Kapitel 10

NORMIERTE RÄUME UND TOPOLOGIE

In diesem Kapitel ist (X, d) ein metrischer Raum.

Fassung vom 16. Dezember 2002

10.1 Normierte Räume

Die meisten metrischen Räume, die wir betrachten werden, sind Teilmengen von Vektorräumen.

DEFINITION 1 Seien F ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und

$$\|\cdot\| : F \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\| \ .$$

Man sagt, daß $\|\cdot\|$ eine *Norm* auf F und $(F, \|\cdot\|)$, oder einfach F , wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, ein *normierter Vektorraum* ist, wenn für alle $f, g \in F$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

(a) Homogenität

$$\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

(b) Dreiecksungleichung

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

(c) Trennung

$$\|f\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \ .$$

SATZ *Ist* $(F, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum, so ist*

$$(f, g) \longmapsto \|f - g\| : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine Metrik auf F *und es gilt*

$$\Big| \|f\| - \|g\| \Big| \leqslant \|f - g\| \ .$$

Insbesondere ist

$$\|\cdot\| : F \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\|$$

eine stetige Funktion auf F .

BEMERKUNG 1 Wir werden immer einen normierten Raum als metrischen Raum mit der Metrik $(f, g) \longmapsto \|f - g\|$ betrachten. Eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in F ist also konvergent, falls ein $f \in F$ existiert mit $\lim_k \|f_k - f\| = 0$.

BEMERKUNG 2 Für alle $f \in F$ und $r \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$B(f, r, \|\cdot\|) = f + r \cdot B(0, 1, \|\cdot\|) \ .$$

DEFINITION 2 Ein vollständiger (Definition 6.3.2) normierter Raum heißt *Banachraum* .

BEISPIEL $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Banachräume.

10.2 p-Norm auf $\mathbb{K}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Wir errinern, daß eine endliche Folge $z = (z_j)_{j=1,\ldots,n}$ in $\mathbb{K}$, als Funktion $\{1,..,n\} \longrightarrow \mathbb{K} : j \longmapsto z_j$ betrachtet werden kann. Insbesondere für alle $z, w \in \mathbb{K}^n$ ist das Produkt der entspechenden Funktionen durch

$$z \cdot w := (z_j \cdot w_j)_{j=1,\ldots,n}$$

gegeben. Dieses Produkt sollte man nicht mit dem Skalarprodukt (siehe die Bemerkung weiter unten) verwechseln.

Für alle $p \in [1, \infty[$ definiert man

$$|z|_p := \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Ist $p = 2$, so schreibt man einfach

$$|z| := |z|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Für $p = \infty$ definiert man

$$|z|_\infty := \max_{j=1,\ldots,n} |z_j| .$$

Für alle $p \in [1, \infty]$, $z \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$|z|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0$$

und

$$|\alpha \cdot z|_p = |\alpha| \cdot |z|_p .$$

HAUPTSATZ *Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h. $q = \frac{p}{p-1}$.*

(i) ***Hölder-Ungleichung*** *Für alle $z, w \in \mathbb{K}^n$, gilt*

$$|z \cdot w|_1 \leqslant |z|_p \cdot |w|_q .$$

(ii) ***Minkowski-Ungleichung*** *Sei $p \in [1, \infty]$. Für alle $z, w \in \mathbb{K}^n$ gilt*

$$|z + w|_p \leqslant |z|_p + |w|_p .$$

BEMERKUNG Man definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ durch

$$(z|\, w) := \sum_{j=1}^n \overline{z_j} \cdot w_j .$$

Es gilt also

$$(z|\, z) = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = |z|^2 .$$

Mit $p = q = 2$ schreibt sich die Hölder-Ungleichung in der Form

$$|(z|\,w)| \leqslant |z \cdot w|_1 \leqslant |z| \cdot |w| \ .$$

Sie heißt dann *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* .

Anstelle von $(x|\,y)$ schreibt man auch oft

$$x \bullet y \ ,$$

falls $x, y \in \mathbb{R}^n$. Achtung, man darf $x \bullet y$ und $x \cdot y$ nicht verwechseln !

BEISPIEL Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gilt

$$|a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a| \leqslant |a|^2 + |b|^2 + |c|^2$$

und

$$|a \cdot b + c \cdot d + d \cdot a| \leqslant \sqrt{2\,|a|^2 + |c|^2} \cdot \sqrt{|b|^2 + 2\,|d|^2} \ .$$

KOROLLAR *Für alle $p \in [1, \infty]$ ist die Funktion $|\cdot|_p$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.*

Wir werden zeigen, daß$\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$ ein Banachraum ist (Korollar 10.4 und Satz 11.6).

10.3 Punktweise Konvergenz

DEFINITION Seien X eine Menge, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^X$ eine Folge von Funktionen $f_k : X \longrightarrow \mathbb{K}$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion. Man sagt, daß $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *punktweise gegen* f *konvergiert* , wenn gilt

$$f(x) = \lim_k f(x) \quad \text{für alle } x \in X \ .$$

Man schreibt

$$f = \lim_k f_k \quad \text{punktweise auf } X \ .$$

BEISPIEL 1 Wir betrachten die Funktionenfolge $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$. Es gilt

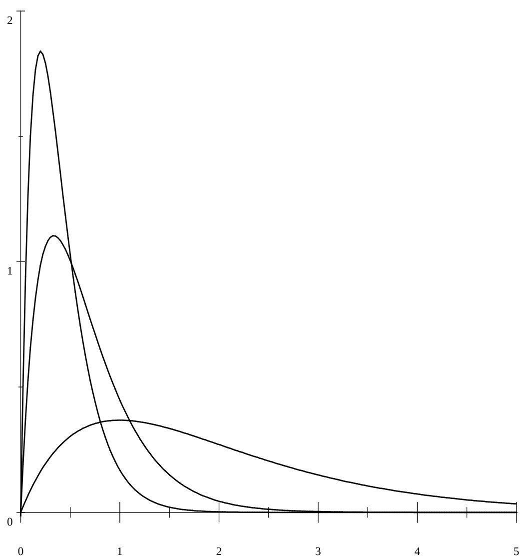
$$\lim_k x^k = \begin{cases} 0 & \qquad x \in [0,1[\\ & \text{falls} \\ 1 & \qquad x = 1 \end{cases} \ .$$

d.h.

$$1_{\{1\}} = \lim_k \mathrm{id}^k \quad \text{punktweise auf } [0,1] \ .$$

Man bemerke, daß die Funktionen id^k stetig sind, im Gegensatz zu $1_{\{1\}}$.

BEISPIEL 2 Wir betrachten die Funktionenfolge $\left(k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k\cdot\mathrm{id}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$.



$k = 1, 3, 5$

Es gilt

$$\lim_k k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k\cdot\mathrm{id}} = 0 \quad \text{punktweise auf } [0,1] \ .$$

Andererseits ist

$$\int_0^1 k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k \cdot \mathrm{id}} = 1 - (k+1) \cdot e^{-k} \ ,$$

also

$$\lim_k \int_0^1 k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k \cdot \mathrm{id}} \neq 0 = \int_0^1 \lim_k k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k \cdot \mathrm{id}} \ .$$

BEMERKUNG Diese zwei Beispiele zeigen, daß die punktweise Konvergenz die Stetigkeit nicht erhält und mit dem Riemannintegral nicht kommutiert. Dies führt zur Betrachtung einer stärkeren Konvergenz. Dafür werden wir eine Norm einführen, die die Größe einer Funktion mißt. Die Distanz zwischen zwei Funktionen ist die Norm ihrer Differenz. Diese Norm ist besonders für Stetigkeitseigenschaften geeignet.

10.4 Supremumsnorm

DEFINITION 1 Sei X eine Menge. Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert man

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty,X} := \sup_{x\in X} |f(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Man bezeichnet mit $\ell^\infty(X)$ die Menge aller Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\|f\|_\infty < \infty$.

LEMMA *Für alle $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt*

(i)
$$|f| \leqslant \|f\|_\infty \ ,$$

(ii)
$$\|f\|_\infty < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist beschränkt} \ ,$$

(iii)
$$\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty \ ,$$

(iv)
$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ ,$$

(v)
$$\|f\|_\infty = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \ ,$$

(vi)
$$\|f \cdot g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$$

(vii)
$$|f| \leqslant |g| \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \ .$$

SATZ *$\ell^\infty(X)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^X$ und*

$$\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\|_\infty$$

*ist eine Norm, die sogenannte **Supremumsnorm** . Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in $\ell^\infty(X)$ konvergente Folge, so konvergiert diese Folge punktweise.*

DEFINITION 2 Eine in $\ell^\infty(X)$ konvergente Folge heißt *gleichmäßig konvergent* . Man schreibt

$$f = \lim_k f_k \quad \text{gleichmäßig auf } X \ .$$

BEISPIEL 1 Eine punktweise konvergente Folge braucht nicht gleichmäßig konvergent zu sein, wie die Beispiele 10.3 zeigen. Es gilt

$$\left(\mathrm{id}^k - 1_{\{1\}}\right)(x) = \begin{cases} x^k & \text{falls} \quad x \in [0,1[\\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = 1 \end{cases} \ ,$$

d.h.

$$\left\|\mathrm{id}^k - 1_{\{1\}}\right\|_{\infty,[0,1]} = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Andererseits ist

$$\left\|k^2 \cdot \mathrm{id} \cdot e^{-k \cdot \mathrm{id}}\right\|_{\infty,[0,1]} = \frac{k}{e} \ ,$$

da diese Funktion ihr Maximum in $\frac{1}{k}$ annimmt.

BEISPIEL 2 Wir untersuchen erneut das Beispiel 10.3.1, indem wir die Grundmenge verändern. Zuerst gilt

$$\lim_k \mathrm{id}^k = 0 \quad \text{punktweise auf } [0,1[\ ,$$

aber

$$\left\|\mathrm{id}^k\right\|_{\infty,[0,1[} = 1$$

Ist $r \in [0,1[$ gegeben, so ist

$$\left\|\mathrm{id}^k\right\|_{\infty,[0,r]} = r^k \ ,$$

also

$$\lim_k \mathrm{id}^k = 0 \quad \text{gleichmäßig auf } [0,r] \ .$$

HAUPTSATZ *$\ell^\infty(X)$ ist ein Banachraum.*

BEMERKUNG Im Beweis ist implizit folgendes gezeigt worden :

Genau dann ist eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\ell^\infty(X)$ gleichmäßig gegen ein $f \in \ell^\infty(X)$ konvergent, wenn für jedes $\varepsilon > 0$, ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ und alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant N \ .$$

Geometrisch enthält der ε-Schlauch um den Graphen von f , d.h. die Menge

$$\{(x,y) \in X \times \mathbb{K} \mid |y - f(x)| \leqslant \varepsilon\} \ ,$$

den Graphen von f_k für alle $k \geqslant N$.

KOROLLAR *$(\mathbb{K}^n, |\cdot|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

Wir werden später sehen (Satz 11.6), daß$\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$ für alle $p \in [1,\infty]$ ein Banachraum ist.

10.5 Räume stetiger Funktionen

DEFINITION 1 Sei X ein metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}(X)$ und $\mathcal{C}^b(X)$ die Menge aller stetigen bzw. stetigen und beschränkten Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{K}$.

$\mathcal{C}^b(X)$ ist ein Untervektorraum von $\ell^\infty(X)$.

HAUPTSATZ *Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen und beschränkten Funktionen auf X und gilt $f = \lim_k f_k$ gleichmäßig auf X , so ist f stetig.*
Insbesondere ist $\left(\mathcal{C}^b(X), \|\cdot\|_\infty\right)$ ein Banachraum.

BEMERKUNG 1 Die Stetigkeit von $\lim_k f_k$ in $x \in X$ bedeutet, daß

$$\lim_{y\to x} \lim_k f_k(y) = \lim_k f_k(x) = \lim_k \lim_{y\to x} f_k(y) \ ,$$

also daß man beide Grenzwerte vertauschen darf !

BEMERKUNG 2 Ist $f \in \mathcal{C}(X)$ und $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge, so ist f auf $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

BEMERKUNG 3 Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(X)$, die punktweise auf X gegen eine Funktion f konvergent ist, und $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X , die gegen $x \in X$ konvergent ist. Definiert man $Y := \{x\} \cup \{x_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ und ist $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_k \|f_k - f\|_{\infty,Y} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_k \|f_k - f\|_{\infty,(x_l)_{l\geqslant m}} = 0 \ .$$

KOROLLAR *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(X)$. Ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf jeder in X konvergenten Folge gleichmäßig konvergent, so konvergiert diese Folge punktweise auf X gegen eine Funktion f und f stetig.*

10.6 Integration, Differentiation und gleichmäßige Konvergenz

HAUPTSATZ *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine auf einem Intervall $[a,b]$ von $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b \lim_k f_k = \lim_k \int_a^b f_k \ .$$

BEISPIEL 1 Es gilt

$$\lim_k \frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}} = 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}_+ \ ,$$

aber

$$\int_0^\infty \frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{k}} = 1 \ .$$

Dies zeigt, daß der Hauptsatz falsch ist, wenn das Intervall unbeschränkt ist.

KOROLLAR *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetig differenzierbare Funktionen in J und $\xi \in J$. Ist $(f_k(\xi))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent und ist $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ auf jedem Intervall $[a,b] \subset J$ gleichmäßig konvergent, so ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf jedem Intervall $[a,b] \subset J$ gleichmäßig konvergent, insbesondere auf J punktweise konvergent, gegen eine stetig differenzierbare Funktion in J und es gilt*

$$(\lim_k f_k)' = \lim_k \ f_k' \ .$$

BEISPIEL 2 Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ folgt i.a. nicht diejenige von $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$, wie das folgende Beispiel zeigt :

Die Folge $\left(\frac{\sin(k\cdot\mathrm{id})}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 auf $\mathbb{R}$, aber $(\cos(k\cdot\mathrm{id}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht mal punktweise.

Wir führen jetzt andere Normen auf $\mathcal{C}([a,b])$ ein.

DEFINITION Für alle $p \in [1,\infty[$ und alle $f \in \mathcal{C}([a,b])$ definiert man

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

SATZ *Seien $p,q \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, d.h. $q=\frac{p}{p-1}$.*

(i) ***Hölder-Ungleichung*** *Für alle* $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ *gilt*

$$\left|\int_a^b f \cdot g\right| \leqslant \int_a^b |f \cdot g| = \|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \ .$$

(ii) ***Minkowski-Ungleichung*** *Für alle* $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ *gilt*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

(iii) $\|\cdot\|_p$ *ist eine Norm auf* $\mathcal{C}([a,b])$ *.*

BEMERKUNG Man definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}([a,b])$ durch

$$(f|\, g) := \int \overline{f} \cdot g \ .$$

Es gilt also

$$(f|\, f) = \int_a^b |f|^2 = \|f\|_2^2 \ .$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist dann

$$|(f|\, g)| \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \ ,$$

d.h.

$$\left|\int_a^b \overline{f} \cdot g\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

10.7 Weierstraß-Kriterium

DEFINITION 1 Man sagt, daß eine Reihe von Funktionen $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ auf einer Menge X *punktweise* bzw. *gleichmäßig konvergiert* , wenn dies für die Folge der Partialsummen gilt.

BEMERKUNG Allgemeiner kann man der Begriff Reihe in jedem normierten Raum F formulieren, da man die Partialsummen definieren kann. Jede Aussage über Folge kann man in eine entspechende Aussage für Reihen umformulieren.

Ist F ein Banachraum, so sind die Cauchykriterien für Folgen 5.12 und für Reihen 6.4 auch gültig, wenn man $\mathbb{C}$ durch F und den Betrag durch die Norm $\|\cdot\|$ ersetzt.

DEFINITION 2 Eine Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ in einem normierten Raum F heißt *normal konvergent* falls die Reihe der Normen $\sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\|$ konvergent ist.

HAUPTSATZ *Eine normal konvergente Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ in einem Banachraum F ist konvergent und es gilt*

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} f_l \right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\| \ .$$

Wir wenden dieses Kriterium in diesem Paragraph auf Reihen von beschränkten Funktionen auf einer Menge X bzw. von stetigen und beschränkten Funktionen auf einem metrischen Raum an, da $\ell^{\infty}(X)$ bzw. $\mathcal{C}^b(X)$ Banachräume sind (Hauptsätze 10.4 und 10.5).

BEISPIEL Die Funktionenreihen

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{ik\cdot \mathrm{id}}}{k^2} \quad , \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(k \cdot \mathrm{id})}{k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(k \cdot \mathrm{id})}{k^2}$$

sind auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent und definieren stetige Funktionen.

Aufgabe

(a) Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha \cdot u} \cdot u^k \cdot du = \frac{(-1)^k}{\alpha^{k+1}} \cdot k! \ .$$

(b) Beweisen Sie die Identität

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^{\mathrm{id}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \ ,$$

indem Sie den Integranden als Exponential-Reihe schreiben.

10.8 Potenzreihen

Für alle $r \in \mathbb{R}_+$, setzt man

$$\mathbb{B}(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$$

und

$$\mathbb{D}(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\} \ .$$

HAUPTSATZ *Sei $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l$ eine Potenzreihe deren Konvergenzradius R ist. Für alle $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r < R$ sind die Potenzreihen*

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l \quad \textit{und} \quad \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-1}$$

auf $\mathbb{B}(r)$ gleichmäßig konvergent und definieren stetige Funktion in $\mathbb{D}(R)$.

BEMERKUNG Die beiden Potenzreihen

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-1}$$

haben gleichen Konvergenzradius.

KOROLLAR *Die Funktion*

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot x^l$$

ist unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(k)} = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{l!}{(l-k)!} \cdot c_l \cdot \mathrm{id}^{l-k} \ .$$

Insbesondere ist

$$c_l = \frac{1}{l!} \cdot f^{(l)}(0)$$

und die Taylorreihe von f in der Nähe von 0 ist $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l$.

BEISPIEL 1 Das Korollar erlaubt eine andere Behandlung der Taylorreihe von $\ln(1+\cdot)$ in der Nähe von 0 (vgl. Beispiele 8.13.3 und 9.12).

Die Potenzreihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot \mathrm{id}^l$ hat 1 als Konvergenzradius und definiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf $]-1, 1[$, die das Anfangswertproblem

$$f' = \frac{1}{1+\mathrm{id}} \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

erfüllt.

Um das Resultat auf $]-1,1]$ zu bekommen muß man feiner sein und benötigt den abelschen Grenzwertsatz 10.10.

BEISPIEL 2 Für alle $x \in \left]-1,1\right[$ gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} l \cdot x^l = x \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} x^l\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \ .$$

Solchen Resultate haben wir schon mit Cauchyprodukten erzielt (vgl. Übung 6.15).

Aufgabe 1 Binomial-Reihe Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{l=1}^{k} \frac{\alpha - l + 1}{l} \ .$$

(a) Zeigen Sie, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \cdot \mathrm{id}^l$$

1 ist.

(b) Man betrachte die Funktion $f : \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \cdot x^l \ .$$

Zeigen Sie, daß f Lösung des Anfangswertproblems

$$(1+\mathrm{id}) \cdot f' = \alpha \cdot f \quad \text{und} \quad f(0) = 1 \qquad (*)$$

ist.

(c) Zeigen Sie, daß $(*)$ genau eine Lösung besitzt und folgern Sie, daß

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \cdot x^l \quad \text{für alle } x \in \left]-1,1\right[\ .$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß für alle $\alpha \in \left]0,1\right[$ und $x \in \left[0,1\right[$ gilt

$$1 - \alpha x - \frac{x^2}{1-x} \leqslant (1-x)^{\alpha} \ .$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Taylorreihe von arcsin in der Nähe von 0 und zeigen Sie mit Hilfe der ersten Aufgabe, daß sie diese Funktion auf $[-1,1]$ darstellt.

Man zeige durch Induktion, daß gilt

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} \leqslant (k+1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Was kann man für die Taylorreihe von arccos in der Nähe von 0 sagen ?

10.9 Dirichletkriterium

HAUPTSATZ *Seien X eine Menge und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von beschränkten Funktionen auf X . Man nehme an, daß*

(i)
$$\sup_k \left\| \sum_{l=0}^{k} g_l \right\|_\infty < \infty \ .$$

(ii)
$$\lim_k f_k = 0 \quad \textit{gleichmäßig auf } X \ .$$

(iii)
$$\sum_{l=0}^{\infty} |f_l - f_{l+1}| \quad \textit{konvergiert gleichmäßig auf } X \ .$$

Dann konvergiert $\sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot g_l$ gleichmäßig auf X .

BEMERKUNG Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert, dann ist die Bedingung (iii) erfüllt.

BEISPIEL Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $\mathbb{R}_+$ die gegen 0 konvergiert. Dann ist die Potenzreihe $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l$ gleichmäßig konvergent auf

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1 \text{ und } |z-1| \geqslant \varepsilon\} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \ ,$$

und definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{B}(1) \setminus \{1\}$.

Insbesondere sind die Reihen

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{i\cdot l\cdot \mathrm{id}}}{l} \quad , \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(l\cdot \mathrm{id})}{l} \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(l\cdot \mathrm{id})}{l}$$

für alle $\delta > 0$ gleichmäßig auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ konvergent, und definieren stetige Funktionen auf $]0, 2\pi[$.

ANWENDUNG Es gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(l\cdot \mathrm{id})}{l^2} = \left(\frac{\mathrm{id} - \pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{auf } [0, 2\pi] \ .$$

Insbesondere ist

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^2} = -\frac{\pi^2}{12} \ .$$

10.10 Abelkriterium

HAUPTSATZ *Seien X eine Menge und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von beschränkten Funktionen auf X . Man nehme an, daß*

(i)

$$\sum_{l=0}^{\infty} g_l \quad \textit{konvergiert gleichmäßig auf } X \ .$$

(ii)

$$\sum_{l=1}^{\infty} |f_l - f_{l-1}| \quad \textit{definiert punktweise eine beschränkte Funktion auf } X \ .$$

Dann konvergiert $\sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot g_l$ gleichmäßig auf X .

KOROLLAR (Abelscher Grenzwertsatz) *Sei $\sum_{l=0}^{\infty} c_l$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{C}$.*

Dann ist die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \mathrm{id}^l$ auf $[-1+\varepsilon, 1]$ für alle $\varepsilon > 0$ gleichmäßig konvergent und definiert eine stetige Funktion auf $]-1, 1]$.

Insbesondere gilt

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l = \lim_{x\to 1-} \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot x^l \ .$$

10.11 Die Taylorreihe von arctan

SATZ *Es gilt*

$$\arctan = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot \mathrm{id}^{2l+1} \quad \textit{gleichmäßig auf } [-1,1] \ .$$

Insbesondere ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4} \ .$$

BEMERKUNG Obige Reihe konvergiert nicht schnell genug um π numerisch vernünftig auszurechnen. Man benutzt folgende Formel, die aus der Funktionalgleichung von arctan folgt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-x\cdot y} \quad \text{falls } \left|\arctan x + \arctan y\right| < \frac{\pi}{2} \ .$$

KOROLLAR (Formel von Machin) [2] *Es gilt*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} =$$

$$= 4 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2l+1} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot \left(\frac{1}{239}\right)^{2l+1} \ .$$

Der Fehler, wenn man k Terme berücksichtigt, kann man abschätzen:

$$\left| \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \cdot x^{2l+1} \right| \leqslant \frac{|x|^{2k+3}}{2k+3} \cdot \frac{1}{1-|x|^2} \ .$$

Man bekommt 8 exakte Dezimalstellen mit 5 Termen und 100 exakte Dezimalstellen mit 87 Termen. In 1873 hat Shanks mit Hilfe dieser Formel 707 exakte Dezimale von π gerechnet.

[2] John Machin, 1680 - 1752.

10.12 Die Topologie eines metrischen Raumes

Wir erinern an die Definition 5.1.2 : für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$ bezeichnet man mit

$$B(x,r) := \{y \in X \mid d(y,x) \leqslant r\}$$

die abgeschlossene Kugel mit Zentrum x und Radius r .

DEFINITION Seien $x \in X$ und V eine Teilmenge von X . Man sagt, daß V eine *Umgebung* von x (in X) ist, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x,\varepsilon) \subset V$.

Sei A eine Teilmenge A von X . Man sagt, daß $x \in X$ ein *innerer Punkt* von A (in X) ist, falls A eine Umgebung von x ist. Man bezeichnet mit A° die Menge aller inneren Punkte von A und heißt das *Innere* von A (in X) .

Eine Teilmenge U von X heißt *offen* (in X) , falls U eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x,\varepsilon) \subset U$, oder falls gilt $U = U^\circ$. Die Menge $\mathfrak{T}(X,d)$ aller offenen Teilmengen in X heißt die *Topologie* des metrischen Raumes X . Es gilt

$$\mathfrak{T}(X,d) \subset \mathfrak{P}(X) \ .$$

Eine Teilmenge A von X heißt *abgeschlossen* (in X) , falls die komplementäre Menge

$$\complement A = X \setminus A$$

in X offen ist.

SATZ *Die Topologie von X erfüllt folgende Eigenschaften :*

(i) $\emptyset$ *und* X *sind offen in* X *.*

(ii) *Sind* U *und* V *offen in* X *, so ist* $U \cap V$ *in* X *offen.*

(iii) *Ist* $(U_j)_{j\in J}$ *eine Familie von offenen Teilmengen in* X *, so ist* $\bigcup_{j\in J} U_j$ *in* X *offen.*

Durch Komplementbildung gilt

KOROLLAR

(i) $\emptyset$ *und* X *sind abgeschlossen in* X *.*

(ii) *Sind* A *und* B *in* X *abgeschlossen, so ist* $A \cup B$ *in* X *abgeschlossen.*

(iii) *Ist* $(A_j)_{j\in J}$ *eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von* X *, so ist* $\bigcap_{j\in J} A_j$ *in* X *abgeschlossen.*

BEISPIEL 1 Für alle $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a \leqslant b$, ist das offene Intervall $]a,b[$ in $\mathbb{R}$ offen. Sind $a,b \in \mathbb{R}$, so sind die abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$, $]-\infty,b]$ und $[a,\infty[$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen. Das Intervall $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$ ist sowohl offen wie abgeschlossen.

BEISPIEL 2 Für jedes Intervall J von $\mathbb{R}$ ist das Innere J° gleich $]\inf J, \sup J[$; dies stimmt mit der Definition 8.4 überein. Insbesondere ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das Intervall $[a, b[$ nicht offen. Es ist auch nicht abgeschlossen.

BEISPIEL 3 Für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$ ist die abgeschlossene Kugel $B(x, r)$ in X abgeschlossen.

BEISPIEL 4 Für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$ ist die offene Kugel mit Zentrum x und Radius r

$$D(x, r) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$$

in X offen.

BEMERKUNG Für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset D(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon) \ .$$

In der Definition einer Umgebung von x kann man $B(x, \varepsilon)$ durch $D(x, \varepsilon)$ ersetzen.

BEISPIEL 5 Für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$ gilt $D(x, r) \subset B(x, r)^\circ$.

BEISPIEL 6 Die Gleichung $D(x, r) = B(x, r)^\circ$ ist i.a. falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

Ist X eine Menge, so ist

$$X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \neq y \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = y \end{cases}$$

eine Metrik auf X , die sogenannte *diskrete Metrik* .

Für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$B(x, r) = \begin{cases} X & \text{falls} \quad r \geqslant 1 \\ \{x\} & \phantom{\text{falls}} \quad r < 1 \end{cases} ,$$

und

$$D(x, r) = \begin{cases} X & \text{falls} \quad r > 1 \\ \{x\} & \phantom{\text{falls}} \quad r \leqslant 1 \end{cases} ,$$

also

$$B(x, r)^\circ = B(x, r) \ .$$

Insbesondere ist $B(x, r)$ sowohl offen wie abgeschlossen. Es gilt

$$D(x, 1) = \{x\} \neq X = B(x, 1)^\circ ,$$

solange X mindestens zwei Elemente besitzt.

BEISPIEL 7 Durch Induktion ist ein endlicher Durchschnitt von offenen Teilmengen in X in X offen. Aber ein nicht-endlicher Durchschnitt von offenen Teilmengen braucht nicht offen zu sein wie das Beispiel

$$[0,1] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} \right[$$

in $\mathbb{R}$ zeigt.

BEISPIEL 8 Für alle $a, b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $a \leqslant b$ sind die Intervalle der Form $[0, b[$ und $]a, b[$ in $\mathbb{R}_+$ offen. Ist $b \in \mathbb{R}_+$, so ist $[a, b]$ in $\mathbb{R}_+$ abgeschlossen. Dies gilt auch für $[a, \infty[$.

Aufgabe 1 Seien Y eine Teilmenge in X und d_Y die von X auf Y induzierte Metrik (vgl. Beispiel 5.1.2). Zeigen Sie :

(a) Für alle $y \in Y$ und $r \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$B(y, r, d_Y) = B(y, r, d_X) \cap Y \ .$$

(b) Eine Teilmenge V von Y ist genau dann in Y offen, wenn eine in X offene Teilmenge U existiert mit $V = U \cap Y$.

(c) Aber Achtung, die Teilmengen die in Y offen sind, stimmen nicht mit den offenen Teilmengen in X , die in Y enthalten sind. Geben Sie ein Beispiel dafür.

(d) Ist Y in X offen, so ist eine Teilmenge V von Y genau dann in Y offen, wenn sie in X offen ist.

(e) Ist die Menge $\{z \in \mathbb{U} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ offen in $\mathbb{U}$? Ist sie offen in $\mathbb{C}$?

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die Diagonale

$$\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X \mid y = x\}$$

in $X \times X$ abgeschlossen ist.

10.13 Äquivalente metrische Räume

DEFINITION 1 Sei X eine Menge die mit zwei Metriken d und $\tilde{d}$ versehen ist. Man sagt, daß diese Metriken d und $\tilde{d}$ *äquivalent* sind, wenn die zugehörigen Topologien gleich sind, d.h.

$$\mathfrak{T}(X,d) = \mathfrak{T}\left(X,\tilde{d}\right) \ .$$

SATZ *Genau dann gilt* $\mathfrak{T}(X,d) \subset \mathfrak{T}\left(X,\tilde{d}\right)$ *, wenn für jedes* $x \in X$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit*

$$B\left(x,\delta,\tilde{d}\right) \subset B(x,\varepsilon,d) \ .$$

HAUPTSATZ *Für alle* $p \in [1,\infty]$ *gilt*

$$|\cdot|_\infty \leqslant |\cdot|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \cdot |\cdot|_\infty \quad \textit{auf } \mathbb{K}^n \ .$$

Insbesondere sind die Metriken auf $\mathbb{K}^n$ *, die von den Normen* $|\cdot|_p$ *definiert sind, zueinander äquivalent.*

BEMERKUNG 1 Die Metriken d_1 , d_2 und d_∞ , die auf dem Produkt von zwei metrischen Räume definiert sind (vgl. Beispiel 5.1.4), sind zueinander äquivalent.

BEMERKUNG 2 Im folgenden werden wir sehen, daß fast alle Begriffe die in Verbindung mit metrischen Räume aufgekommen sind, nur von der Topologie abhängen, d.h. daß diese Begriffe nur mit den offenen Teilmengen formulierbar sind. Insbesondere stimmen diese Begriffe für verschiedene aber äquivalente Metriken überein.

DEFINITION 2 Ein topologischer Raum ist ein Menge X versehen mit einer Familie von Teilmengen $\mathfrak{T}$, d.h. $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(X)$, die die Eigenschaften aus Satz 10.12 erfüllt.

BEMERKUNG 3 Die Vollständigkeit eines metrischen Raumes hängt wesentlich von der Metrik ab. Sie ist also kein topologischer Begriff.

BEISPIEL Man kann zeigen (Aufgabe), daß

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \longmapsto |\arctan x - \arctan y|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist, die zur üblichen Metrik äquivalent ist, aber für die $\mathbb{R}$ nicht vollständig ist. Z.B. ist die Folge $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge die in $\mathbb{R}$ nicht konvergent ist !

KOROLLAR $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$ *ist vollständig.*

10.14 Konvergenz und Topologie

Man beachte zuerst, daß der Begriff Umgebung nur von der Topologie abhängt :

LEMMA *Seien $x \in X$ und $V \subset X$. Genau dann ist V eine Umgebung von x , wenn eine offene Teilmenge U in X existiert mit*

$$x \in U \subset V \ .$$

SATZ *Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$. Genau dann konvergiert $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x , wenn für jede Umgebung V von x gilt $x_k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$ außer endlich vielen.*

KOROLLAR *Die Konvergenz einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$ hängt nicht von der gewählten Norm $|\cdot|_p$ ab.*

Genau dann ist die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$ konvergent, wenn die Folgen der Komponenten $(x_{k,j})_{k\in\mathbb{N}}$ für $j = 1, \ldots, n$ in $\mathbb{K}$ konvergent sind. Es gilt dann

$$\lim_k x_k = (\lim_k x_{k,j})_{j=1,\ldots,n} \ .$$

10.15 Stetigkeit und Topologie

SATZ *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

(i) Genau dann ist f in $x \in X$ stetig, wenn für alle Umgebungen V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert mit

$$f(U) \subset V \ .$$

(ii) Genau dann ist f stetig, wenn für jede offene bzw. abgeschlossene Teilmengen B von Y das Urbild $\overset{-1}{f}(B)$ in X offen bzw. abgeschlossen ist.

BEISPIEL 1 Die Mengen

$$B(x,r) = d_X(x,\cdot)^{-1}([0,r]) \quad \text{und} \quad D(x,r) = d_X(x,\cdot)^{-1}([0,r[)$$

sind in X abgeschlossen bzw. offen, da nach Beispiel 7.3.6 die Funktion $d_X(x,\cdot)$ stetig ist und die Intervalle $[0,r]$ und $[0,r[$ in $\mathbb{R}_+$ aggeschlossen bzw. offen sind.

BEISPIEL 2 Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ offene bzw. abgeschlossene Teilmengen, so sind

$$A \times Y \quad , \quad X \times B \quad \text{und} \quad A \times B$$

in $X \times Y$ offen bzw. abgeschlossen.

Man beachte, daß

$$A \times Y = \mathrm{pr}_1^{-1}(A) \quad , \quad X \times B = \mathrm{pr}_2^{-1}(B) \quad \text{und} \quad A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$$

(siehe Beispiel 7.2.3).

BEISPIEL 3 $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ abgeschlossen.

Es gilt

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\} = \operatorname{Im}^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Im}^{-1}(B(0,0)) \ .$$

Aufgabe Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{C}$, $h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, daß für jede abgeschlossene Menge A in $X \times Y$ die Menge

$$\{(x,y) \in A \mid f(x) \cdot g(y) = h(x,y)\}$$

abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß für jede offene Menge O in $X \times Y$ die Bilder $\mathrm{pr}_1(O)$ und $\mathrm{pr}_2(O)$ offen sind.

(c) Finden Sie mittels Teil (a) eine abgeschlossene Menge H in $\mathbb{R}^2$ für die

$$\mathrm{pr}_1(H) = \mathrm{pr}_2(H) = \left]0,\infty\right[$$

gilt.

10.16 Abschluß einer Menge

DEFINITION Seien A eine Teilmenge von X und $x \in X$. Man sagt, daß x ein *Berührungspunkt* von A , falls für jede Umgebung V von x (in X) gilt $V \cap A \neq \emptyset$. Man bezeichnet mit $\overline{A}$ die Menge aller Berürungspunkte von A und nennt diese Menge der *Abschluß* von A . Wir bezeichnen mit $\mathrm{Rd}\,(A)$ die Menge der Punkte in X , die sowohl Berürungspunkte von A wie von $\complement A$ adhärent sind. Sie heißt *topologischer Rand* (oder *Grenze*) von A .

Es gilt

$$\complement\overline{A} := \left(\complement A\right)^{\circ} \quad \text{und} \quad \mathrm{Rd}\,(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement A} \ .$$

SATZ *Sei A eine Teilmenge von X .*

(i) A° *die größte offene Teilmenge, die in A enthalten ist.*

(ii) *Der Abschluß $\overline{A}$ von A ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die A enthält.*

(iii) *Genau dann ist eine Teilmenge A von X abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$.*

HAUPTSATZ *Sei A eine Teilmenge von X . Genau dann ist A abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A , die in X konvergent ist, gilt* $\lim_k x_k \in A$.

BEMERKUNG Dieser Satz verallgemeinert den Satz und das Korollar 5.9.

KOROLLAR *Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist bzgl. der induzierten Metrik vollständig.*

Aufgabe 1 Zeigen Sie für alle Teilmengen A, B von X , daß

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{und} \quad (A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$$

gilt.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie zwei Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$, so daß die Mengen

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \ , \ A^{\circ} \cap B \ , \ A \cap B^{\circ} \ , \ A \cap B \ , \ \overline{A} \cap B \ , \ A \cap \overline{B} \ , \ \overline{A \cap B} \ , \ \overline{A} \cap \overline{B}$$

alle voneinander verschieden sind.

Aufgabe 3 Seien A, B Teilmengen von X . Zeigen Sie :

(a) Die Funktion

$$d(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

ist gleichmäßig stetig.

(b) **Lemma von Urysohn** Sind A, B abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es eine stetige Funktion

$$f : X \longrightarrow [0, 1]$$

mit

$$f = 0 \quad \text{auf } A \quad \text{und} \quad f = 1 \quad \text{auf } B\ .$$

Man kann eine solche Funktion, da X metrisch ist, konkret angeben.

(c) Seien Y ein metrischer Raum und $\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$. Für alle $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ mit $f = g$ auf A gilt

$$f = g \quad \text{auf } \overline{A}\ .$$

(d) Die folgenden vier Mengen

$$\overline{A}$$

$$\{x \in X \mid d(x, A) = 0\}\ ,$$

$$\left\{x \in X \mid \exists\, (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A \text{ mit } x = \lim_k x_k\right\}$$

und

$$\{x \in X \mid f(x) \leqslant \sup f(A) \text{ für alle } f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})\}$$

sind gleich.

10.17 Kompaktheit

DEFINITION Sei K eine Teilmenge von X . Eine Familie $(U_j)_{j\in J}$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* von K , falls

$$K \subset \bigcup_{j\in J} U_j \ .$$

Sie heißt eine *offene Überdeckung* von K , falls zusätzlich alle U_j offen sind.

Man sagt, daß K *kompakt* ist, falls jede offene Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von K eine endliche Teilüberdeckung von K enhält, d.h. falls eine endliche Teilmenge $I \subset J$ existiert mit

$$K \subset \bigcup_{j\in I} U_j \ .$$

BEMERKUNG 1 Die Kompaktheit hängt nur von der Topologie ab.

BEISPIEL 1 Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in X gegen x konvergente Folge. Dann ist

$$\{x\} \cup \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

kompakt.

BEISPIEL 2 Seien K eine kompakte Teilmenge von X und L eine in X abgeschlossene Teilmenge, die in K enhalten ist. Dann ist L kompakt.

BEISPIEL 3 Ist $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng wachsende Folge von offenen Mengen in X , dann ist $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ nicht kompakt. Z.B. ist jedes offene Intervall $]a,b[$ in $\mathbb{R}$ nicht kompakt.

Aufgabe 1 Sind X, Y metrischen Räume, $K \subset X$ und $L \subset Y$ kompakte Teilmengen, so ist $K \times L$ in $X \times Y$ kompakt. Die Umkehrung ist richtig, falls K und L nicht leer sind.

DEFINITION 1 Ist A eine Teilmenge in X , so heißt

$$diam\,(A) := \sup\nolimits_{x,y\in A} d\,(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

das *Durchmesser von A* .

Ist A in eine abgeschlossene Kugel mit Radius r enthalten, dann gilt $diam\,(A) \leqslant 2r$. Ist $d \in \mathbb{R}_+$ das Durchmesser von A , so ist A in eine abgeschlossene Kugel mit Radius d enthalten.

DEFINITION 2 Eine Teilmenge K in X heißt *präkompakt* (oder *total beschränkt*), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $(A_k)_{k=0,\ldots,m}$ von K mit *diam* $(A_k) \leqslant \varepsilon$ für alle $k = 0, \ldots, m$ existiert.

Äquivalenterweise existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Folge $(x_k)_{k=0,\ldots,m}$ in X , so daß $(B(x_k, \varepsilon))_{k=0,\ldots,m}$ eine Überdeckung von K ist.

BEMERKUNG 2 Eine kompakte Menge ist präkompakt.

BEMERKUNG 3 Das Durchmesser einer präkompakte Menge ist endlich.

HAUPTSATZ *Sei K eine Teilmenge von X . Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) *K ist kompakt.*

(ii) ***Bolzano- WeierstrassEigenschaft*** *Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K besitzt eine in K konvergente Teilfolge.*

(iii) *K ist bzgl. der induzierten Metrik vollständig, und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Folge $(x_k)_{k=0,\ldots,m}$ in X , so daß $(B(x_k, \varepsilon))_{k=0,\ldots,m}$ eine Überdeckung von K ist, d.h.*

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{m} B(x_k, \varepsilon) \ .$$

KOROLLAR *Eine kompakte Teilmenge K ist abgeschlossen.*

Aufgabe 2 **Satz von Dini** Seien K eine kompakte Teilmenge in einem metrischen Raum X und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von stetigen Funktionen auf X . Konvergiert diese Folge punktweise gegen 0 , so konvergiert sie gleichmäßig auf K gegen 0 .

Aufgabe 3 Sei X ein metrischer Raum. Eine Familie $(A_j)_{j\in J}$ von Teilmengen aus X besitzt die *endliche Durchschnittseigenschaft* , falls für jede endliche Teilmenge I von J

$$\bigcap_{j\in I} A_j \neq \emptyset \ .$$

ist.

(a) Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\left]0, \frac{1}{k}\right]\right)_{k\in\mathbb{N}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, aber

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{k}\right] = \emptyset \ .$$

ist.

(b) Sei $K \subset X$ kompakt und $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abgeschlossener Teilmenge von K mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Zeigen Sie

$$\bigcap_{j\in I} A_j \neq \emptyset \ .$$

Aufgabe 4 Seien Y eine Teilmenge in X , d_Y die von X auf Y induzierte Metrik und $K \subset Y$. Genau dann ist K kompakt in (Y, d_Y) , wenn K kompakt in (X, d_X) ist.

10.18 Satz von Heine-Borel

DEFINITION Eine Teilmenge A eines normierten Raumes F heißt *beschränkt* falls

$$\sup_{f \in A} \|f\| < \infty \ ,$$

d.h. falls ein $M \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $\|f\| \leqslant M$ für alle $f \in A$.

Berücksichtig man die Charakterisierung einer kompakten Menge durch die Bolzano-Weierstraß Eigenschaft (Hauptsatz 10.17), so verallgemeinert der folgende Satz den Hauptsatz von Bolzano-Weierstraß 5.11.

HAUPTSATZ *Genau dann ist eine Teilmenge $K \subset \mathbb{K}^n$ kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt (für eine der Normen $|\cdot|_p$) ist.*

BEISPIEL Die abgeschlossenen Kugeln $B\left(z, r, |\cdot|_p\right)$ von $\mathbb{K}^n$ für $z \in \mathbb{K}^n$ und $r \in \mathbb{R}_+$ sind kompakt. Dies gilt auch für die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ ist.

BEMERKUNG Der Satz ist für jeden Banachraum unendlicher Dimension falsch. Man kann zeigen, daß jeder Banachraum, dessen Einheitskugel kompakt ist, endlich dimensional ist (Satz von Riesz, vgl. Funktional Analysis). In manchen Fälle kann man leicht zeigen, daß die Einheitskugel nicht kompakt ist (vgl. nachfolgende Aufgabe 2).

KOROLLAR *Sei K eine nicht-leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sup K \ , \ \inf K \in K \quad \textit{und} \quad K \subset [\inf K, \sup K] \ .$$

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \text{ und } x_n \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt ist.

Aufgabe 2 Folgendes einfaches Beispiel zeigt, daß der Satz von Heine-Borel in unendlich dimensionalen Banachräume nicht gültig ist. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Folge $(f_k) \subset \mathcal{C}([0,1])$ mit $\|f_k\|_\infty = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\|f_k - f_j\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } k, j \in \mathbb{N} \text{ mit } k \neq j \ .$$

(b) Die Einheitskugel

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \|f\|_\infty \leqslant 1\}$$

in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht kompakt (obwohl sie abgeschlossen und beschränkt ist).

10.19 Bild einer kompakten Menge

HAUPTSATZ *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist K eine kompakte Teilmenge von X , so ist $f(K)$ eine kompakte Teilmenge von Y .*

Nun können wir den Satz von Weierstraß 7.10 verallgemeinern.

KOROLLAR *Seien $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und K eine nicht leere kompakte Teilmenge von X . Dann ist f auf K beschränkt und nimmt ihren Maximum sowie ihren Minimum in K an, d.h. es existieren $x, y \in K$ mit*

$$f(x) = \sup f(K) \quad \textit{und} \quad f(y) = \inf f(K) \ .$$

BEISPIEL Ist K kompakt nicht leer, so existieren $x, y \in K$ mit

$$diam(K) = d(x, y) \ .$$

Aufgabe 1 Man sagt eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *verschwinde im Unendlichen* falls für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge K von X existiert, so daß

$$|f| \leqslant \varepsilon \quad \text{auf } X \setminus K$$

gilt. Man bezeichne mit $\mathcal{C}^0(X)$ die Menge aller dieser Funktionen. Zeigen Sie, daß $\mathcal{C}^0(X) \subset \mathcal{C}^b(X)$ gilt.

Aufgabe 2 Seien $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Funktion mit $\{F = 0\} \neq \emptyset$ und $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ein $y \in \{F = 0\}$ existiert, so daß

$$|x - y|_p = d_p(x, \{F = 0\}) \ .$$

Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 10.16.3.ii, sowie eine abgeschlossene Kugel mit einem Radius groß genug.

10.20 Homöomorphismen

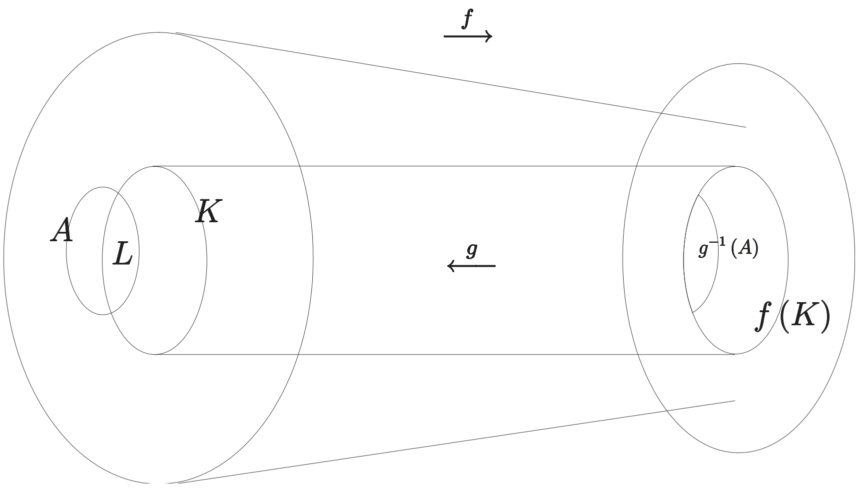
DEFINITION Eine bijektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus* , wenn f und $\overset{-1}{f}$ stetig sind.

Dies bedeutet, daß die offenen wie die abgeschlossenen Mengen in X und Y in ein-eindeutige Beziehung mit f und $\overset{-1}{f}$ stehen.

HAUPTSATZ *Seien X, Y metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und K eine kompakte Teilmenge von X , so daß $f_{|K}$ injektiv ist. Dann ist*

$$\left(f_{|K}\right)^{-1} : f(K) \longrightarrow X$$

stetig. Insbesondere ist $f : K \longrightarrow f(K)$ ein Homöomorphismus.



SCHOLIE *Ist X kompakt und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild $Y = f(X)$ kompakt und $\overset{-1}{f} : Y \longrightarrow X$ ist stetig.*

Jetzt können wir den Hauptsatz über die Umkehrfunktion 7.11 verallgemeinern.

KOROLLAR *Seien $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige bijektive Abbildung und $(K_j)_{j\in J}$ eine Familie von kompakten Teilmengen von X . Die folgenden Eigenschaften sint äquivalent :*

(i) f *ist ein Homöomorphismus und es gilt* $X = \bigcup_{j\in J} K_j{}^\circ$.

(ii) *Es gilt* $X = \bigcup_{j\in J} K_j{}^\circ$ *und jede Teilmenge* $f(K_j{}^\circ)$ *ist in* Y *offen.*

(iii) *Es gilt* $Y = \bigcup_{j\in J} f(K_j)^\circ$.

Aufgabe Gegeben sei die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (e^x + y, e^y + y) \ .$$

(a) Zeigen Sie: Φ ist stetig und injektiv.

(b) Bestimmen Sie das Bild unter Φ der Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, welche gegeben sind durch die Gleichungen

(i)

$$x = a \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \ .$$

(ii)

$$y = b \quad \text{für } b \in \mathbb{R} \ .$$

(c) Bestimmen Sie $Y := \Phi\left(\mathbb{R}^2\right)$.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$$

ein Homöomorphismus ist.

Hinweis : Beweisen Sie und benutzen Sie, daß die Funktion

$$f := \exp + \mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto e^x + x$$

ein Homöomorphismus ist.

10.21 Gleichmäßig stetige Abbildungen

Hier ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Heine 12.4.

SATZ *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist K eine kompakte Teilmenge von X , so ist $f_{|K}$ gleichmäßig stetig.*

DEFINITION Eine Teilmenge A von X heißt *dicht* (in X) falls $\overline{A} = X$.

Nach der Aufgabe 10.16.2.(c) bedeutet dies, daß für alle $x \in X$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A existiert mit $x = \lim_k x_k$.

BEISPIEL 1 $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$. Allgemeiner ist $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{Q}^n + i \cdot \mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{C}^n$.

Die Menge $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist auch in $\mathbb{R}$ dicht. Insbesondere gilt

$$\mathrm{Rd}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \ .$$

BEISPIEL 2 Für alle $p \in [1, \infty]$, $z \in \mathbb{K}^n$ und $r > 0$ ist die offene Kugel $D\left(z, r, |\cdot|_p\right)$ dicht in die abgeschlossene Kugel $B\left(z, r, |\cdot|_p\right)$. Insbesondere ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das offene Intervall $]a, b[$ dicht im abgeschlossen Intervall $[a, b]$.

Es gilt

$$\mathrm{Rd}\left(D\left(z, r, |\cdot|_p\right)\right) = \mathrm{Rd}\left(B\left(z, r, |\cdot|_p\right)\right) = \left\{w \in \mathbb{K}^n \mid |w|_p = r\right\} \quad \text{in } \mathbb{K}^n$$

und

$$\mathrm{Rd}\,(]a, b[) = \mathrm{Rd}\,([a, b]) = \{a, b\} \quad \text{in } \mathbb{R} \ .$$

LEMMA *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X , so ist $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y .*

HAUPTSATZ *Seien X, Y metrische Räume, $Z \subset X$ eine dichte Teilmenge in X und $f : Z \longrightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Ist Y vollständig, so existiert genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ von f . Diese Fortsetzung ist gleichmäßig stetig.*