1$ Variablen abhängt, und eine Menge x_0 gegeben mit $P_0(x_0)$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Mengen mit $P_n(x_0, .., x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls man für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ aus

$$P_k(x_0, \ldots, x_k) \text{ sei wahr für alle } k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } k < n \ ,$$

eine Menge x_n explizit konstruieren kann mit

$$P_n(x_0, \ldots, x_n) \text{ wahr.}$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie die Kommutativität der Addition in $\mathbb{N}$ in dem Sie durch Induktion

$$a + 0 = 0 + a \quad \text{und} \quad a + 1 = 1 + a$$

für alle $a \in \mathbb{N}$ zuerst beweisen.

Aufgabe 3 Die Menge M besitze folgende Eigenschaft:

$$3 \in M \quad \text{und} \quad m \in M \Longrightarrow 2m \pm 1 \in M \ .$$

Zeige, dass M alle ungeraden Zahlen $\geqslant 3$ enthält.

Aufgabe 4 Die durch die Rekursionsvorschrift

$$a_0 := 1 \quad , \quad a_1 := 1 \quad , \quad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \text{ für } n \geqslant 1$$

definierten Zahlen nennt man die *Fibonaccizahlen* .

Geben Sie (mit Beweis) die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ an, für die gilt:

$$a_n \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n \ .$$

Für die Definition von Potenzen und das Rechnen in $\mathbb{Q}$ siehe 3.12 und 4.6.

3.7 Das Zählen

LEMMA *Für alle $a \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung*

$$x \longmapsto x + a : \mathbb{N} \longrightarrow \{y \in \mathbb{N} \mid y \geqslant a\}$$

bijektiv.

KOROLLAR *Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung*

$$x + a = b$$

genau dann mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{N}$, wenn $a \leqslant b$ ist. In diesem Fall ist die Lösung eindeutig.

DEFINITION Diese Lösung wird mit $b - a$ bezeichnet.

HAUPTSATZ *Sind A und B endliche disjunkte Mengen, so gilt*

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) \ .$$

Aufgabe Es seien A , B und C drei Mengen. Zeigen Sie:

(a)
$$\#(A \cup B) + \#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) \ .$$

(b)
$$\#(A \cup B \cup C) =$$
$$= \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \ .$$

Hinweis: Aufgabe 2.5.

3.8 Multiplikation in $\mathbb{N}$

DEFINITION Für alle $a \in \mathbb{N}$ definiert man durch Induktion

$$a \cdot 0 := 0 \quad \text{und} \quad a \cdot (k+1) := a \cdot k + a \ .$$

HAUPTSATZ *Die Multiplikation in* $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (a,b) \longmapsto a \cdot b$$

ist assoziativ und kommutativ, 1 *ist ihr neutrales Element und jedes Element in* $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ *ist kürzbar, d.h. für alle* $a,b,c \in \mathbb{N}$ *gilt*

(i) Assoziativität $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(ii) Kommutativität $$a \cdot b = b \cdot a$$

(iii) Neutralität $$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

(iv) Kürzbarkeit $$c \neq 0 \ \textit{und}\ a \cdot c = b \cdot c \quad \Longrightarrow \quad a = b \ .$$

SATZ *Die Multiplikation in* $\mathbb{N}$ *ist distributiv bzgl. der Addition und mit der Ordnung verträglich, d.h. für alle* $a,b,c \in \mathbb{N}$ *gilt*

(i) Distributivität $$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(ii) Verträglichkeit $$a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c \leqslant b \cdot c \ .$$

Zusätzlich für $n \in \mathbb{N}$ *gegeben, gilt das*

(iii) Teilen mit Rest : Für jedes $x \in \mathbb{N}$ *existieren eindeutig definierte natürliche Zahlen* $q, r \in \mathbb{N}$ *mit*

$$x = q \cdot n + r \quad \textit{und} \quad r < n \ .$$

KOROLLAR *Sind A und B endliche Mengen, so gilt*

$$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B) \ .$$

Aufgabe Zeigen Sie, daß jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ entweder gerade ist, d.h. es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$, oder ungerade ist, d.h. es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k - 1$.

3.9 Summe und Produkt einer Folge

Sei X eine Menge, die mit zwei Operationen versehen ist, d.h. man gibt sich zwei Abbildungen

$$+ : X \times X \longrightarrow X : (x,y) \longmapsto x+y \text{ und } \cdot : X \times X \longrightarrow X : (x,y) \longmapsto x \cdot y \ ,$$

und nennt diese Addition bzw. Multiplikation.

DEFINITION Seien $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$. Ist $(x_k)_{k=m,\ldots,n}$ eine endliche Folge in X , so definiert man durch Induktion die *Summe* und das *Produkt von* $(x_k)_{k=m,\ldots,n}$:

$$\sum_{k=m}^{m} x_k := x_m \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^{l+1} x_k := \left(\sum_{k=m}^{l} x_k\right) + x_{l+1} \text{ für alle } l \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leqslant l < n$$

sowie

$$\prod_{k=m}^{m} x_k := x_m \quad \text{und} \quad \prod_{k=m}^{l+1} x_k := \left(\prod_{k=m}^{l} x_k\right) \cdot x_{l+1} \text{ für alle } l \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leqslant l < n \ .$$

Bei einer Indexverschiebung :

$$l = k - m + p \quad \text{oder} \quad k = l - p + m$$

gilt

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{l=p}^{p+n-m} x_{l-p+m}$$

und analog

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = \prod_{l=p}^{p+n-m} x_{l-p+m} \ .$$

Sind die Operationen assoziativ, so gilt für alle $p \in \mathbb{N}$ mit $m < p \leqslant n$

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \left(\sum_{k=m}^{p-1} x_k\right) + \left(\sum_{k=p}^{n} x_k\right)$$

und

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = \left(\prod_{k=m}^{p-1} x_k\right) \cdot \left(\prod_{k=p}^{n} x_k\right) \ .$$

Sind die Operationen assoziativ und kommutativ, so gilt für alle endliche Folgen $(x_k)_{k=m,\ldots,n}$ und $(y_k)_{k=m,\ldots,n}$ in X

$$\sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} x_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} y_k\right)$$

und

$$\prod_{k=m}^{n}(x_k \cdot y_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} x_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} y_k\right)$$

Ist zusätzlich die Multiplikation bzgl. der Addition distributiv, dann gilt

$$\left(\sum_{k=m}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{l=p}^{q} y_l\right) = \sum_{k=m}^{n}\left(\sum_{l=p}^{q} x_k \cdot y_l\right) = \sum_{l=p}^{q}\left(\sum_{k=m}^{n} x_k \cdot y_l\right) .$$

BEISPIEL Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2 .$$

BEMERKUNG Besitzt die Addition bzw. die Multiplikation ein neutrales Element, das mit 0 bzw. 1 bezeichnet wird, so ist es oft nützlich die Summe bzw. das Produkt über eine leere Indexmenge mit 0 bzw. 1 zu definieren.

Z.B.

$$\sum_{k=m}^{m-1} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{k=n+1}^{n} x_k = 1 .$$

Aufgabe 1 Zeigen Sie durch Induktion, daß für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\sum_{l=1}^{2k}(-1)^{l+1} \cdot \frac{1}{l} = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{k+l} .$$

Aufgabe 2 Es sei $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geqslant 2$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $c_n \in \mathbb{N}$ mit

$$a^n - 1 = c_n\,(a-1) ,$$

und die c_n für $n \in \mathbb{N}$ genügen der Rekursionsformel

$$c_0 = 0 \quad \text{und} \quad c_{n+1} = a \cdot c_n + 1 .$$

Aufgabe 3 Geben Sie (mit Beweis) die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ an, für die gilt:

$$n^2 < 2^n .$$

Für die Definition der Potenzen siehe 3.12.

3.10 Permutationen

Sei A eine endliche Menge mit n Elementen und $(a_k)_{k=0,\ldots,n-1}$, $(b_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ zwei Abzählungen von A . Dann gibt es eine Bijektion $\sigma : n \longrightarrow n$ mit

$$a_k = b_{\sigma(k)} \quad \text{für alle } k \in n \ .$$

DEFINITION 1 Eine Bijektion von n auf n heißt eine *Permutation* von n .

Man setzt

$$n! := \prod_{k \in n} (k+1) \ ,$$

und nennt diese Zahl n *Fakultät* .

Es gilt

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \ .$$

DEFINITION 2 Sind A, B zwei Mengen, so bezeichnet man mit $Bij\,(A, B)$ die Menge aller Bijektionen von A auf B .

LEMMA *Seien A, B Mengen mit n Elementen und $f : n \longrightarrow A$, $g : n \longrightarrow B$ Bijektionen. Dann ist jede Injektion $\sigma : A \longrightarrow B$ surjektiv und die Abbildung*

$$Bij\,(A, B) \longrightarrow Bij\,(n, n) : \sigma \longmapsto \overset{-1}{g} \circ \sigma \circ f$$

ist bijektiv.

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\sigma}{\longrightarrow} & B \\ f \ \uparrow & & \uparrow \ g \\ n & \underset{\overset{-1}{g} \circ \sigma \circ f}{\longrightarrow} & n \end{array}$$

HAUPTSATZ *Für alle Mengen A, B mit n Elementen gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von A auf B , d.h.*

$$\#\,(Bij\,(A, B)) = n! \ .$$

Aufgabe Bestimmen Sie die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ mit

(a)

$$n! \leqslant 2^n \ .$$

(b)

$$n! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n \ .$$

3.11 Binomialkoeffizienten

DEFINITION Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ definiert man durch Induktion über n den *Binomial-Koeffizienten* $\binom{n}{k}$:

$$\binom{0}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{0}{k} := 0 \text{ für alle } k \geqslant 1 \ ,$$

und

$$\binom{n+1}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{n+1}{k} := \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \text{ für alle } k \geqslant 1 \ .$$

Diese Definition kann man im *Pascalschen Dreieck* darstellen :

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

LEMMA *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \textit{und} \quad \binom{n}{k} = 0 \textit{ für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ mit } k > n \ .$$

SATZ *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.*

Aufgabe Zeigen Sie durch Induktion, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant m$ gilt

$$\sum_{l=m}^{n} \binom{l}{m} = \binom{n+1}{m+1} \ .$$

3.12 Binomische Formel und geometrische Summe

Sei eine Menge X mit einer Addition und einer Multiplikation versehen. Man nehme an, daß diese Operationen assoziativ und kommutativ sind und jeweils ein neutrales Element besitzen, das mit 0 bzw. 1 bezeichnet wird. Zusätzlich fordern wir, daß die Multiplikation bzgl. der Addition distributiv ist.

Für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man $n \cdot x$ und x^n durch Induktion über n :

$$0 \cdot x := 0 \quad \text{und} \quad x^0 := 1 \ ,$$

sowie

$$(n+1) \cdot x := n \cdot x + x \quad \text{und} \quad x^{n+1} := x^n \cdot x \ .$$

Binomische Formel Für alle $x, y \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \ .$$

KOROLLAR *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0 \ .$$

Insbesondere ist die Potenzmenge einer n-elementigen Menge 2^n-elementig.

Geometrische Summe Für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x) \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1} \ .$$

BEMERKUNG Ist X ein Körper (vgl. 4.5) und $x \neq 1$, so gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \ .$$

Aufgabe 1 Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2^{2n} - \binom{2n}{n} \right)$$

die Mächtigkeit der Menge aller Teilmengen mit mindestens $n+1$ Elementen in einer Menge mit $2n$ Elementen ist, indem Sie die Binomische Formel

$$2^{2n} = \sum_{l=0}^{2n} \binom{2n}{l}$$

benutzen.

Aufgabe 2 Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $x \in X$. Zeigen Sie, daß

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^k}\right) = \sum_{l=0}^{2^n-1} x^l$$

und

$$(1-x)\left[\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^k}\right) - 1\right] = x\left(1 - x^{2^n-1}\right) \ .$$