Kapitel 9

DAS RIEMANNSCHE INTEGRAL

In diesem Paragraph ist $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.

Fassung vom 27. Juni 2005

9.1 Treppenfunktionen

DEFINITION Ist X eine Menge und $A \subset X$, so heißt

$$1_A : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ & \text{falls} \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* von A .

Eine *Unterteilung* von $[a, b]$ ist eine Folge $(x_j)_{j=0,\ldots,m}$ in $[a, b]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < .. < x_m = b \ .$$

Wir sagen, daß $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine *Treppenfunktion* ist, falls eine sogenannte zugehörige Unterteilung $(x_j)_{j=0,\ldots,m}$ von $[a, b]$ existiert, so daß φ auf jedem Intervall $[x_j, x_{j+1}[$ für $j = 0, .., m-1$ konstant ist. Es gilt dann

$$\varphi = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[} + \varphi(b) \cdot 1_{\{b\}} \ .$$

Man bezeichnet mit $\mathcal{T}([a, b])$ die Menge aller Treppenfunktionen.

Die Treppenfunktionen sind rechts stetig. Eine Treppenfunktion besitzt verschiedene zugehörige Unterteilungen.

LEMMA *Seien $(u_j)_{j=0,\ldots,p}$ und $(v_j)_{j=0,\ldots,q}$ Unterteilungen. Es gibt genau eine Unterteilung $(x_j)_{j=0,\ldots,m}$ mit*

$$\{x_0, \ldots, x_m\} = \{u_0, \ldots, u_p\} \cup \{v_0, .., v_q\} \ .$$

SATZ *$\mathcal{T}([a, b])$ ist ein Untervektorverband des* ***Vektorverbandes*** *$\mathbb{R}^{[a,b]}$ aller reellen Funktionen auf $[a, b]$, d.h. für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a, b])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\alpha \cdot \varphi \quad , \quad \varphi + \psi \quad , \quad \min(\varphi, \psi) \quad , \max(\varphi, \psi) \quad \in \quad \mathcal{T}([a, b]) \ .$$

Zusätzlich ist für jedes $p \in \mathbb{R}_+$ auch

$$|\varphi|^p \quad , \quad \varphi \cdot \psi \quad \in \quad \mathcal{T}([a, b]) \ .$$

BEISPIEL Für alle $c, d \in [a, b]$ mit $c \leqslant d$ gilt $1_{[c,d[} \in \mathcal{T}([a, b])$, aber $1_{[c,d]} \notin \mathcal{T}([a, b])$, außer wenn $d = b$.

9.2 Das elementare Integral

Seien $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ und $(u_j)_{j=0,\ldots,p}$, $(v_j)_{j=0,\ldots,q}$ zu φ gehörige Unterteilungen. Dann gilt

$$\sum_{r=0}^{p-1} \varphi(u_r) \cdot (u_{r+1} - u_r) = \sum_{s=0}^{q-1} \varphi(v_s) \cdot (u_{s+1} - u_s) \ .$$

Folgende Definition ist also sinnvoll.

DEFINITION Ist $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ und $(x_j)_{j=0,\ldots,m}$ eine zu φ gehörige Unterteilung, so heißt

$$\int_a^b \varphi := \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j)$$

das *(elementare) Riemannsche Integral* von φ .

SATZ *Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

(i)

$$\int_a^b (\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot \int_a^b \varphi \ .$$

(ii)

$$\int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \ .$$

(iii)

$$\varphi \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi \ .$$

BEMERKUNG 1 Die Eigenschaften (i) und (ii) bedeuten, daß

$$\varphi \longmapsto \int_a^b \varphi : \mathcal{T}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform ist. Für die Eigenschaft (iii) sagt man, daß diese Linearform *wachsend* , oder auch *positiv* ist, da sie zu

$$\varphi \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b \varphi \geqslant 0$$

äquivalent ist.

BEMERKUNG 2 (Stieltjes-Integrale) Eine wachsende Funktion $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt links und rechts Limiten $\rho(x-)$ bzw. $\rho(x+)$ in jedem Punkt von $[a,b]$. Man vereinbart die Konventionen

$$\rho(a-) = \rho(a) \quad \text{und} \quad \rho(b+) = \rho(b) \ .$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ definiert man das (elementare) Stieltjes-Integral von φ durch

$$\int_a^b \varphi \, d\rho := \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot [\rho(x_{j+1}-) - \rho(x_j-)] + \varphi(b) \cdot [\rho(b+) - \rho(b-)] \ .$$

Es besitzt die gleichen Eigenschaften wie das elementare Riemannsche Integral. Es gilt

$$\int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi \, d(\mathrm{id}) \ .$$

9.3 Das Darbouxsche Oberintegral

Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Funktion, so werden wir ihr Integral durch Approximation von oben wie von unten durch Treppenfunktionen definieren. Dies wird mit Hilfe von folgenden beiden Zahlen formuliert.

DEFINITION Für alle Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ setzt man

$$\int_a^{b*} f := \inf_{\varphi \in \mathcal{T}([a,b]),\varphi \geqslant f} \int_a^b \varphi \in \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$\int_{a*}^{b} f := \sup_{\psi \in \mathcal{T}([a,b]),\psi \leqslant f} \int_a^b \psi \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

Man nennt diese Zahlen das *Darbouxsche Oberintegral* bzw. *Unterintegral* von f .

SATZ *Für jede Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist*

$$\int_{a*}^{b} f \leqslant \int_a^{b*} f \quad , \quad \int_{a*}^{b} f = -\int_a^{b*} (-f)$$

und

$$\int_a^{b*} f < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist nach oben beschränkt.}$$

Gilt $m \leqslant f \leqslant M$ für bestimmte $m, M \in \mathbb{R}$, so ist

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_{a*}^{b} f \leqslant \int_a^{b*} f \leqslant M \cdot (b-a) \ .$$

BEISPIEL 1 Für alle $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ gilt

$$\int_{a*}^{b} \varphi = \int_a^b \varphi = \int_a^{b*} \varphi \ .$$

BEISPIEL 2 Definiert man

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} ,$$

so gilt

$$\int_0^{1*} f = 1 \quad \text{und} \quad \int_{0*}^{1} f = 0 \ .$$

9.4 Gleichmäßige Stetigkeit

DEFINITION Seien X und Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Man sagt, daß f *gleichmäßig stetig* ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $u, v \in X$ gilt

$$d_X(u, v) \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(u), f(v)) \leqslant \varepsilon \ .$$

BEISPIEL Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, aber weder $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, noch $\sin \frac{1}{\mathrm{id}} :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

HAUPTSATZ (von Heine) *Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist gleichmäßig stetig.*

Aufgabe Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion dessen Ableitung f' beschränkt ist. Zeigen Sie, daß f gleichmäßig stetig ist.

9.5 Riemannsche Integrierbarkeit

DEFINITION Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-) integrierbar* , falls gilt

$$\int_{a*}^{b} f = \int_{a}^{b*} f \in \mathbb{R} \ .$$

Diese Zahl heißt das *(Riemann-) Integral* von f und wird mit

$$\int_{a}^{b} f$$

bezeichnet.

LEMMA *Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gewisse $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ existieren, so daß*

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi \quad \textit{und} \quad \int_{a}^{b} (\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon \ .$$

BEISPIEL 1 Jede Treppenfunktion ist integrierbar nach Beispiel 9.3.1, aber die Funktion in Beispiel 9.3.2 ist es nicht.

HAUPTSATZ *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Man zeigt zuerst : Für alle $\varepsilon > 0$ existieren $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi \quad \text{und} \quad \varphi - \psi \leqslant \varepsilon \ .$$

BEMERKUNG 1 Ist X eine Menge und $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so gilt

$$\min(f,g) + \max(f,g) = f + g \ .$$

Setzt man

$$f^+ := \max(f,0) \quad \text{und} \quad f^- := \max(-f,0) \ ,$$

so ist

$$f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = \max(f,-f) = f^+ + f^- \ .$$

SATZ *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt*

(i)

$$\int_{a*}^{b} (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_{a*}^{b} f \quad \textit{und} \quad \int_{a}^{b*} (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_{a}^{b*} f \ .$$

(ii)

$$\int_{a*}^{b} f + \int_{a*}^{b} g \leqslant \int_{a*}^{b} (f+g) \quad \text{und} \quad \int_{a}^{b*} (f+g) \leqslant \int_{a}^{b*} f + \int_{a}^{b*} g \ .$$

(iii)

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_{a*}^{b} f \leqslant \int_{a*}^{b} g \ , \ \int_{a}^{b*} f \leqslant \int_{a}^{b*} g \ .$$

(iv)

$$\int_{a*}^{b} f + \int_{a*}^{b} g \leqslant \int_{a*}^{b} \min(f,g) + \int_{a*}^{b} \max(f,g)$$

und

$$\int_{a}^{b*} \min(f,g) + \int_{a}^{b*} \max(f,g) \leqslant \int_{a}^{b*} f + \int_{a}^{b*} g \ .$$

KOROLLAR *Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty[$. Dann sind die Funktionen*

$$\alpha \cdot f \quad , \quad f+g \quad , \quad \min(f,g) \quad , \quad \max(f,g) \quad , \quad f^+ \quad , \quad f^- \quad , \quad |f|^p \quad \text{und} \quad f \cdot g$$

auch integrierbar, und es gilt

$$\int_{a}^{b} \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int_{a}^{b} f \quad , \quad \int_{a}^{b} (f+g) = \int_{a}^{b} f + \int_{a}^{b} g \ ,$$

sowie

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_{a}^{b} f \leqslant \int_{a}^{b} g \ .$$

BEMERKUNG 2 Auch für $p \in \,]0,1[$ kann man zeigen, daß $|f|^p$ integrierbar ist. Dies ist aber nicht so wichtig, da die einzigen Funktion, die wir betrachten müssen, bevor wir das Lebesguesche Integral untersuchen werden, stückweise stetig sind (vgl. folgendes Beispiel 3). Für diese Funktionen ist aber dieses Resultat trivial.

BEISPIEL 2 Da die Treppenfunktionen, die stetigen Funktionen und die charakteristischen Funktionen $1_{\{x\}}$ für $x \in [a,b]$ integrierbar sind (vgl. Aufgabe 2 unten), sind die Linearkombinationen davon auch integrierbar. Man sieht leicht, daß diese Funktionen genau die auf $[a,b]$ stückweise stetigen Funktionen sind :

Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig* , wenn eine Unterteilung $(x_j)_{j=0,\ldots,m}$ von J , mit $x_0 = \inf J \in \overline{\mathbb{R}}$ und $x_m = \sup J \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert, so daß die Einschränkung von f auf jedem offenen Intervall $]x_j, x_{j+1}[$ eine stetige Fortsetzung auf das abgeschlossene Intervall $[x_j, x_{j+1}] \cap \mathbb{R}$ besitzt.

Die Werte von f in den Punkten x_j können beliebig sein.

Aufgabe 1 Man kann zeigen, daß die monotonen Funktionen auf $[a,b]$ integrierbar sind.

Aufgabe 2

(a) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Existiert eine Folge von Unterteilungen $(x_{k,j})_{j=0,\ldots,m_l}$ von $[a,b]$ mit

$$C := \lim_k \sum_{j=0}^{m_k-1} \sup f\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}]\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) =$$

$$= \lim_k \sum_{j=0}^{m_k-1} \inf f\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}]\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) \ ,$$

so ist f integrierbar, und

$$\int_a^b f = C \ .$$

(b) Für jedes $x \in [a,b]$ ist die Funktion $1_{\{x\}}$ integrierbar.

9.6 Mittelwertsatz der Integralrechnung

HAUPTSATZ *Seien* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetige Funktionen mit* $g \geqslant 0$ *. Dann existiert* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g \ .$$

KOROLLAR *Für jede stetige Funktion* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b - a) \ .$$

9.7 Integration von komplexwertigen Funktionen

DEFINITION Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Diese Funktion heißt *(Riemann-) integrierbar* falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind. Man definiert das *(Riemann-) Integral* von f durch

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im} f \ .$$

SATZ *Sind $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{C}$, so sind die Funktionen*

$$\alpha \cdot f \quad , \quad f + g \quad , \quad |f| \quad \textit{und} \quad f \cdot g$$

integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \int_a^b f \quad , \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

sowie

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant M \cdot (b-a)$$

falls $|f| \leqslant M \in \mathbb{R}_+$.

9.8 Unbestimmte Integrale

DEFINITION 1 Man setzt

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f := -\int_b^a f \quad \text{falls } b < a \ .$$

LEMMA *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$.*

(i) Seien $a, b, c \in J$ mit $a < b < c$. Genau dann ist f integrierbar, wenn $f_{|[a,b]}$ und $f_{|[b,c]}$ integrierbar sind.

(ii) Für alle $a, b, c \in J$ gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \ ,$$

falls f auf dem kleinsten Intervall, der a, b und c enthält, integrierbar ist.

HAUPTSATZ (Existenz einer Stammfunktiom) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\xi \in J$ und $g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion*

$$G : J \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \int_\xi^x g$$

eine Stammfunktion von g , d.h. G ist differenzierbar mit $G' = g$.

Präziser ist G die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = g \quad \textit{und} \quad f(\xi) = 0 \ .$$

DEFINITION 2 Die Funktion $\int_\xi^\diamond g$ heißt das *unbestimmte Integral* von g , welches in ξ verschwindet.

SATZ *Seien $c, d : J \longrightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen, $\tau \in J$ und $\eta \in \mathbb{C}$.*

(i) Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$, die Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = c \cdot f \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \eta$$

ist. Diese Lösung ist

$$f = \eta \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond c\right) \ .$$

(ii) Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$, die Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = c \cdot f + d \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \eta$$

ist. Diese Lösung ist

$$f = \left[\eta + \int_\tau^\diamond d(s) \cdot \exp\left(-\int_\tau^s c\right) ds\right] \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond c\right) =$$

$$= \eta \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond c\right) + \int_\tau^\diamond d(s) \cdot \exp\left(\int_s^\diamond c\right) ds \ .$$

BEMERKUNG Für beide Aussagen benutzt man den Ansatz $f = g \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond c\right)$. Die zweite Formel sollte man nicht auswendig lernen, sondern diesen Ansatz verwenden, die sogenannte *Methode der Variation der Konstanten* .

BEISPIEL Die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = 2 \cdot \mathrm{id} \cdot f + 1 \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

ist

$$f(t) = \int_0^t e^{t^2 - s^2} ds = e^{t^2} \cdot \int_0^t e^{-s^2} ds \ .$$

Man beachte, daß die Funktion

$$\mathrm{erf} := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\diamond e^{-s^2} ds$$

sich nicht mit Hilfe der elementaren Funktionen ausdrücken läßt.

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_x^{x^2+\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt \ .$$

Aufgabe 2 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f' = 2\,\mathrm{id} \cdot f + \mathrm{id} \quad , \quad f(0) = 0 \ .$$

Aufgabe 3

(a) Seien $c_1, c_2, \eta \in \mathbb{C}$, $c_1 \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Ansatzes $f = g \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$, dass

$$f = \frac{c_2}{c_1} + \left(\eta - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$f' + c_1 \cdot f = c_2 \quad , \quad f(0) = \eta$$

ist.

(b) Seien $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{C}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f'' + f = 0 \quad , \quad f(0) = \eta_0 \quad , \quad f'(0) = \eta_1 \ .$$

Machen Sie dazu den Ansatz $f = g \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}}$ und zeigen Sie, dass $g'' + 2i \cdot g' = 0$ ist.

(c) Geben Sie Lösungen speziell für die Paare $(\eta_0, \eta_1) = (1, 0)$, $(0, 1)$ an.

Aufgabe 4 Sei $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Funktionalgleichung $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ erfüllt.

(a) Es gilt $f = 0$ auf $\mathbb{R}_+^*$ oder $f > 0$ auf $\mathbb{R}_+^*$.
Hinweis: Untersuchen Sie die möglichen Werte von $f(1)$.

(b) f ist genau dann differenzierbar, wenn f in einem $x \in \mathbb{R}_+^*$ differenzierbar ist.
In diesem Fall erfüllt f eine Differentialgleichung. Welche ?

(c) Zeigen Sie, daß f stetig differenzierbar ist.
Hinweis: Untersuchen Sie $\int_1^x f(t)\, dt$ und beachten Sie $t = \frac{t}{x} \cdot x$.

(d) Schließen Sie durch das hergeleitete AWP auf die Gestalt von f .

9.9 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

HAUPTSATZ *Seien $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \ .$$

DEFINITION Mit

$$[F]_a^b := F(b) - F(a)$$

gilt also

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

In vielen Situationen hängt die Funktion noch von Parametern ab. In diesem Fall ist es nützlich die Variable bzgl. der man integriert zu kennzeichnen. Man schreibt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^b \ .$$

BEISPIEL 1 Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b x^s dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_a^b & & s \neq -1 \\ & \text{falls} & \\ \Big[\ln|x|\Big]_a^b & & s = -1 \end{cases} ,$$

mit

$$a, b \text{ beliebig} \quad \text{falls } s \in \mathbb{N} \ ,$$

$$0 \notin [a,b] \quad \text{falls } s \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \ ,$$

$$[a,b] \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{falls } s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$$

und

$$[a,b] \subset \mathbb{R}_+^* \quad \text{falls } s \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z} \ .$$

Achtung :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2 \quad !$$

BEISPIEL 2 Für alle $c \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b e^{c \cdot x} dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{c} \cdot e^{c \cdot x}\right]_a^b & \text{falls } c \neq 0 \\ b - a & \text{falls } c = 0 \end{cases} .$$

SATZ (Mittelwertungleichung) *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant (b - a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| .$$

Aufgabe Bestimmen Sie $\lim_{k \to \infty} a_k$ für

(a)

$$a_k := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k + j} .$$

(b)

$$a_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{(j^2 + k^2)(2j + 1)}{k^4} \left(\ln\left(j^2 + k^2\right) - 2 \ln k\right) .$$

Hinweis: Deuten Sie die Summen als elementare Integrale.

9.10 Substitutionsregel

SATZ *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, $[c, d]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\rho : [c, d] \longrightarrow J$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_c^d f \circ \rho \cdot \rho' = \int_{\rho(c)}^{\rho(d)} f \ .$$

BEMERKUNG 1 Ist ρ wachsend, so kann man zeigen, daß

$$\int_c^d f \circ \rho \cdot \rho' = \int_c^d f \ d\rho$$

wobei letzteres Integral das Stieltjes-Integral ist.

Mnemotechnisch ensteht die Substitutionsregel

$$\int_{\rho(c)}^{\rho(d)} f(x)\, dx = \int_c^d f(\rho(y))\, d\rho(y) = \int_c^d f(\rho(y)) \cdot \rho'(y)\, dy$$

durch die Substitution $x = \rho(y)$ und mit Hilfe der Formel $dx = d\rho(y) = \rho'(y)\, dy$.

Die Funktion ρ braucht nicht bijektiv zu sein. Eine Substitution ist i.a. keine Variablenänderung (vgl. die folgenden Beispiele 3 und 4).

BEMERKUNG 2 Ist ρ streng wachsend, d.h. eine Bijektion von $[c, d]$ auf das Intervall $[a, b]$, also $x = \rho(y)$ eine *Variablenänderung* , so gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\rho^{-1}(a)}^{\rho^{-1}(b)} f(\rho(y)) \cdot \rho'(y)\, dy \ .$$

BEMERKUNG 3 Mit $\int f$ bezeichnet man oft eine Stammfunktion von f . Aber Achtung, diese Schreibweise ist nicht präzis genug, da man nicht genau weiß von welche Stammfunktion die Rede ist !

Die Substitutionsregel zeigt, daß

$$\int (f \circ \rho \cdot \rho') = \left(\int f\right) \circ \rho + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \ .$$

Ist ρ eine Bijektion, dann gilt

$$\int f = \left(\int f \circ \rho \cdot \rho'\right) \circ \rho^{-1} + c \ .$$

BEISPIEL 1 Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y - c)\, dy \ .$$

BEISPIEL 2 Für alle $c \in \mathbb{R}^*$ gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{c} \cdot \int_{c\cdot a}^{c\cdot b} f\left(\frac{y}{c}\right) dy \ .$$

BEISPIEL 3 Es ist

$$\int_0^\pi \cos y \ dy = \int_0^\pi 1 \cdot \sin' y \ dy = \int_0^0 1 \ dx = 0 \ .$$

BEISPIEL 4 Ist $\rho : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\rho \neq 0$ überall, so folgt

$$\int_c^d \frac{\rho'(y)}{\rho(y)} dy = \int_{\rho(c)}^{\rho(d)} \frac{1}{x} dx = \Big[\ln|x|\Big]_{\rho(c)}^{\rho(d)} = \ln \frac{\rho(d)}{\rho(c)} \ ,$$

durch die Substitution $x = \rho(y)$, da ρ kein Vorzeichenwechsel hat. Mit anderen Worten hat man den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, und daß $\ln|\rho|$ eine Stammfunktion von $\frac{\rho'}{\rho}$ ist, benutzt.

Insbesondere gilt für $[c,d] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\int_c^d \tan y \ dy = -\int_c^d \frac{\cos' y}{\cos y} dy = -\ln \frac{\cos d}{\cos c} \ .$$

BEISPIEL 5 Ist $[a,b] \subset [-1,1]$, so gilt

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]_a^b \ ,$$

Insbesondere ist

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \ ;$$

dies ist die Fläche eines Halbkreises mit Radius 1 .

BEISPIEL 6 Seien $p, q \in \mathbb{R}$, so daß $x^2 + 2p \cdot x + q \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2p \cdot x + q} = \int_{a+p}^{b+p} \frac{dy}{y^2 + r} \ ,$$

mit $r := q - p^2$. Man untersucht die drei Fälle $r = 0$, $r > 0$ und $r < 0$ und erhält

$$\left[-\frac{1}{(x+p)}\right]_a^b \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \left[\arctan \frac{x+p}{\sqrt{r}}\right]_a^b \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-r}} \cdot \left[\ln\left|\frac{\sqrt{-r}+x+p}{\sqrt{-r}-x-p}\right|\right]_a^b \ .$$

Anstelle sich diese Formeln zu merken, ist es besser jedesmal die entspechende Substitution geschickt zu machen. Im dritten Fall kann man, da die Wurzeln x_1 und x_2 von $x^2 + 2p \cdot x + q = 0$ reell sind, direkt die Partialbruchmethode anwenden :

$$\frac{1}{x^2 + 2p \cdot x + q} = \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2} \ .$$

Z.B. gilt

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \ ,$$

und ist $\pm 1 \notin [a,b]$, so erhält man

$$\int_a^b \frac{2}{1-x^2} dx = \left[\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_a^b \ .$$

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^1 x \cdot \left(1-x^2\right) \ dx \quad \text{und} \quad \int_e^5 \frac{dx}{x \cdot \ln \ x} \ .$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\mathbb{R} \smallsetminus \{0,-1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} \ .$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\frac{\exp -1}{\exp +1} \ .$$

Aufgabe 4 Für alle $c \in \mathbb{C}$ berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi e^{c \cdot x} \cdot \sin^2 x \ dx \ .$$

9.11 Partielle Integration

SATZ *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g \ .$$

BEMERKUNG Diese Regel zeigt, daß

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \ .$$

BEISPIEL 1 Sind $a, b > 0$, so ist

$$\int_a^b \ln = \Big[\mathrm{id} \cdot (\ln - 1)\Big]_a^b \ .$$

BEISPIEL 2 Sind $a, b \in \left]-1, 1\right[$, so ist

$$\int_a^b \arcsin = \Big[\mathrm{id} \cdot \arcsin + \sqrt{1 - \mathrm{id}^2}\Big]_a^b \ .$$

Da beide Seiten der Gleichung stetig von a und b in $[-1, 1]$ abhängen, folgt die Gültigkeit obiger Formel für alle $a, b \in [-1, 1]$. Insbesondere gilt

$$\int_0^1 \arcsin = \frac{\pi}{2} - 1 \ .$$

BEISPIEL 3 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \cos^2 = [\cos \cdot \sin + \mathrm{id}]_a^b - \int_a^b \cos^2 \ ,$$

also

$$\int_a^b \cos^2 = \frac{1}{2} \cdot \Big[\cos \cdot \sin + \mathrm{id}\Big]_a^b \ .$$

Aufgabe 1 Für alle $k \in \mathbb{N}$ berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^k \cdot \sin x \ dx \ .$$

Aufgabe 2 Seien $f \in \mathcal{C}([a,b])$ und $g \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b])$. Man nehme an, daß g monoton sei. Zeigen Sie, daß ein $\xi \in [a,b]$ existiert, so daß

$$\int_a^b f \cdot g = g(a) \cdot \int_a^\xi f + g(b) \cdot \int_\xi^b f \ .$$

Hinweis : Partielle Integration und Mittelwertsatz.

Aufgabe 3 Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare und injektive Funktion.

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Umkehrfunktion $\overset{-1}{f}$ mit Hilfe von $\overset{-1}{f}$ und einer Stammfunktion F von f .

Hinweis : Substitutionsregel und partielle Integration.

(b) Wenden Sie dieses Resultat auf die Funktion

$$\mathrm{id} \cdot \exp : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

an (vgl. Aufgabe 7.13).

9.12 Taylorformel mit Integralrestglied

HAUPTSATZ *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Für alle $x, y \in J$, gilt dann*

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + \frac{1}{k!} \cdot \int_x^y (y-t)^k \cdot f^{(k+1)}(t)\, dt \ .$$

BEISPIEL Man kann das Resultat aus Beispiel 11.15.3 verbessern :

Für alle $x \in \left]-1, 1\right]$ gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot x^l \ .$$

Man beachte, daß wir mit Hilfe der Integralform des Restgliedes nur die Darstellbarkeit von $\ln(1+\mathrm{id})$ durch ihre Taylorreihe auf $\left]-1, 1\right[$ beweisen können. Im Punkte 1 muß man zeigen, daß

$$\lim_k \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^k \frac{dt}{1+t} = 0$$

ist. Dies wird mit dem Satz der beschränkten Konvergenz von Lebesgue einfach sein (Analysis III).

Für alle $x \in \left]-1, 1\right[$ gilt

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \cdot x^{2l+1} \ .$$

Da $2 = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$ folgt

$$\ln\ 2 = 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2l+1} \ .$$

9.13 Wallis-Formel

Definiert man

$$A_k := \int_0^{\pi/2} \sin^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \ ,$$

so gilt

$$A_0 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad A_1 = 1$$

und

$$A_k = \frac{k-1}{k} \cdot A_{k-2} \quad \text{für alle } k \geqslant 2 \ .$$

Daraus folgt

$$A_{2k} = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2k \cdot (2k-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{l=1}^{k} \frac{2l-1}{2l} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2}$$

und

$$A_{2k+1} = \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3} \cdot 1 = \prod_{l=1}^{k} \frac{2l}{2l+1} = \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k+1)!} \ .$$

Da

$$\lim\nolimits_k \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} = 1 \ ,$$

folgert man dann

$$\lim\nolimits_k \frac{\left(2^k \cdot k!\right)^4}{(2k)!\,(2k+1)!} = \frac{\pi}{2} \ ,$$

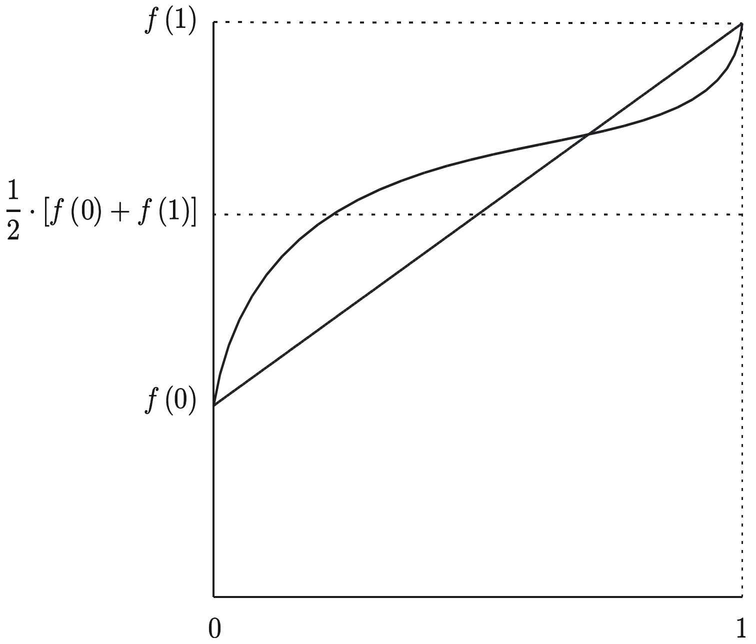
und

$$\prod_{l=1}^{\infty} \frac{4l^2}{4l^2-1} := \lim\nolimits_k \prod_{l=1}^{\infty} \frac{4l^2}{4l^2-1} = \frac{\pi}{2} \ .$$

9.14 Trapez-Regel

SATZ *Seien* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert ein* $\xi \in [0,1]$ *mit*

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f(1)] - \frac{1}{12} \cdot f''(\xi) \ .$$



KOROLLAR *Seien* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion,*

$$M := \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

und $k \in \mathbb{N}^*$ *. Definiert man* $h := \frac{b-a}{k}$ *, so gilt*

$$\int_a^b f = h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} f(a + l \cdot h) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right) + R$$

mit

$$|R| \leqslant \frac{1}{12} \cdot M \cdot (b-a) \cdot h^2 \ .$$

9.15 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

DEFINITION Seien $\widetilde{I}, \widetilde{J}$ Intervalle in $\mathbb{R}$ und $\rho : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetigen Funktionen. Man sagt, daß

$$f' = \sigma \cdot \rho(f)$$

eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen* ist. Eine *Lösung* f dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \widetilde{I}$, definiert auf einem Intervall $J \subset \widetilde{J}$, so daß gilt

$$f'(t) = \sigma(t) \cdot \rho(f(t)) \quad \text{für alle } t \in J \ .$$

Die letzte Formel zeigt, daß eine Lösung stetig differenzierbar ist.

BEMERKUNG 1 Ist $\eta \in \widetilde{I}$, so daß $\rho(\eta) = 0$, so ist die konstante Funktion

$$\widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \eta$$

eine Lösung.

Wir betrachten jetzt ein Intervall $I \subset \widetilde{I}$, so daß $\rho \neq 0$ in I ist. Sind $\tau \in \widetilde{J}$ und $\xi \in I$ gegeben, so definieren wir

$$R : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_\xi^x \frac{1}{\rho} \quad \text{und} \quad S : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \int_\tau^t \sigma \ .$$

Diese Funktionen sind stetig differenzierbar, R ist umkehrbar, $R^{-1} : R(I) \longrightarrow I$ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\left(R^{-1}\right)' = \rho \circ R^{-1} \ .$$

HAUPTSATZ (Existenz und Eindeutigkeit) *Sei J ein Intervall in $\widetilde{J}$ mit $\tau \in J$. Genau dann ist $f : J \longrightarrow I$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$f' = \sigma \cdot \rho(f) \quad \textit{und} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

wenn

$$S(J) \subset R(I) \quad \textit{und} \quad f = R^{-1} \circ S_{|J} \ .$$

BEMERKUNG 2 Ist $I \subset \widetilde{I}$ ein maximales Intervall, so daß $\rho \neq 0$ in I gilt, so nennt man $f : J \longrightarrow I$ eine *maximale* Lösung des Anfangswertproblems, wenn J das größte Intervall der τ enthält und in $S^{-1}(R(I))$ enthalten ist.

Ist in diesem Fall $a \in \widetilde{J} \setminus J$ ein Endpunkt von J und $\eta := \lim_{J \ni t \to a} f(t)$ existiert in $\widetilde{I}$, so gilt $\rho(c) = 0$.

Die folgenden Beispiele illustrieren den Anschluß einer Lösung mit einer konstanten Lösung. Im ersten Fall ist dieser Anschluß nicht möglich und es gilt Eindeutigkeit ohne Einschränkung. Im zweiten Fall ist der Anschluß möglich und es gibt keine Eindeutigkeit.

BEISPIEL 1 Seien $\tau, \xi \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$f' = f^2 \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi \tag{$*$}$$

bestimmen.

Es ist

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 \quad \text{und} \quad \sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto 1 \ .$$

Man muß die beiden Fälle $I = \left]0, \infty\right[$ falls $\xi > 0$ und $I = \left]-\infty, 0\right[$ falls $\xi < 0$ betrachten. Es gilt

$$R(x) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$S(t) = t - \tau \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \ .$$

Damit folgt

$$R(I) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{I} = \frac{1}{\xi} - I \ ,$$

und daß für alle $y \in \frac{1}{\xi} - I$ gilt

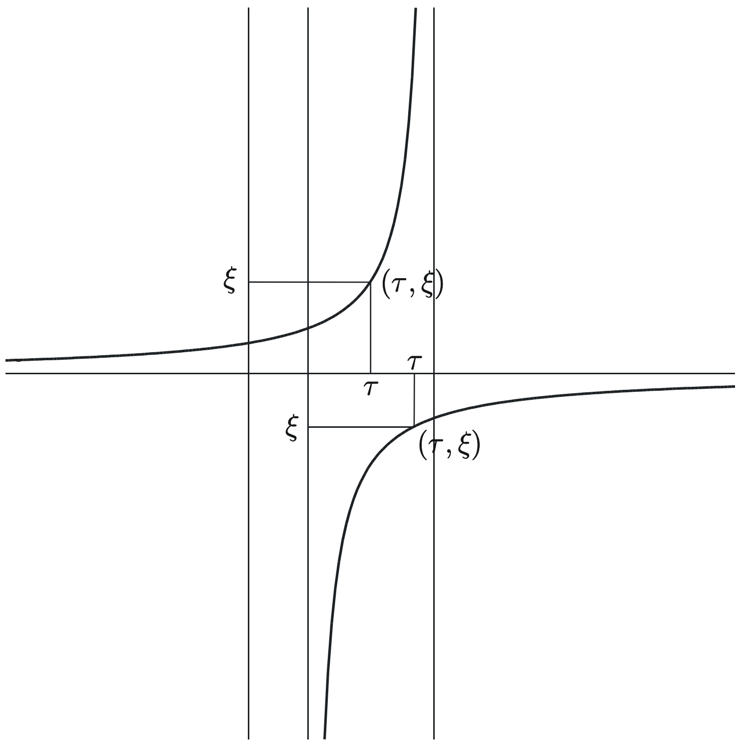
$$R^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{1}{\xi} - y} \ .$$

Andererseits ist

$$S^{-1}(R(I)) = \tau + \frac{1}{\xi} - I$$

und für alle $t \in \tau + \frac{1}{\xi} - I$, bekommt man

$$R^{-1}(S(t)) = \frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t} \ .$$



Die (maximalen) Lösungen von $(*)$ mit Werten > 0 falls $\xi > 0$, bzw. < 0 falls $\xi < 0$ sind

$$\left]-\infty, \tau + \frac{1}{\xi}\right[\longrightarrow \left]0, \infty\right[: t \longmapsto \frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t} \ ,$$

bzw.

$$\left]\tau + \frac{1}{\xi}, \infty\right[\longrightarrow \left]-\infty, 0\right[: t \longmapsto \frac{1}{\tau + \frac{1}{\xi} - t} \ .$$

Schließlich ist 0 die einzige Lösung von $(*)$ mit Anfangswert 0 .

BEMERKUNG 3 In 13.3 werden wir einen Eindeutigssatz für eine große Klasse von Anfangswertproblemen beweisen. Das obige, aber nicht das folgende Beispiel gehört dazu !

BEISPIEL 2 Seien $\tau, \xi \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$f' = \sqrt[3]{f^2} = |f|^{\frac{2}{3}} \quad \text{und} \quad f(\tau) = \xi \ .$$

Es ist $\rho = |\mathrm{id}|^{\frac{2}{3}}$ und $\sigma = 1$, also $I = \left]0, \infty\right[$ falls $\xi > 0$, bzw. $I = \left]-\infty, 0\right[$ falls $\xi < 0$,

$$R : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 3 \cdot \left[\operatorname{signum} \cdot |\mathrm{id}|^{\frac{1}{3}} - \operatorname{signum} \xi \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}}\right]$$

und

$$S = \mathrm{id} - \tau \ .$$

Daraus folgt

$$R(I) = 3 \cdot \left[\operatorname{signum} \xi \cdot \left]0, \infty\right[- \operatorname{signum} \xi \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}}\right] = \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-3 \cdot \xi^{\frac{1}{3}}, \infty\right[& & \xi > 0 \\ & \text{falls} & \\ \left]-\infty, 3 \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}}\right[& & \xi < 0 \end{array} \right. ,$$

also

$$S^{-1}(R(I)) = \left\{ \begin{array}{ccc} \left]\tau - 3 \cdot \xi^{\frac{1}{3}}, \infty\right[& & \xi > 0 \\ & \text{falls} & \\ \left]-\infty, \tau + 3 \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}}\right[& & \xi < 0 \end{array} \right. .$$

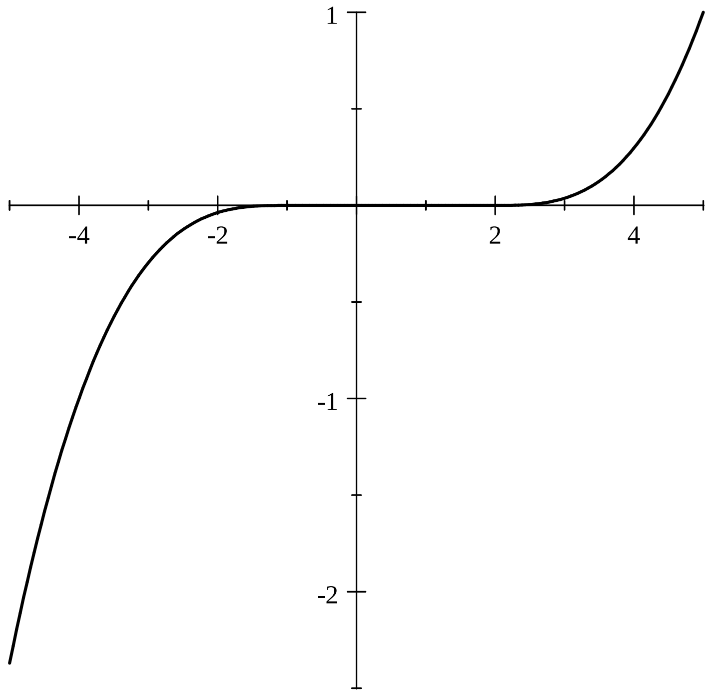
Die maximale Lösung mit Werten in I ist somit auf $J := S^{-1}(R(I))$ definiert und man zeigt leicht, daß

$$f(t) = R^{-1}(S(t)) = \left(\frac{t - \tau}{3} + \operatorname{signum} \xi \cdot |\xi|^{\frac{1}{3}}\right)^3 \quad \text{für alle } t \in J \ .$$

Schließlich kann man zeigen, daß jede auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung der Gestalt

$$f_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{t-a}{3}\right)^3 & & t \leqslant a \\ 0 & \text{falls} & t \in \left]a, b\right[\\ \left(\frac{t-b}{3}\right)^3 & & b \leqslant t \end{array} \right.$$

ist, wobei $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a \leqslant b$ sind.



$f_{-1,2}$

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$f' = \cos \cdot e^f \quad \text{et} \quad f(0) = \xi$$

für $\xi = -\ln 2, 0, \ln 2$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = 1 + f^2 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ .$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$(f' \cdot \mathrm{id} - f) \cdot \exp\left(\frac{f}{\mathrm{id}}\right) = \mathrm{id} \quad , \quad f(1) = 0 \ .$$

Hinweis : Ansatz $f = g \cdot \mathrm{id}$.

9.16 Lemma von Riemann-Lebesgue

LEMMA *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine stetig differenzierbare Funktion. Für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *definiert man*

$$\widehat{f}(k) := \int_a^b f(x) \cdot e^{-2\pi i \cdot kx} dx \ .$$

Dann gilt $\lim_{k \to \pm\infty} \widehat{f}(k) = 0$ *.*

BEMERKUNG In Analysis III werden wir diesen Satz wesentlich verallgemeinern.

ANWENDUNG Für alle $x \in \left]0,1\right[$, gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \cdot lx}}{l} = -\ln(2 \cdot \sin \pi x) + i\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) \ .$$

Insbesondere ist

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \cdot kx}{k} = -\ln(2 \cdot \sin \pi x) \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi \cdot kx}{k} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) \ .$$

9.17 Uneigentliche Integrale

DEFINITION Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ist $-\infty < a < b \leqslant \infty$ und $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so heißt das *(uneigentliche) Integral* $\int_a^b f$ *konvergent* , wenn $\lim_{x \to b-} \int_a^x f$ in $\mathbb{C}$ existiert. Man definiert

$$\int_a^b f := \lim_{x \to b-} \int_a^x f \ .$$

Im anderen Fall heißt das Integral *divergent* . Man geht analog für Intervalle der Gestalt $]a, b]$ mit $-\infty \leqslant a < b < \infty$ vor.

Für Intervalle der Gestalt $]a, b[$ heißt $\int_a^b f$ konvergent, wenn ein $c \in \,]a, b[$ existiert, so daß die Integrale $\int_a^c f$ und $\int_c^b f$ konvergent sind und setzt

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

BEMERKUNG Letzteres ist wohl definiert, da die Definition von c unabhängig ist. Zusätzlich ist es äquivalent, daß die sukzessiven Grenzwerte

$$\lim_{x \to a+} \lim_{y \to b-} \int_x^y f \quad \text{oder} \quad \lim_{y \to b-} \lim_{x \to a+} \int_x^y f$$

existieren und es gilt

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \lim_{y \to b-} \int_x^y f = \lim_{y \to b-} \lim_{x \to a+} \int_x^y f \ .$$

SATZ *Ist $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion, so ist das Integral $\int_a^b f$ genau dann konvergent, wenn*

$$\sup_{x<b} \int_a^x f < \infty \ .$$

BEISPIEL 1 Sei $s \in \mathbb{R}$. Das Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ ist genau dann konvergent, wenn $s > 1$. In diesem Fall gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \ .$$

BEISPIEL 2 Sei $s \in \mathbb{R}$. Das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ ist genau dann konvergent, wenn $s < 1$. In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \ .$$

BEISPIEL 3 Das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ist konvergent, und

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \ .$$

BEISPIEL 4 Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ist konvergent, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \ .$$

KOROLLAR (Vergleich Reihen-Integral) *Sei $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine fallende stetige Funktion. Die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} f(l)$ ist genau dann konvergent, wenn das Integral $\int_1^{\infty} f$ konvergent ist.*

BEISPIEL 5 Für alle $s > 1$ ist die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}$ konvergent. Diese Reihe haben wir schon mit elementaren Mitteln in Beispiel 6.2.2 behandelt. Die Funktion

$$\zeta : s \longmapsto \zeta(s) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} :]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Riemannsche Zeta-Funktion* .

HAUPTSATZ (Majoranten-Kriterium) *Seien $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ stetige Funktionen mit*

$$|f| \leqslant g \ .$$

Ist das Integral $\int_a^b g$ konvergent, so sind dies auch die Integrale $\int_a^b f$ und $\int_a^b |f|$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant \int_a^b g \ .$$

Aufgabe 1 Welche der folgenden Reihe

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \ln l} \quad \text{und} \quad \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \ln^2 l}$$

ist konvergent ?

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie :

(a) Ist $\int_0^{\infty} f \cdot f'$ konvergent, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)$$

in $\mathbb{R}_+$.

(b) Ist $\int_0^\infty f$ konvergent und f' beschränkt, so gilt

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0 \ .$$

(c) Existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, die uneigentlich integrierbar ist, und für die

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$$

nicht gilt ?

(d) Gelten (a) und (b) auch für eine komplexwertige Funktion f ?

Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\frac{\sin}{\mathrm{id}} :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

uneigentlich-integrierbar ist.

Hinweis : Man benutze partielle Integration.

Aufgabe 4 Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren?

(a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^3 e^t \ dt}{\sqrt{1-t^2}} \ .$$

(b)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^5} \ .$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(t^2\right) \ dt \ .$$

(d)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(1 + \ln t) \ dt}{\sqrt{t^4 + t + 1}} \ .$$

9.18 Stirling-Formel

DEFINITION Seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}^*$. Diese Folgen heißen *asymptotisch äquivalent* falls

$$\lim_k \frac{z_k}{w_k} = 1 \quad \text{, d.h.} \quad \lim_k \frac{w_k - z_k}{w_k} = 0 \ .$$

Man schreibt $z_k \sim w_k$ (für k gegen unendlich).

Dies bedeutet, daß der relative Fehler, wenn man z_k durch w_k approximiert, gegen 0 konvergiert, also daß die Anzahl der richtigen Dezimalstellen wächst, für k gegen unendlich (vgl. Satz 5.7).

BEISPIEL (Stirling-Formel) Für k gegen unendlich gilt

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \ .$$

Präziser gilt

$$\sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \leqslant k! \leqslant \sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \exp\left(\frac{1}{12 \cdot (k-1)}\right) \quad \text{für alle } k \geqslant 2 \ .$$

Aufgabe

(a) Zeigen Sie für Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von positiven Zahlen mit asymptotischer Äquivalenz $a_k \sim b_k$ für $k \to \infty$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot c_k < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot c_k < \infty \ .$$

(b) Folgern Sie mit Hilfe der Stirling-Formel, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1)}$ konvergiert.