Kapitel 14

RADON-INTEGRALE

Im weiteren bezeichne X stets einen metrischen Raum,
oder allgemeiner einen (topologischen) Hausdorff-Raum.

Fassung vom 1. November 2005

14.1 Die Additionen in $\overline{\mathbb{R}}$

DEFINITION 1 Wir bezeichnen

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \ .$$

Wir setzen die totale Ordnung und die Multiplikation von $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$-\infty < \alpha < \infty \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

und

$$(\pm\infty) \cdot \alpha = \alpha \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & & 0 < \alpha \leqslant \infty \\ 0 & \text{si} & \alpha = 0 \\ \mp\infty & & -\infty \leqslant \alpha < 0 \end{cases} .$$

fort. Zusätzlich definieren wir

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0 \ .$$

Für eine Teilmenge $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, sei

$$A_+ := \{\alpha \in A \mid \alpha \geqslant 0\} \quad , \quad A_- := \{\alpha \in A \mid \alpha \leqslant 0\} \quad \text{und} \quad A^* := A \smallsetminus \{0\} \ .$$

Sei X eine Menge. Für alle $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ und $x \in X$ definiert man

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \quad , \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad , \quad |f|(x) := |f(x)|$$

und

$$\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x)) \quad , \quad \max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x)) \ .$$

Seien

$$f^{\pm} := \max(\pm f, 0) \quad \text{und} \quad f_- := \min(f, 0) \ .$$

Sei $\mathcal{F} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$. Die Funktionen

$$\sup \mathcal{F} : x \longmapsto \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x) \quad \text{und} \quad \inf \mathcal{F} : x \longmapsto \inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

heißen die *obere* bzw. *untere Einhüllende* von $\mathcal{F}$.

Es gilt

$$|f| = \max(f, -f) \quad \text{und} \quad f^- = -f_- \ .$$

BEMERKUNG Es gibt keine sinnvolle Addition auf $\overline{\mathbb{R}}$.

DEFINITION 2 Die Addition auf $\mathbb{R}$ wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\alpha +^{\bullet} \infty = \infty +^{\bullet} \alpha = \infty \quad \text{für alle } \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$-\infty +^{\bullet} \alpha = \alpha +^{\bullet} (-\infty) = -\infty \quad \text{für alle } \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}$$

fortgesetzt. Man definiert eine andere Addition auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\alpha +_{\bullet} \beta := -\left[(-\alpha) +^{\bullet} (-\beta)\right] \ .$$

Es gilt also

$$\infty +^{\bullet} (-\infty) = (-\infty) +^{\bullet} \infty = \infty \quad \text{und} \quad (-\infty) +_{\bullet} \infty = \infty +_{\bullet} (-\infty) = -\infty \ .$$

In allen anderen Fällen stimmen diese Additionen, insbesondere auf $\widetilde{\mathbb{R}}$, überein und werden dort mit $+$ bezeichnet !

HAUPTSATZ *Die Additionen $+^{\bullet}$ und $+_{\bullet}$ sind assoziativ, kommutativ und mit der Ordnung verträglich. Die Multiplikation von $\mathbb{R}_+$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ist assoziativ und bzgl. der Additionen distributiv.*

Dies führt zur folgende Struktur.

DEFINITION 3 Sei $\mathcal{S}$ ein kommutatives Monoid (additiv geschrieben) mit neutralem Element 0 , versehen mit einer links-Aktion von $\mathbb{R}_+$, die wir mit

$$(\alpha, s) \longmapsto \alpha \cdot s : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

bezeichnen werden. Man sagt, daß $\mathcal{S}$ ein *Konoid* ist, falls diese beiden Strukturen verträglich sind, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ und $s, t, u \in \mathcal{S}$ gilt

(a) $0 \cdot s = 0$.

(b) $\alpha \cdot (\beta \cdot s) = (\alpha \cdot \beta) \cdot s$.

(c) $\alpha \cdot (s + t) = \alpha \cdot s + \beta \cdot t$.

(d) $(\alpha + \beta) \cdot s = \alpha \cdot s + \beta \cdot s$.

Ist zusätzlich $\mathcal{S}$ mit einer (Prä)Ordnung versehen, so heißt $\mathcal{S}$ ein *geordnetes Konoid* , falls die folgenden Verträglichkeitsaxiome erfüllt sind :

(e) $s \leqslant t$ impliziert $s + u \leqslant t + u$.

(f) $s \leqslant t$ impliziert $\alpha \cdot s \leqslant \alpha \cdot t$.

BEISPIEL 1 $\left(\overline{\mathbb{R}}, +^{\bullet}\right)$ und $\left(\overline{\mathbb{R}}, +_{\bullet}\right)$ sind total geordnete Konoide.

DEFINITION 4 Obwohl $+^{\bullet}$ und $+_{\bullet}$ keine Gruppenadditionen sind, definiert man zur Vereinfachung

$$\alpha -^{\bullet} \beta := \alpha +^{\bullet} (-\beta) \quad \text{und} \quad \alpha -_{\bullet} \beta := \alpha +_{\bullet} (-\beta) \ .$$

Sei X eine Menge. Für alle $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ und $x \in X$ definiert man

$$(f +^{\bullet} g)(x) := f(x) +^{\bullet} g(x) \quad \text{und} \quad (f +_{\bullet} g)(x) := f(x) +_{\bullet} g(x) \ .$$

LEMMA *Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ und $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \overline{\mathbb{R}}$, gilt*

(i)

$$\alpha +_{\bullet} \beta \leqslant \alpha +^{\bullet} \beta \ .$$

(ii)

$$\alpha +^{\bullet} \beta = \min(\alpha, \beta) +^{\bullet} \max(\alpha, \beta) \ ,$$

$$\alpha +_{\bullet} \beta = \min(\alpha, \beta) +_{\bullet} \max(\alpha, \beta) \ ,$$

$$\gamma \leqslant \alpha +^{\bullet} \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma -_{\bullet} \beta \leqslant \alpha \ ,$$

und

$$\alpha +_{\bullet} \beta \leqslant \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \leqslant \gamma -^{\bullet} \beta \ .$$

(iii) $-\alpha$ *ist die kleinste Zahl* $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $\alpha +^{\bullet} \beta \geqslant 0$ *, und die größte mit* $\alpha +_{\bullet} \beta \leqslant 0$ *.*

(iv)

$$\inf_{j \in J} (\alpha +^{\bullet} \alpha_j) = \alpha +^{\bullet} \inf_{j \in J} \alpha_j$$

und

$$\sup_{j \in J} (\alpha +_{\bullet} \alpha_j) = \alpha +_{\bullet} \sup_{j \in J} \alpha_j \ .$$

BEISPIEL 2 Es gilt nicht $\sup_{j \in J} (\alpha +^{\bullet} \alpha_j) = \alpha +^{\bullet} \sup_{j \in J} \alpha_j$, wie das Beispiel $\alpha := -\infty$ und $(\alpha_j)_{j \in J} = (k)_{k \in \mathbb{N}}$ zeigt.

KOROLLAR *Sei X eine Menge. Dann sind $\left(\overline{\mathbb{R}}^X, +^{\bullet}\right)$ und $\left(\overline{\mathbb{R}}^X, +_{\bullet}\right)$ geordnete Konoide.*

Für alle $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ gilt zusätzlich

$$f +^{\bullet} g = \min(f, g) +^{\bullet} \max(f, g) \quad , \quad f = f^{+} +^{\bullet} f_{-} = f^{+} -^{\bullet} f^{-}$$

und

$$|f| = f^{+} +^{\bullet} f^{-} \ .$$

DEFINITION 5 Ist $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}_{\widetilde{\mathbb{R}}} \quad , \quad \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \quad , \quad \mathcal{F}_{+} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{-}$$

die Menge aller Funktionen in $\mathcal{F}$, die ihre Werte nur in $\widetilde{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_{+}$ oder $\mathbb{R}_{-}$ annehmen.

Eine Menge von $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen Funktionen heißt *Verband* , falls

$$f \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \min(f, g) \ , \ \max(f, g) \in \mathcal{F} \ .$$

gilt.

Eine Menge von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen heißt *involutiv* , falls

$$f \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \overline{f} \in \mathcal{F} \ .$$

SATZ *Ein Vektorraum von reellen Funktionen $\mathcal{F}$ ist genau dann einen Vektorverband, wenn*

$$f \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad |f| \in \mathcal{F} \ .$$

In diesem Fall gilt für alle $f, g \in \mathcal{F}$

$$\min(f, g) = \frac{1}{2} \cdot (f + g - |f - g|) \quad , \quad \max(f, g) = \frac{1}{2} \cdot (f + g + |f - g|) \quad \in \quad \mathcal{F} \ .$$

DEFINITION 6 Ein Vektorraum von komplexwertigen Funktionen $\mathcal{F}$ heißt *Vektorverband* , falls

$$f \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad |f| \in \mathcal{F} \ .$$

In diesem Fall ist $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ ein Vektorverband im obigen Sinn.

14.2 N.u.h. Funktionen

DEFINITION Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *nach unten halbstetig (n.u.h.)* auf X , falls für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f > \gamma\}$ offen ist.

Dies ist äquivalent dazu, daß für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f \leqslant \gamma\}$ abgeschlossen ist.

BEMERKUNG Die Halbstetigkeit nach unten bedeutet, daß man bei Annäherung an einen Punkt nur nach unten springen kann ! Siehe die unten stehende Aufgabe.

BEISPIEL 1 Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f n.u.h.

BEISPIEL 2 Ist G eine offene und F eine abgeschlossene Teilmenge von X , so sind 1_G und -1_F n.u.h.

BEISPIEL 3 Ist F eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $F \neq \emptyset, \mathbb{R}$, so ist die Funktion 1_F auf $\mathbb{R}$ nicht n.u.h.

BEISPIEL 4 Sei Y eine offene Teilmenge von X und $f : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ eine n.u.h. Funktion. Dann ist ihre Fortsetzung f_0 auf X durch 0 außerhalb von Y auch n.u.h.

SATZ *Seien $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{F} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ n.u.h. Funktionen. Dann sind die Funktionen*

$$\alpha f \quad , \quad \min(f, g) \quad , \quad \max(f, g) \quad \textit{und} \quad \sup \mathcal{F}$$

n.u.h.

Die Funktion $f +_{\bullet} g$ ist n.u.h., sowie $f \cdot g$ falls $f, g \geqslant 0$.

BEISPIEL 5 Die Funktion $\inf \mathcal{F}$ ist im allgemeinen nicht n.u.h., wie das Beispiel

$$\inf_k \mathrm{id}^k = 1_{\{1\}}$$

auf $[0, 1]$ zeigt.

BEISPIEL 6 Die Funktionen $f := \frac{1}{\sqrt{\mathrm{id}}}$ und $g := -\frac{1}{\mathrm{id}}$ sind auf $[0, 1]$ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ n.u.h. In 0 nehmen sie die Werte ∞ bzw. $-\infty$ an. Es gilt

$$(f +^{\bullet} g)(0) = \infty \quad , \text{aber} \quad \lim_{x \to 0+} (f +^{\bullet} g)(x) = -\infty \ ,$$

d.h. $f +^{\bullet} g$ ist nicht n.u.h. Man kann auch bemerken, daß die Menge $\{f +^{\bullet} g > 0\} = \{0\}$ nicht offen ist.

BEISPIEL 7 Die Funktionen $-1_{[1,3]}$ und $1_{]0,2[}$ sind n.u.h., aber $-1_{[1,3]} \cdot 1_{]0,2[} = -1_{[1,2[}$ ist es nicht.

Aufgabe Sei X ein metrischer Raum und $x \in X$. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt in x nach unten halbstetig, falls zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < f(x)$ eine Umgebung U von x existiert mit $\alpha < f(y)$ für alle $y \in U$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist genau dann n.u.h., falls f in jedem Punkt $x \in X$ nach unten halbstetig ist.

(b) Die Funktion f ist genau dann in $x \in X$ nach unten halbstetig, falls für jede gegen x konvergente Folge $(x_k)_k$ gilt

$$\liminf_k (x_k) \geqslant f(x) \ .$$

14.3 Der Satz von Dini

DEFINITION Eine Familie von Funktionen $\mathcal{F}$ heißt *nach oben gerichtet* , falls für alle $f, g \in \mathcal{F}$ ein $h \in \mathcal{F}$ existiert mit $f, g \leqslant h$.

Eine wachsende Folge von Funktionen ist nach oben gerichtet.

HAUPTSATZ

(i) Ist $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ n.u.h. , dann existiert für jede kompakte Menge $K \subset X$ ein $x \in K$ mit

$$f(x) = \inf f(K) \ .$$

(ii) ***Satz von Dini*** *Ist $\mathcal{F}$ eine nach oben gerichtete Familie n.u.h. Funktionen mit* $\sup \mathcal{F} = 0$ *und ist $K \subset X$ kompakt, so ist*

$$\inf_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\infty,K} = 0 \ .$$

14.4 Vollständig reguläre und lokal kompakte Räume

DEFINITION 1 Sei X ein (topologischer) Hausdorff-Raum. X heißt *vollständig regulär* , wenn für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von x eine stetige Funktion f auf X mit $f(x) > 0$ und $f = 0$ außerhalb V existiert. Ohne Einschränkung kann man $f(x) = 1$ und $0 \leqslant f \leqslant 1$ annehmen.

X heißt *lokal kompakt* , wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

BEISPIEL 1 Ein metrischer Raum ist vollständig regulär.

BEISPIEL 2 $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt, aber $\mathbb{Q}$ ist nicht lokal kompakt.

BEISPIEL 3 Sei X lokal kompakt. Genau dann ist eine Teilmenge Y von X lokal kompakt, wenn Y der Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von X ist.

Für den Beweis ist es am einfachsten , wenn man N. Bourbaki, TG I [9], proposition 5, §3.2, p. 20 und die propositions 12 und 13, §9.7, p. 66 konsultiert.

BEISPIEL 4 Die unendlichdimensionalen Vektorräume, die mit einer lokal konvexen Topologie versehen sind, sind vollständig regulär, aber nicht lokal kompakt. Die Räume von Distributionen sind von diesem Typ.

BEISPIEL 5 Man kann zeigen, daß jeder lokal kompakte Raum vollständig regulär ist.

DEFINITION 2 Wir bezeichnen mit $\mathcal{SK}(X)$ die Menge aller n.u.h. Funktionen

$$s : X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} \ ,$$

für die eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ mit

$$s \geqslant 0 \quad \text{außerhalb } K$$

existiert.

Sei $\mathcal{K}(X)$ die Menge aller reellen, stetigen Funktionen φ auf X , für die eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ mit

$$\varphi = 0 \quad \text{außerhalb } K$$

existiert.

Für jede Funktion f auf X heißt die abgeschlossene Menge $\operatorname{supp} f := \overline{\{f \neq 0\}}$ der *Träger* von f .

[9] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie générale,* Chap. 1 à 4, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1971.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}(X)_\phi$ die Menge aller Funktionen der Gestalt $\sup \mathcal{F}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{K}(X)$.

Eine reelle stetige Funktion φ gehört genau dann zu $\mathcal{K}(X)$, wenn ihr Träger $\operatorname{supp} \varphi$ kompakt ist.

BEISPIEL 6 Ist K eine kompakte und G eine offene Teilmenge von X , so gilt

$$-1_K, 1_G \in \mathcal{SK}(X) \ .$$

Jede positive n.u.h. Funktion gehört zu $\mathcal{SK}(X)$.

SATZ

(i) $\mathcal{SK}(X)$ *ist ein Verbandskonoid, der unter oberen Einhüllenden stabil ist, d.h. für alle* $s, t \in \mathcal{SK}(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *und* $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{SK}(X)$ *gilt*

$$\alpha \cdot s \quad , \quad s + t \quad , \quad \min(s,t) \quad , \quad \max(s,t) \quad , \quad \sup \mathcal{F} \in \mathcal{SK}(X) \ .$$

(ii) $\mathcal{K}(X)$ *ist ein Vektorverband.*

LEMMA *Ist* X *lokal kompakt, dann existiert für jedes* $x \in X$ *und jede Umgebung* V *von* x *ein* $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ *mit* $\varphi(x) > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ *und* $\operatorname{supp} \varphi \subset V$.

HAUPTSATZ *Ist* X *lokal kompakt, so gilt*

$$\mathcal{SK}(X) = \mathcal{K}(X)_\phi \ .$$

14.5 Radon-Integrale

DEFINITION Sei $\mu : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$. Man nennt μ ein *lineares Funktional* , wenn es *positiv homogen* , d.h.

$$\mu(\alpha \cdot s) = \alpha \cdot \mu(s) \quad \text{für alle } s \in \mathcal{SK}(X) \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}_+ \ ,$$

und *additiv* , d.h.

$$\mu(s+t) = \mu(s) + \mu(t) \quad \text{für alle } s,t \in \mathcal{SK}(X) \ ,$$

ist. Es heißt *wachsend* , wenn

$$s,t \in \mathcal{SK}(X) \text{ und } s \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad \mu(s) \leqslant \mu(t)$$

gilt.

Ein lineares Funktional μ heißt *Radon-Integral* auf X , falls es regulär ist, d.h. für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt

$$\mu(s) = \sup\nolimits_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant s} -\mu(t) \ .$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_+(X)$ die Menge aller Radon-Integrale auf X .

Ein Radon-Integral ist wachsend.

BEISPIEL Für jedes $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt

$$s = \sup\{-t \mid t \in \mathcal{SK}(X) \text{ und } -t \leqslant s\} \ ,$$

und für jedes $x \in X$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist das Funktional

$$\alpha \cdot \varepsilon_x : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} : s \longmapsto \alpha \cdot s(x)$$

ein Radon-Integral. Man sagt, daß $\alpha \cdot \varepsilon_x$ eine *Punktmasse* in x ist und nennt ε_x das *Dirac-Integral* in x .

HAUPTSATZ *Sei μ ein Radon-Integral auf X und $\mathcal{F}$ eine nicht leere und nach oben gerichtete Familie aus $\mathcal{SK}(X)$. Dann gilt die* ***Bourbaki Eigenschaft***

$$\mu(\sup \mathcal{F}) = \sup\nolimits_{s \in \mathcal{F}} \mu(s) \ .$$

14.6 Radon-Integrale auf lokal kompakten Räumen

DEFINITION Eine Linearform τ auf $\mathcal{K}(X)$ heißt *positiv* , wenn $\tau(\varphi) \geqslant 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$ gilt.

HAUPTSATZ *Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann besitzt jede positive Linearform τ auf $\mathcal{K}(X)$ eine eindeutige Fortsetzung μ auf $\mathcal{SK}(X)$ zu einem Radon-Integral.*

LEMMA *Ist μ ein wachsendes lineares Funktional auf $\mathcal{SK}(X)$, dann gilt*

$$\sup_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant s} -\mu(t) \leqslant \mu(s)$$

für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$.

BEISPIEL 1 Für jedes Intervall J in $\mathbb{R}$ definiert das Riemann-Integral eine positive Linearform auf $\mathcal{K}(J)$ durch

$$\tau_J : \varphi \longmapsto \int_J \varphi := \int_a^b \varphi$$

mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [a,b] \subset J$, wobei die Definition unabhängig von den gewählten $a, b \in \mathbb{R}$ ist.

Wir bezeichnen mit λ_J das zugehörige Radon-Integral auf J und nennen es das *Lebesgue-Integral* auf J . Das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}$ ist mit λ bezeichnet.

BEISPIEL 2 Sei ρ eine wachsende Funktion auf einen Intervall J in $\mathbb{R}$. Man setzt $\rho(\inf J-) := \rho(\inf\ J)$ und $\rho(\sup\ J+) := \rho(\sup\ J)$, falls $\inf\ J$ bzw. $\sup\ J$ zu J gehören. Durch

$$\varphi \longmapsto \int_J \varphi\, d\rho := \lim\nolimits_\Delta \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot [\rho(x_{j+1}-) - \rho(x_j-)] \ ,$$

ist eine positive Linearform auf $\mathcal{K}(J)$ definiert. Dabei wird der Limes über alle Unterteilungen $\Delta = (x_j)_{j=0,\ldots,m}$ von $[a,b]$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [a,b] \subset J$, deren Feinheit gegen 0 strebt, gebildet. Siehe auch Bemerkung 9.2.2 und die unten stehende Aufgabe.

Das zugehörige Radon-Integral auf J wird mit λ_ρ bezeichnet und heißt das *Lebesgue-Stieltjes-Integral* zu ρ . Für alle $a, b \in J$, gilt

$$\lambda_\rho\left(-1_{[a,b]}\right) = \rho(a-) - \rho(b+) \quad \text{und} \quad \lambda_\rho\left(1_{]a,b[}\right) = \rho(b-) - \rho(a+) \ .$$

Die Funktion ρ heißt *Verteilungsfunktion* von λ_ρ ; sie mißt von links nach rechts die Verteilung der Masse auf J . Ein Sprung stellt eine Punktmasse dar, da

$$\lambda_\rho\left(-1_{\{a\}}\right) = \rho(a-) - \rho(a+) \ .$$

Die einzige Verteilungsfunktion des Lebesgue-Integrals auf $\mathbb{R}$ ist id . Man kann zeigen, daß jedes Radon-Integral auf J die Gestalt λ_ρ hat.

Aufgabe Sei ρ eine stetige, monoton wachsende Funktion auf einem Intervall $[a,b]$. Für eine Unterteilung $\Delta = (x_j)_{j=0,\ldots,m}$ von $[a,b]$ definiert man die Feinheit der Unterteilung $F(\Delta)$ durch

$$F(\Delta) := \max_j (x_{j+1} - x_j) \ .$$

Für $f \in \mathcal{C}([a,b])$ definiert man

$$S_\Delta(f) := \sum_{j=}^{m-1} f(x_j)\left[\rho(x_{j+1}) - \rho(x_j)\right] \ .$$

(a) Zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes Paar Δ_1 , Δ_2 von Unterteilungen mit $F(\Delta_1), F(\Delta_2) \leqslant \delta$ gilt

$$|S_{\Delta_1}(f) - S_{\Delta_2}(f)| \leqslant \varepsilon \ .$$

(b) Man definiert

$$\int_a^b f \; d\rho := \lim_{n \longrightarrow \infty} S_{\Delta_n}(f) \ ,$$

wobei $(\Delta_n)_n$ eine Folge von Unterteilungen ist, deren Feinheit gegen 0 konvergiert, also

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F(\Delta_n) = 0$$

gilt.

Zeigen Sie, daß die Definition sinnvoll ist, also der Limes existiert und unabhängig von der gewählten Folge von Unterteilungen ist.

(c) Untersuchen Sie, ob man die Stetigkeitsvoraussetzung an das ρ abschwächen kann.

14.7 Das Lebesgue-Integral in $\mathbb{R}^n$

SATZ *Seien X ein kompakter, metrischer Raum und Y ein lokal kompakter, metrischer Raum. Ist $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, so gilt für jedes $\eta \in Y$*

$$\lim_{y \to \eta} f(\cdot, y) = f(\cdot, \eta) \quad \textit{gleichmäßig auf } X \ .$$

KOROLLAR *Seien $[a, b]$ und J Intervalle in $\mathbb{R}$.*

(i) Ist $f : [a, b] \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, so ist auch

$$y \longmapsto \int_a^b f(x, y)\, dx : Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig.

(ii) Sei $f : [a, b] \times J \longrightarrow \mathbb{K}$. Ist $f(\cdot, y)$ für alle $y \in J$ stetig, ist f bzgl. der zweiten Variable differenzierbar, und ist

$$\partial_2 f : [a, b] \times J \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig, so ist $\int_a^b f(x, \cdot)\, dx : J \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig differenzierbar mit

$$\partial \int_a^b f(x, \cdot)\, dx = \int_a^b \partial_2 f(x, \cdot)\, dx \ .$$

BEMERKUNG 1 Die Voraussetzungen implizieren, daß f (global) stetig ist.

HAUPTSATZ *Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \ .$$

LEMMA *Sei Y eine offene Teilmenge in X . Für alle $\varphi \in \mathcal{K}(Y)$ gilt $\varphi_0 \in \mathcal{K}(X)$, wobei φ_0 die durch 0 außerhalb von Y fortgesetzte Funktion bezeichne.*

BEMERKUNG 2 Da diese Fortsetzung kanonisch ist, unterscheiden wir nicht zwischen φ und φ_0 und betrachten $\mathcal{K}(Y)$ als Teilmenge von $\mathcal{K}(X)$.

Ist X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so kann man also für $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ definieren

$$\int_X \varphi := \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} \varphi(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \right) \dots \right) dx_1$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$, so daß

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \ .$$

Dies hängt nicht von der Wahl der a_j, b_j ab.

Der Hauptsatz zeigt, daß man die Reihenfolge der Integrationen vertauschen kann, d.h.

$$\int_X \varphi = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} \left(\ldots \left(\int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} \varphi\left(x_1, .., x_n\right) \, dx_{\sigma(n)} \right) \ldots \right) \, dx_{\sigma(1)}$$

für jede Permutation σ von $\{1, \ldots, n\}$.

Die Abbildung

$$\tau_X : \mathcal{K}\left(X\right) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \int_X \varphi$$

ist eine positive Linearform.

DEFINITION Man bezeichnet mit λ_X das zugehörige Radon-Integral auf X . Es heißt *Lebesgue-Integral* auf X .

14.8 Integrierbarkeit

Im folgenden sei μ stets ein Radon-Integral auf X .

DEFINITION 1 Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definiert man ihr Oberintegral durch

$$\int^* f \, d\mu := \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), s \geqslant f} \mu(s)$$

und ihr Unterintegral durch

$$\int_* f \, d\mu := -\int^* (-f) \, d\mu \; .$$

SATZ *Es gilt*

$$\int_* f \, d\mu = \sup_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant f} -\mu(t)$$

und

$$\int_* f \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu \; .$$

DEFINITION 2 Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ*-integrierbar* , falls

$$-\infty < \int_* f \, d\mu = \int^* f \, d\mu < \infty$$

ist. In diesem Fall nennt man

$$\int f \, d\mu := \int^* f \, d\mu = \int_* f \, d\mu$$

das *Integral* von f bzgl. μ .

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt μ*-integrierbar* , falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ μ-integrierbar sind. In diesem Fall nennt man

$$\int f \, d\mu := \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i \cdot \int \operatorname{Im} f \, d\mu$$

das *Integral* von f bzgl. μ .

BEMERKUNG Die Integrierbarkeit von $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist äquivalent zu :

Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $s, t \in \mathcal{SK}(X)$ mit $-t \leqslant f \leqslant s$ und $\mu(s + t) \leqslant \varepsilon$.

BEISPIEL 1 Für jedes $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt

$$\int_* s \, d\mu = \mu(s) = \int^* s \, d\mu \; .$$

Insbesondere ist s genau dann μ-integrierbar, wenn $\mu(s) < \infty$. In diesem Fall ist

$$\int s \; d\mu = \mu(s) \; .$$

BEISPIEL 2 Die Funktion ∞ gehört zu $\mathcal{SK}(X)$ mit $\mu(\infty) = \infty$ oder $\mu(\infty) = 0$.

BEISPIEL 3 Seien $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int^* f \; d(\alpha \cdot \varepsilon_x) = \alpha \cdot f(x) \; .$$

Genau dann ist f $\alpha \cdot \varepsilon_x$-integrierbar, wenn $\alpha \cdot f$ in x endlich ist. In diesem Fall gilt

$$\int f \; d(\alpha \cdot \varepsilon_x) = \alpha \cdot f(x) \; .$$

14.9 Der Zusammenhang zwischen Lebesgue- und Riemann-Integral

LEMMA *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $[a,b]$ ein kompaktes Intervall in J . Ist f eine beschränkte Funktion auf $[a,b]$ und ist f_0 ihre Fortsetzung durch 0 außerhalb $[a,b]$, so gilt*

$$\int^* f_0 \, d\lambda_J \leqslant \int_a^{b*} f \ ,$$

wobei $\int_a^{b*}$ das Riemann-Oberintegral auf $[a,b]$ bezeichnet.

KOROLLAR *Ist f Riemann-integrierbar, so ist f_0 λ_J-integrierbar, und es gilt*

$$\int f_0 \, d\lambda_J = \int_a^b f \ .$$

Insbesondere sind alle Funktion in $\mathcal{C}([a,b])$ und $\mathcal{T}([a,b])$ durch Fortsetzung mit 0 außerhalb von $[a,b]$ bzgl. λ_J integrierbar.

SATZ *Seien J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und f eine* ***positive*** *, stetige Funktion auf J . Genau dann ist f λ_J-integrierbar, wenn das Integral $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ konvergent ist. In diesem Fall gilt*

$$\int f \ d\lambda_J = \int_{\inf J}^{\sup J} f = \sup_{a,b\in J, a<b} \int_a^b f \ .$$

BEISPIEL Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Das Integral ist konvergent, und es gilt

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \text{sowie} \quad \Gamma(1) = 1 \ .$$

Insbesondere ist

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Für alle $x > 1$ gilt die Formel

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(x) \cdot \zeta(x) \ ,$$

wobei die Zetafunktion durch

$$\zeta(x) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^x} \quad \text{für } x > 1$$

definiert ist.

Insbesondere folgt

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^5 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right)} = \Gamma(4) \cdot \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \ .$$

14.10 Die Eigenschaften des Oberintegrals

SATZ *Für alle $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt*

(i)

$$\int^* \alpha \cdot f \; d\mu = \alpha \cdot \int^* f \; d\mu \quad \text{und} \quad \int_* \alpha \cdot f \; d\mu = \alpha \cdot \int_* f \; d\mu \; .$$

(ii)

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int^* f \; d\mu \leqslant \int^* g \; d\mu \quad \text{und} \quad \int_* f \; d\mu \leqslant \int_* g \; d\mu \; .$$

(iii) ***Submodularität***

$$\int^* \min(f, g) \; d\mu +^\bullet \int^* \max(f, g) \; d\mu \leqslant \int^* f \; d\mu +^\bullet \int^* g \; d\mu$$

und ***Supermodularität***

$$\int_* f \; d\mu +_\bullet \int_* g \; d\mu \leqslant \int_* \min(f, g) \; d\mu +_\bullet \int_* \max(f, g) \; d\mu \; ,$$

insbesondere

$$\int^* f \; d\mu \; , \int^* g \; d\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int^* \max(f, g) \; d\mu < \infty \; .$$

(iv) ***Subadditivität***

$$\int^* (f +^\bullet g) \; d\mu \leqslant \int^* f \; d\mu +^\bullet \int^* g \; d\mu$$

und ***Superadditivität***

$$\int_* f \; d\mu +_\bullet \int_* g \; d\mu \leqslant \int_* (f +_\bullet g) \; d\mu \; ,$$

insbesondere

$$\int^* f \; d\mu \; , \int^* g \; d\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int^* (f +^\bullet g) \; d\mu < \infty \; .$$

KOROLLAR *Sei $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Es gilt*

$$\int^* |f| \; d\mu < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad -\infty < \int_* f \; d\mu \leqslant \int^* f \; d\mu < \infty$$

und

$$\int^* f \; d\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int^* f^+ \, d\mu < \infty \; .$$

14.11 Die Daniell Eigenschaft

HAUPTSATZ *Sei (f_k) eine wachsende Folge von Funktionen auf X mit $\int^* f_k \, d\mu > -\infty$. Dann gilt die* ***Daniell-Eigenschaft***

$$\int^* \sup_k f_k \, d\mu = \sup_k \int^* f_k \, d\mu \ .$$

Zum Beweis benutzt man die $\frac{\varepsilon}{2^k}$-Methode : Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \ !$$

BEISPIEL 1 Man verifiziert sofort, daß für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\int^* \left(-\frac{1}{k \cdot \mathrm{id}} \right) d\lambda_{\mathbb{R}_+^*} = -\infty$$

und

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} -\frac{1}{k \cdot \mathrm{id}} = 0 \ .$$

KOROLLAR *Für jede Folge von positiven Funktionen (f_k) gilt die* ***abzählbare Subadditivität***

$$\int^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) d\mu \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k \, d\mu \ .$$

BEISPIEL 2 Für jede Funktion $f \geqslant 0$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$\int^* \infty \cdot f \ d\mu = \infty \cdot \int^* f \ d\mu \ .$$

Ähnliche Argumente werden später (siehe 15.2) eine wichtige Rolle spielen.

14.12 Der Satz von Beppo Levi

HAUPTSATZ *Sei (f_k) eine wachsende Folge μ-integrierbarer Funktionen. Genau dann ist* $\sup_k f_k$ *μ-integrierbar, wenn*

$$\sup_k \int f_k \, d\mu < \infty \quad \textit{oder} \quad \int^* \sup_k f_k \, d\mu < \infty \ .$$

In diesem Fall gilt

$$\int \sup_k f_k \, d\mu = \sup_k \int f_k \, d\mu \ .$$

BEMERKUNG Ist (f_k) eine fallende Folge μ-integrierbarer Funktionen, so ist genau dann $\inf_k f_k$ μ-integrierbar, wenn

$$\inf_k \int f_k \, d\mu > -\infty \quad \text{oder} \quad \int_* \inf_k f_k \, d\mu > -\infty \ .$$

In diesem Fall gilt

$$\int \inf_k f_k \, d\mu = \inf_k \int f_k \, d\mu \ .$$

BEISPIEL Die Funktion $1_{\mathbb{Q}}$ ist auf $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar. Dagegen ist sie $\lambda_{\mathbb{R}}$-integrierbar und ihr Lebesgue-Integral ist 0 .

14.13 Der Raum der integrierbaren Funktionen

DEFINITION Man bezeichnet mit

$$\mathcal{L}^1(\mu) \quad , \quad \mathcal{L}_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\mu) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$$

die Menge aller Funktionen

$$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}$$

die μ-integrierbar sind.

HAUPTSATZ

(i) Für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind

$$\alpha \cdot f \quad , \quad \min(f, g) \quad , \quad \max(f, g) \quad , \quad |f| \quad , \quad f^{\pm} \quad , \quad f_-$$

und

$$f +_{\bullet} g \quad , \quad f +^{\bullet} g$$

μ-integrierbar, und es gelten die Formeln

$$\int \alpha \cdot f \; d\mu = \alpha \cdot \int f \; d\mu \; ,$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int f \; d\mu \leqslant \int g \; d\mu \; ,$$

$$\left| \int f \; d\mu \right| \leqslant \int |f| \; d\mu \; ,$$

sowie

$$\int (f +_{\bullet} g) \; d\mu = \int f \; d\mu + \int g \; d\mu = \int (f +^{\bullet} g) \; d\mu \; .$$

(ii) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist ein involutiver Vektorverband, auf dem $\int \diamond \, d\mu$ eine positive Linearform ist. Für alle $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ gilt

$$\int \overline{f} \, d\mu = \overline{\int f \, d\mu} \quad \textit{und} \quad \left| \int f \; d\mu \right| \leqslant \int |f| \; d\mu \; .$$