Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Lösungen der Übungen zu

ANALYSIS I

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

A. Alldridge und R. Jäger

Marburg im Wintersemester 2001/2002

Fassung vom 21. April 2002

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg A. Alldridge und R. Jäger
Wintersemester 2001/02

Analysis I

Lösungsblatt 1

Aufgabe 1

(a)

$$\begin{array}{rcl} Th & : & A \Rightarrow C \\ L_4\,(A,C,C) & : & (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee C)) \\ MP & : & (C \vee A) \Rightarrow (C \vee C) \qquad (*) \\ L_3\,(A,C) & : & (A \vee C) \Rightarrow (C \vee A) \\ \text{Kettenschluß (Bsp. 1.2.2)} & : & (A \vee C) \Rightarrow (C \vee C) \\ Th & : & B \Rightarrow C \\ L_4\,(B,C,A) & : & (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)) \\ MP & : & (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C) \\ Th & : & A \vee B \\ MP & : & A \vee C \\ MP & : & C \vee C \\ L_1\,(C) & : & C \vee C \Rightarrow C \\ MP & : & C \end{array}$$

(b) Falls $x \geqslant 0$, ist $x = |x|$ und daher

$$x^2 = |x|^2 \ .$$

Falls $x < 0$, ist

$$-x = |x| \ .$$

Es folgt

$$(-x)^2 = |x|^2 \ .$$

Da $(-x)^2 = x^2$ ist, gilt

$$x^2 = |x|^2 \ .$$

(c) Falls $x = 0$ ist, gibt es nichts zu beweisen. Ist $x \neq 0$, so folgt aus

$$x^2 = x$$

durch Kürzen von x , daß $x = 1$ ist. Insgesamt gilt also

$$\left(x^2 = x\right) \Rightarrow (x = 0 \vee x = 1) \ .$$

Aufgabe 2 Angenommen, $\neg\,(A \wedge B)$ ist ein Theorem, d.h.

$$\neg\neg\,(\neg A \vee \neg B) \ .$$

Nach Bsp. 1.4.2 gilt

$$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B) \ .$$

Anwendung des MP ergibt $(\neg A \vee \neg B)$, d.h. $A \Rightarrow \neg B$. Nach Voraussetzung ist A ein Theorem, deshalb liefert MP, daß $\neg B$ ein Theorem ist. Das ist jedoch ein Widerspruch dazu, daß B ein Theorem ist, was vorausgesetzt wurde. Aus diesem Grund ist die Annahme, $\neg(A \wedge B)$ sei ein Theorem, falsch, d.h. $A \wedge B$ ist ein Theorem.

Aufgabe 3 Angenommen, $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Dann existieren Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, so daß gilt

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{, d.h.} \quad 3q^2 = p^2 \ .$$

Wir dürfen annehmen, daß $ggT(p,q) = 1$ ist, da wir sonst kürzen könnten. Nach obiger Gleichung ist p^2 durch 3 teilbar. Dann ist aber schon p durch 3 teilbar, denn wäre das nicht so, so hätte p die Form

$$p = 3k + 1 \quad \text{oder} \quad p = 3k + 2$$

mit einem geeigneten $k \in \mathbb{Z}$. Falls $p = 3k + 1$, so folgt

$$3q^2 = p^2 = 9k^2 + 6k + 1 \ .$$

Damit wäre

$$1 = 3q^2 - 9k^2 - 6k = 3\left(q^2 - 3k^2 - 2k\right) \ ,$$

d.h. die rechte Seite der Gleichung ist durch drei teilbar, die linke aber nicht. Widerspruch !

Falls $p = 3k + 2$, so folgt analog

$$p^2 = 3q^2 = 9k^2 + 12k + 4 \ ,$$

also

$$4 = 3\left(3k^2 + 4k - q^2\right) \ .$$

Da vier nicht durch drei teilbar ist, ergibt sich auch hier ein Widerspruch. Es folgt, daß p durch drei teilbar ist, d.h. es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $p = 3n$. Es folgt

$$3q^2 = p^2 = (3n)^2 = 9n^2$$

und daraus

$$q^2 = 3n^2 \ ,$$

d.h. q^2 ist durch drei teilbar. Die gleiche Argumentation wie oben zeigt, daß dann auch q durch drei teilbar ist. Somit ergibt sich ein Widerspruch dazu, daß $ggT(p,q) = 1$ ist, und daher gilt $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4

$$
\begin{array}{rcl}
Th & : & A \\
\text{Aufg. 1.2.1.iii} & : & A \Rightarrow \neg\neg A \\
MP & : & \neg\neg A \\
L_2\,(\neg\neg A, \neg B) & : & \neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \vee \neg B) \\
MP & : & \neg A \Rightarrow \neg B \\
L_4\,(\neg A, \neg B, \neg B) & : & (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow [(\neg B \vee \neg A) \Rightarrow (\neg B \vee \neg B)] \\
MP & : & (\neg B \vee \neg A) \Rightarrow (\neg B \vee \neg B) \\
L_1\,(\neg B) & : & (\neg B \vee \neg B) \Rightarrow \neg B \\
\text{Kettenschluß} & : & (\neg B \vee \neg A) \Rightarrow \neg B \\
L_3\,(\neg A, \neg B) & : & (\neg A \vee \neg B) \Rightarrow (\neg B \vee \neg A) \\
\text{Kettenschluß} & : & (\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg B \\
\text{Aufg. 1.2.1.vi} & : & [(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg B] \Rightarrow [\neg\neg B \Rightarrow \neg\,(\neg A \vee \neg B)] \\
MP & : & \neg\neg B \Rightarrow \neg\,(\neg A \vee \neg B) \\
\text{Aufg. 1.2.1.iii} & : & B \Rightarrow \neg\neg B \\
\text{Kettenschluß} & : & B \Rightarrow \neg\,(\neg A \vee \neg B) \\
Th & : & B \\
MP & : & \neg\,(\neg A \vee \neg B) \\
\text{i.e.} & : & A \wedge B
\end{array}
$$

Analysis I

Lösungsblatt 2

Aufgabe 1

(a) Sei $\{x, y\} = \{x, z\}$. Es folgt $(y = x) \vee (y = z)$. Falls $y = x$ ist, folgt

$$\{x, z\} = \{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$$

und daher $x = z$. Damit ist $y = x = z$ in beiden Fälle.

(b) Falls $x \neq u$ ist, ist auch $\{x\} \neq \{u\}$, und aus

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$$

folgt dann $\{x\} = \{u, v\}$, also $x = u$, doch das ist absurd. Es gilt also $x = u$. Damit ist $\{x\} = \{u\}$ und Teil (a) liefert

$$\{x, y\} = \{u, v\} = \{x, v\} \ ,$$

also $y = v$, wieder mit (a).

Aufgabe 2 Zu zeigen ist zunächst: Φ ist injektiv. Seien dazu $f, g \in Z^{X \times Y}$ mit

$$\Phi(f) = \Phi(g) \ .$$

Dann ist für alle $(x, y) \in X \times Y$

$$f(x, y) = [\Phi(f)(x)](y) = [\Phi(g)(x)](y) = g(x, y) \ ,$$

d.h. $f = g$. Somit ist Φ injektiv.

Nun ist zu zeigen, dass Φ auch surjektiv ist. Sei $g \in \left(Z^Y\right)^X$ beliebig. Definiere $f \in Z^{X \times Y}$ durch

$$f(x, y) := g(x)(y)$$

für alle $(x, y) \in X \times Y$. Dann ist

$$[\Phi(f)(x)](y) = f(x, y) = g(x)(y) \ .$$

Es folgt $\Phi(f) = g$,d.h. Φ ist surjektiv.

Schließlich ist $\Phi(f)(x)$ für alle $f \in Z^{X \times Y}$ und $x \in X$ zu berechnen. Es gilt $\Phi(f)(x) \in Z^Y$, d.h. $\Phi(f)(x)$ ist eine Abbildung $Y \longrightarrow Z$, und zwar

$$\Phi(f)(x) : Y \longrightarrow Z : y \longmapsto [\Phi(f)(x)](y) = f(x, y) \ ;$$

d.h. $\Phi(f)(x)$ ist die Abbildung f mit "festgehaltenem" 1. Argument x .

Aufgabe 3 Sei

$$f : X \longrightarrow \mathfrak{P}(X) \ .$$

eine beliebige Abbildung. Betrachte die Menge

$$M := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \ .$$

Es gilt $M \in \mathfrak{P}(X)$. Angenommen, es gäbe ein $x \in X$ mit $f(x) = M$. Wäre $x \in M$, so würde folgen:

$$x \notin f(x) = M \ ,$$

Widerspruch ! Damit ist $x \notin M$. Aber es folgt

$$x \in f(x) = M \ ,$$

auch ein Widerspruch! Daher existiert kein $x \in X$ mit $f(x) = M$ und f kann nicht surjektiv sein.

Aufgabe 4

(a) Sei $x \in \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$. Dies bedeutet, dass

$$f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j \ .$$

Damit gibt es ein $k \in J$, so dass $f(x) \in B_k$, mit anderen Worten, $x \in \overset{-1}{f}(B_k)$. Insbesondere gilt

$$x \in \bigcup_{j\in J} \overset{-1}{f}(B_j) \ .$$

Da x beliebig gewählt war, ist also

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcup_{j\in J} \overset{-1}{f}(B_j) \ .$$

Sei nun umgekehrt $x \in \bigcup_{j\in J} \overset{-1}{f}(B_j)$ .Es gibt dann ein $k \in J$ mit $x \in \overset{-1}{f}(B_k)$, d.h. $f(x) \in B_k$. Insbesondere gilt $f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j$, d.h.

$$x \in \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \ .$$

Somit ist auch die andere Inklusion bewiesen, und es folgt Gleichheit.

(b) Es gilt $x \in \overset{-1}{f}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)$ genau dann, wenn $f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j$ genau dann, wenn für alle $j \in J$ gilt $f(x) \in B_j$. Dies ist dazu äquivalent, dass für alle $j \in J$ gilt $x \in \overset{-1}{f}(B_j)$, und dies gilt genau dann, wenn $x \in \bigcap_{j\in J} \overset{-1}{f}(B_j)$.

(c) Sei $y \in f\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)$. D.h., es gibt $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$ mit $f(x) = y$. Es gibt ein $k \in J$ mit $x \in A_k$. Damit ist $y = f(x) \in f(A_k)$. Also gilt $y \in \bigcup_{j\in J} f(A_j)$.

Sei umgekehrt $y \in \bigcup_{j\in J} f(A_j)$. Dann gibt es ein $k \in J$ mit $y \in f(A_k)$. Dies bedeutet, dass es ein $x \in A_k$ gibt mit $y = f(x)$. Da insbesondere $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$, folgt somit $y = f(x) \in f\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)$.

(d) Sei $y \in f\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$, d.h., es gibt ein $x \in \bigcap_{j\in J} A_j$ mit $y = f(x)$. Da also $x \in A_j$ für alle $j \in J$, folgt, dass für alle $j \in J$ gilt $y = f(x) \in f(A_j)$, also $y \in \bigcap_{j\in J} f(A_j)$.

In der letzten Formel gilt im allgemeinen keine Gleichheit. Sei etwa

$$X = J = \{1,2\} \quad , \quad A_1 := \{1\} \quad , \quad A_2 := \{2\} \quad , \quad f : X \longrightarrow X : x \longmapsto 1 \; .$$

Dann gilt

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneqq \{1\} = \{1\} \cap \{1\} = f(A_1) \cap f(A_1) \; .$$

Analysis I

Lösungsblatt 3

Aufgabe 1

(a) Behauptung: Es gibt eine Abbildung

$$f : X_m \longrightarrow X_n \ ,$$

die

(i) injektiv ist, genau dann wenn $m \leqslant n$ ist.
(ii) surjektiv ist, genau dann wenn $m \geqslant n$ ist.
(iii) bijektiv ist, genau dann wenn $m = n$ ist.

Beweis von (i). Sei $m \leqslant n$, d.h. $m \subset n$. Dann ist die Inklusionsabbildung

$$j : m \longrightarrow n : k \longmapsto j(k) := k$$

injektiv. Da $\#X_m = m$, $\#X_n = n$ existieren bijektive Abbildungen

$$\mu : m \longrightarrow X_m \quad \text{und} \quad \nu : n \longrightarrow X_n \ .$$

Wir definieren nun

$$f := \nu \circ j \circ \mu^{-1} : X_m \longrightarrow X_n \ .$$

Dieses f ist als Verkettung injektiver Abbildungen selbst injektiv.

Umgekehrt existiere nun eine injektive Abbildung

$$f : X_m \longrightarrow X_n \ .$$

Da die Vereinigung

$$X_n = f(X_m) \cup (X_n \setminus f(X_m))$$

disjunkt ist, folgt nach Hauptsatz 3.7

$$\#(X_n) = \#(f(X_m)) + \#(X_n \setminus f(X_m)) \geqslant \#(f(X_m)) \ ,$$

also

$$m = \#(X_m) = \#(f(X_m)) \leqslant \#(X_n) = n$$

(Schubfachprinzip: Wenn man m Gegenstände auf n Schubfächer verteilt und wenn $m > n$ ist, so liegt in wenigstens einem Schubfach mehr als ein Gegenstand.)

Beweis von (ii). Sei $m \geqslant n$, also $m \supset n$. Mit den gleichen Bezeichnungen wie oben ergibt sich, daß die Abbildungen

$$p : m \longrightarrow n : k \longmapsto p(k) := \begin{cases} k & , \quad k < n \\ n-1 & , \quad k \geqslant n \end{cases}$$

und

$$f := \nu \circ p \circ \mu^{-1} : X_m \longrightarrow X_n \ .$$

surjektiv sind.

Sei nun eine surjektive Abbildung

$$f : X_m \longrightarrow X_n$$

gegeben. Dann existiert eine injektive Abbildung

$$g : X_n \longrightarrow X_m$$

(mit $f \circ g = \mathrm{id}_{X_n}$, vgl. Satz 4.1). Aus (i) folgt damit $n \leqslant m$.

Beweis von (iii). Durch Kombination der ersten beiden Aussagen folgt, daß $m = n$ sein muß, falls eine bijektive Abbildung $f : X_m \longrightarrow X_n$ existiert.

Ist $m = n$, so ist die Abbildung

$$\nu \circ \mu^{-1} : X_m \longrightarrow X_n$$

bijektiv.

(b) Definiere

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Dann ist f bijektiv, denn sei $f(n) = f(m)$. Es folgt, daß entweder m und n beide gerade oder beide ungerade sein müssen, da sonst $f(n)$ und $f(m)$ unterschiedliche Vorzeichen hätten. Also ist entweder

$$\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$$

oder

$$\frac{-(n+1)}{2} = \frac{-(m+1)}{2} \ .$$

In beiden Fällen folgt sofort $m = n$, d.h. f ist injektiv. Sei $m \in \mathbb{Z}$ beliebig vorgegeben. Falls $m < 0$, so ist

$$m = f(-2m-1) \ .$$

Falls $m \geqslant 0$, so ist $m = f(2m)$. Also ist f auch surjektiv.

Aufgabe 2

(a)

(i) Reflexivität: Für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$ gilt

$$A \leqslant A \quad , \quad \text{da } A \subset A \ .$$

(ii) Antisymmetrie: Seien $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ mit

$$A \leqslant B \quad \text{und} \quad B \leqslant A \ ,$$

d.h.

$$B \subset A \quad \text{und} \quad A \subset B \ ,$$

also $A = B$.

(iii) Transitivität: Seien $A, B, C \in \mathfrak{P}(X)$ mit

$$A \leqslant B \quad \text{und} \quad B \leqslant C \ ,$$

d.h.

$$B \subset A \quad \text{und} \quad C \subset B \ .$$

Wegen der Transitivität der Inklusion (vgl. Vorlesung) folgt $C \subset A$, also $A \leqslant C$.

Die Ordnung ist genau dann total, wenn $\#X \leqslant 1$ ist. Dies sieht man so: Sei $\#X \leqslant 1$. Dann ist $\mathfrak{P}(X) = \{\emptyset, X\}$. Wegen

$$\emptyset \subset \emptyset \quad , \quad \emptyset \subset X \quad , \quad X \subset X$$

ist die Ordnung in diesem Fall total. Ist $\#X > 1$, so existieren Elemente $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gilt

$$\{x\} \not\subseteq \{y\} \quad \text{und} \quad \{x\} \not\subseteq \{y\} \ ,$$

also ist die Ordnung in diesem Fall nicht total.

(b) Seien $A, B \in \mathfrak{P}(X)$. Dann gilt für $C := A \cap B$, daß

$$A \leqslant C \quad \text{und} \quad B \leqslant C$$

ist.

(c) Wegen $\emptyset \subset A$ für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$, d.h. $A \leqslant \emptyset$, ist $M := \emptyset$ das größte Element.

Aufgabe 3

(a) Sei $a \in A$; wir führen den Beweis durch Fallunterscheidung. Ist $a \in B$, so ist

$$a \in A \cap B \subset (A \setminus B) \cup (A \cap B) \ .$$

Ist $a \notin B$, so folgt ähnlich $a \in A \setminus B \subset (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Sei umgekehrt $a \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, so folgt

$$a \in (A \setminus B) \subset A \quad \text{oder} \quad a \in (A \cap B) \subset A \ ,$$

also $a \in A$.

Für die Disjunktheit ist für alle y die Relation $y \notin (A \setminus B) \cap (A \cap B)$ zu zeigen. Wir nehmen im Gegenteil $y \in (A \setminus B) \cap (A \cap B)$ an. Dann folgt

$$y \in (A \setminus B) \quad \text{und} \quad y \in (A \cap B)$$

also $y \notin B$ und $y \in B$; ein Widerspruch.

(b) Sei $v \in A \cup B$, d.h. $(v \in A) \vee (v \in B)$. Wieder gehen wir durch Fallunterscheidung vor, wobei für $v \in B$ bereits $v \in (A \setminus B) \cup B$ gezeigt ist. Sei also $v \notin B$. Da weiterhin $(v \in A) \vee (v \in B)$, ist auch hier $v \in (A \setminus B) \cup B$ klar erfüllt.

Die umgekehrte Inklusion ist trivial, und die Disjunktheit wird wie oben bewiesen.

(c) Die zu folgernden Formeln sind eine direkte Konsequenz von Hauptsatz 3.7 und geeigneter Kombination.

Aufgabe 4

(a) Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \frac{0^2\,(0+1)^2}{4} \ .$$

Induktionsvoraussetzung (IV) :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} \ .$$

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=0}^{n} k^3 \overset{IV}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2\,(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} \ .$$

(b) Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{1\,(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1} \ .$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} \overset{IV}{=} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + 1 - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{(n+2)-1}{(n+1)\,(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \ .$$

Aufgabe 5 Wir definieren die Abbildung

$$f_u : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto \begin{cases} v & \text{falls} \quad x \neq a \\ u & \phantom{\text{falls}} \quad x = a \end{cases} \ .$$

Wegen $a \neq b$ ist dann

$$u = \mathrm{pr}_a\,(f_u) \neq \mathrm{pr}_b\,(f_u) = v \ ,$$

also $\mathrm{pr}_a \neq \mathrm{pr}_b$.

Analysis I

Lösungsblatt 4

Aufgabe 1 Es gilt für alle $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

$$(a,b) \circ (a',b') = \left(aa' + bb', \frac{1}{2}(ab' + a'b)\right) = \left(a'a + b'b, \frac{1}{2}(a'b + ab')\right) = (a',b') \circ (a,b) \ .$$

Damit ist $\circ$ kommutativ.

Andererseits gilt

$$(1,1) \circ (1,1) = (2,1) \quad \text{und} \quad (1,1) \circ (0,1) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \ ,$$

also

$$((1,1) \circ (1,1)) \circ (0,1) = (1,*) \neq (\frac{3}{2},*) = (1,1) \circ ((1,1) \circ (0,1)) \ ,$$

also ist $\circ$ nicht assoziativ.

Aufgabe 2

(a) Zu zeigen ist: Für alle $k \geqslant 1$ ist $2k+1 \in M$. Beweis durch Induktion. Es gilt $2 \cdot 1 + 1 = 3 \in M$.

Es gelte nun $k \geqslant 1$ und $2l+1 \in M$ für alle $1 \leqslant l \leqslant k$. Die Zahl k ist entweder gerade oder ungerade.

Sei zunächst k gerade. Dann ist $k+1$ ungerade. Da $k \geqslant 1$, ist

$$k + 1 \leqslant 2k + 1 \ .$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind alle ungeraden Zahlen $\leqslant 2k+1$ in M . Also folgt $k+1 \in M$. Damit ist aber auch

$$2(k+1) + 1 \in M \ .$$

Sei nun k ungerade. Dann ist auch $k+2$ ungerade; da $k \geqslant 1$, gilt

$$k + 2 \leqslant 2k + 1 \ ,$$

liegt also wie eben in M . Also gilt auch

$$2(k+1) + 1 = 2(k+2) - 1 \in M \ .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b) In der Tat gilt

$$2^n < n! \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 4 \ .$$

Denn für $n = 4$ gilt

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

Sei $n \geqslant 4$ und gelte $2^n < n!$. Dann folgt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{IV}{<} 2 \cdot n! \overset{n>1}{<} (n+1) \cdot n! = (n+1)! \ ,$$

also die Behauptung.

Aufgabe 3

(a) Zu festem $k \geqslant 1$ führen wir eine Induktion nach n . Für $n = 0$ ist

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{k+j-1}{j} = \binom{k-1}{0} \overset{k\geqslant 1}{=} 1 = \binom{k}{0} \ .$$

Sei $n \geqslant 0$ und gelte

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{k+j-1}{j} = \binom{n+k-1}{n-1} \ .$$

Damit folgt

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j-1}{j} = \binom{n+k-1}{n} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k+j-1}{j} =$$

$$\overset{IV}{=} \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k}{n} \ .$$

(b) Es gilt

$$M(n,k) := \left\{ s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \ \middle| \ \sum_{l=1}^{k} s_l = n \right\} \ .$$

(c) Beweis durch Induktion nach k . Für $k = 1$ gilt:

$$\# M_{n,1} = 1 = \binom{n}{n} = \binom{n+1-1}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Sei $k \geqslant 1$ und gelte

$$\# M_{n,k} = \binom{n+k-1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant j \leqslant n$ definiere die Menge

$$A(n, k+1, j) := \left\{ s \in \mathbb{N}^{k+1} \ \middle| \ \sum_{l=1}^{k} s_l = n - j \ , \ s_{k+1} = j \right\} \ .$$

Dann ist $(A(n,k+1,j))_{j=0,\ldots,n}$ eine Partition von $M(n, k+1)$ und

$$\# A(n, k+1, j) = \# M(n-j, k)$$

Es folgt

$$\#M\,(n,k+1) = \sum_{j=0}^{n} \#A\,(n,k+1,j) = \sum_{j=0}^{n} \#M\,(n-j,k) \ ,$$

also durch Umsummation und mit Teil (a)

$$\#M\,(n,k+1) = \sum_{j=0}^{n} \#M\,(n-j,k) \overset{IV}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j+k-1}{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{k-1+n-j}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{k+j-1}{j} = \binom{n+k}{n} \ .$$

Aufgabe 4

(a) Zunächst gilt für alle $a \in K$

$$a \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a + (-a) \geqslant -a$$

also, indem man dies auf $-a$ anwendet,

$$a \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a \leqslant 0 \ .$$

Außerdem gilt

$$a, b \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad a + b \geqslant b \geqslant 0 \ .$$

Seien nun $x, y \in K$. Sind beide $\geqslant 0$, so folgt sofort

$$xy \geqslant x \cdot 0 = 0 \ .$$

Sind beide $\leqslant 0$, so sind $-x$ und $-y$ beide $\geqslant 0$, also auch

$$0 \leqslant (-x)\,(-y) = xy \ .$$

Umgekehrt sei nun $xy \geqslant 0$. Zu zeigen ist: x und y beide $\geqslant 0$ oder beide $\leqslant 0$. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist dies stets der Fall. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind also $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Ist $x > 0$, so folgt $y > 0$, denn sonst wäre

$$0 \leqslant xy = -(x(-y)) < 0 \ ,$$

Widerspruch! Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$, und aus dem obigen folgt $-y > 0$. Die Behauptung ist bewiesen.

(b) Sei $x > 0$ und $xy > 0$. Nach (a) ist $y \geqslant 0$ und weiterhin ist $y \neq 0$, also ist $y > 0$. Ist umgekehrt $y > 0$, so folgt wegen $x > 0$, dass $xy \geqslant 0$. Aber $xy \neq 0$, also folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

(a) Bezeichne 1 das neutrale Element der Gruppe $(K \smallsetminus \{0\}\,,\cdot)$, d.h. das eindeutig bestimmte Element $1 \in K$, welches

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

für alle $a \in K$ erfüllt. Dann ist $1 \neq 0$. Da K total geordnet ist, gilt dann

$$1 < 0 \quad \text{oder} \quad 1 > 0 \ .$$

Wäre $1 < 0$, so wäre $-1 > 0$ und somit

$$0 < (-1)\,(-1) = 1 < 0 \ ,$$

Widerspruch ! Also gilt $1 > 0$ und insbesondere

$$2 := 1 + 1 > 1 > 0 \ .$$

Insbesondere ist 2 invertierbar in K. Da

$$0 < 1 = 2 \cdot 2^{-1}$$

ist, folgt aus (b), dass $0 < 2^{-1}$ .Definiere nun

$$z := 2^{-1} \cdot (x + y) \ .$$

Aus $x < y$ folgt

$$2x = x + x < x + y < y + y = 2y \ ,$$

also

$$x = 2^{-1} \cdot 2x < z < 2^{-1} \cdot 2y = y \ .$$

(b) Angenommen, K sei endlich. Sei $x \in K$ das kleinste Element von K und y das kleinste Element von $K \setminus \{x\}$. Es gilt also $x < y$. Aber es gibt ein $z \in K$ mit $x < z < y$, Dann ist $z \in K \setminus \{x\}$, aber kleiner als y , Widerspruch!

Analysis I

Lösungsblatt 5

Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$x^2 - 2bxy + b^2y^2 = (x-by)^2 \geqslant 0 \ ,$$

also folgt $x^2 + b^2y^2 \geqslant 2bxy$. Nun ist $b^{-1} > 0$ (vgl. Aufgabe 4, Blatt 4). Damit folgt

$$2xy = b^{-1}2bxy \leqslant b^{-1}\left(x^2 + b^2y^2\right) = \frac{1}{b}x^2 + by^2 \ .$$

(b) Die Ungleichung $x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}$ ist genau dann erfüllt, wenn $x - y < \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$; was äquivalent ist zu

$$x - y < \frac{x-y}{xy} \ .$$

Wegen $1 < x < y$ ist $xy > 1$, deshalb ist die letzte Ungleichung und mit ihr die Behauptung erfüllt.

Aufgabe 2

(a) Wir unterscheiden die Fälle $a = 0$, $a > 0$ und $a < 0$.

Fall $a = 0$ ***und*** $b = 0$ ***:*** Es folgt sofort aus der Definition der Mengen A und B , daß

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid c \geqslant 0\} = \left\{ \begin{array}{lcl} \emptyset & & c < 0 \\ & \text{falls} & \\ \mathbb{R} & & c \geqslant 0 \end{array} \right.$$

und

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid c \leqslant 0\} = \left\{ \begin{array}{lcl} \emptyset & & c > 0 \\ & \text{falls} & \\ \mathbb{R} & & c \leqslant 0 \end{array} \right. \ .$$

Fall $a = 0$ ***und*** $b \neq 0$ ***:*** Es ist

$$b \cdot x + c \left\{ \begin{array}{c} \geqslant \\ \leqslant \end{array} \right\} 0$$

genau dann wenn,

$$x \left\{ \begin{array}{c} \geqslant \\ \leqslant \end{array} \right\} -\frac{c}{b} \quad \text{falls} \quad b > 0 \quad , \quad x \left\{ \begin{array}{c} \leqslant \\ \geqslant \end{array} \right\} -\frac{c}{b} \quad \text{falls} \quad b < 0 \ .$$

Somit ist

$$A = \begin{cases} \left[-\frac{c}{b}, \infty\right[& \\ & \text{falls} \\ \left]-\infty, -\frac{c}{b}\right] & \end{cases} \begin{matrix} b > 0 \\ \\ b < 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{cases} \left]-\infty, -\frac{c}{b}\right] & \\ & \text{falls} \\ \left[-\frac{c}{b}, \infty\right[& \end{cases} \begin{matrix} b > 0 \\ \\ b < 0 \end{matrix}$$

Fall $a > 0$ ***:*** In diesem Fall hat man

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \geqslant 0 \right\} \quad , \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \leqslant 0 \right\}$$

und es gilt

$$0 \left\{ \begin{matrix} \leqslant \\ \geqslant \end{matrix} \right\} x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a}$$

genau dann, wenn

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \left\{ \begin{matrix} \geqslant \\ \leqslant \end{matrix} \right\} \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \ . \tag{$*$}$$

Deshalb ist

$$A = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad B = \emptyset \quad \text{falls } b^2 - 4ac < 0 \ .$$

Wenn $b^2 - 4ac \geqslant 0$, dann ist $(*)$ mit Lemma 4.11 äquivalent zu

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| \left\{ \begin{matrix} \geqslant \\ \leqslant \end{matrix} \right\} \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ . \tag{$**$}$$

Definiert man

$$x_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ ,$$

so bedeutet $(**)$ einerseits (Fall $\geqslant$)

$$x + \frac{b}{2a} \geqslant \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{oder} \quad -\left(x + \frac{b}{2a} \right) \geqslant \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ ,$$

d.h.

$$x \geqslant x_1 \quad \text{oder} \quad x \leqslant x_2 \ ,$$

und andererseits (Fall $\leqslant$)

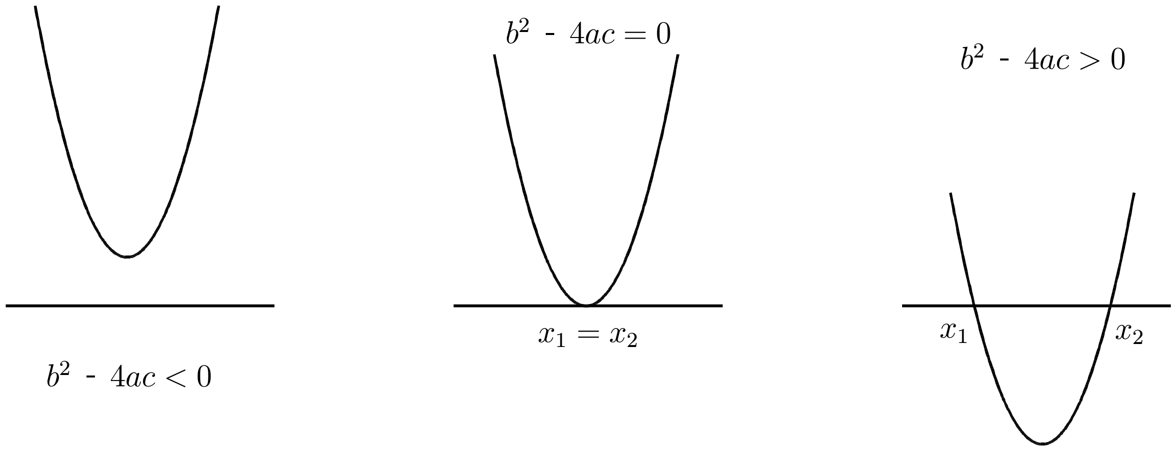
$$x + \frac{b}{2a} \leqslant \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad -\left(x + \frac{b}{2a} \right) \leqslant \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ ,$$

d.h.

$$x_2 \leqslant x \leqslant x_1 \ .$$

Somit ist

$$A = \left]-\infty, x_2\right] \cup \left[x_1, \infty\right[\quad \text{und} \quad B = [x_2, x_1] \ .$$



Fall $a < 0$ ***:*** Multipliziert man alle Ungleichungen mit -1 , sieht man sofort, daß man nur A und B vertauschen und a, b, c durch $-a, -b, -c$ ersetzen muß. Formal kann man dies folgendermaßen schreiben: Sei

$$A(a,b,c) := \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geqslant 0\right\}$$

und

$$B(a,b,c) := \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leqslant 0\right\} \ .$$

Es gilt dann

$$A(a,b,c) := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ (-a) \cdot x^2 + (-b) \cdot x + (-c) \leqslant 0\right\} = B(-a,-b,-c)$$

und

$$B(a,b,c) := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ (-a) \cdot x^2 + (-b) \cdot x + (-c) \geqslant 0\right\} = A(-a,-b,-c) \ .$$

(b) Weil Quadrate reeller Zahlen stets positiv sind, gilt

$$x^2 + axy + by^2 = \left(x + \frac{a}{2}y\right)^2 + \frac{y^2}{4}\left(4b - a^2\right) \geqslant 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

genau dann, wenn $4b - a^2 \geqslant 0$ ist. Es folgt

$$C = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 4b - a^2 \geqslant 0 \right\} \ .$$

Aufgabe 3

(a) Diese Gleichung ist trivial, da ohne Einschränkung $a \leqslant b$, d.h.

$$\min(a,b) = a \quad \text{und} \quad \max(a,b) = b$$

angenommen werden kann.

(b) Da beide Seiten der Gleichung invariant unter Vertauschung von a und b sind, kann man OE $a \geqslant b$ annehmen. Dann ist $|a-b| = a - b$ und damit

$$\frac{1}{2}(a + b + |a-b|) = a = \max(a,b) \ .$$

(c) Die dritte Gleichung wird analog bewiesen, oder man führt sich mittels $\min(a,b) = -\max(-a,-b)$ auf die vorige zurück. Als weiterer alternativer Beweis kann man die Gleichung (b) von der in (a) abziehen.

Aufgabe 4 Wir setzen

$$s_X := \sup X \quad \text{und} \quad s_Y := \sup Y \ .$$

Da nach Voraussetzung X und Y beschränkt sind, gilt $s_X, s_Y \in \mathbb{R}$ und da $\mathbb{R}$ total geordnet ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß

$$s_X \leqslant s_Y$$

ist, d.h. $\max(s_X, s_Y) = s_Y$.

(a) Da $X \cup Y$ nichtleer und beschränkt ist, existiert $\sup(X \cup Y) \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in X \cup Y$ ist $x \leqslant s_Y$, so daß s_Y eine obere Schranke von $X \cup Y$ ist.

Kein $\xi \in X \cup Y$ mit $\xi < s_Y$ kann obere Schranke von $X \cup Y$ sein, denn nach der Approximationseigenschaft des Supremums existiert ein $y \in Y$ mit

$$\xi < y < s_Y \ .$$

Der Beweis für das Infimum verläuft analog, indem man die Ordnungsrelation umdreht. Alternativ kann man sich auch auf das bereits Gezeigte zurückziehen, indem man $\inf A = -\sup(-A)$ verwendet.

(b) Da $X \cap Y$ nichtleer und beschränkt ist, existiert $\sup(X \cap Y) \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in X \cap Y$ ist $x \in X$ und deshalb $x \leqslant s_X$. Es ist also s_X eine obere Schranke von $X \cap Y$ und folglich

$$\sup(X \cap Y) \leqslant s_X = \min(s_X, s_Y) \ .$$

Es kann auch strikt kleiner gelten, wie man an dem Beispiel

$$X := \{-1, 0, 1\} \ , \ Y := \{-2, 0, 2\}$$

sehen kann, denn es ist

$$0 = \sup(X \cap Y) < \min(\sup X, \sup Y) = 1 \ .$$

Der Beweis für das Infimum verläuft erneut analog.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

A. Alldridge und R. Jäger
Wintersemester 2001/02

Analysis I

Lösungsblatt 6

Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$\sup_{n,m\geqslant 1}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{m}\right]=\sup_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\sup_{m\geqslant 1}\frac{3}{m}\ .$$

Falls $m_1 > m_2 \geqslant 1$, folgt $\frac{3}{m_1} < \frac{3}{m_2}$. Damit ist

$$\sup_{m\geqslant 1}\frac{3}{m}=\frac{3}{1}=3\ .$$

Weiter gilt $\left(-\frac{2}{3}\right)^n > 0$ genau dann, wenn n gerade ist, und es gilt für $n_1 > n_2 \geqslant 1$, dass

$$\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^{n_1}\right|<\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^{n_2}\right|\ .$$

Damit ist $\sup_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. Es folgt

$$\sup_{n,m\geqslant 1}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{m}\right]=3+\frac{4}{9}\ ,$$

also gilt Gleichheit, und dies ist ein Maximum.

Wie oben gilt

$$\inf_{n,m\geqslant 1}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{m}\right]=\inf_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\inf_{m\geqslant 1}\frac{3}{m}\ .$$

Nach der obigen Überlegung ist

$$\inf_{n\geqslant 1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^1=-\frac{2}{3}\ .$$

Weiter gilt

$$\inf_{m\geqslant 1}\frac{3}{m}=3\cdot\inf_{m\geqslant 1}\frac{1}{m}=0\ ,$$

also

$$\inf_{n,m\geqslant 1}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{m}\right]=-\frac{2}{3}+0=-\frac{2}{3}\ .$$

Aber

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{m}>-\frac{2}{3}\quad\text{für alle}\quad n,m\geqslant 1\ ,$$

also ist dies kein Minimum.

(b) Sei $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Dann ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\inf X \geqslant 0$. Tatsächlich gilt $\inf X = 0$. Denn mit der binomischen Formel folgt

$$x_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ .$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n < \varepsilon$. Denn dann folgt die Behauptung mit der Approximationseigenschaft des Infimums. Nach dem Satz von Archimedes gibt es aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$, also

$$\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant x_n \ ,$$

und die Behauptung ist bewiesen. Da stets $x_n > 0$, ist $\inf X$ kein Minimum.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 0 \ .$$

Denn es gilt

$$\sqrt{n\,(n+2)} = \sqrt{n^2 + 2n} < \sqrt{n^2 + 2n + 1} = n + 1$$

und somit

$$\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)^2 = 2n + 2 + 2\sqrt{n\,(n+2)} < 4\,(n+1) = \left(2\sqrt{n+1}\right)^2 \ .$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also streng fallend. Es folgt $\sup X = x_0 = 1$. Dies ist offenbar ein Maximum.

Aufgabe 2 Es gilt

$$\frac{2-5i}{4+3i} = \frac{(2-5i)\,(4-3i)}{(4+3i)\,(4-3i)} = \frac{1}{25}\,(8 - 6i - 20i - 15) = -\frac{7}{25} + i \cdot \left(-\frac{26}{25}\right)$$

und

$$\left(\frac{4 \cdot i^{11} - i}{1+2i}\right)^2 = \left[\frac{\left(4 \cdot i \cdot (i^2)^5 - i\right)(1-2i)}{(1+2i)\,(1-2i)}\right]^2 = \frac{1}{25}\left[(-4 \cdot i - i)\,(1-2i)\right]^2$$

$$= \frac{1}{25}\,(-10 - 5 \cdot i)^2 = \frac{1}{25}\,(100 - 25 + 100 \cdot t) = 3 + 4 \cdot i \ .$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$\inf_{z\in Z_1} |z| = \inf_{|z|\geqslant 1} \frac{1}{|z|} \geqslant 0 \ .$$

Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, 1\right)$, also gilt mit $z := n$, dass $|z| = n > 1$ und $\frac{1}{|z|} = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Also ist das Infimum $= 0$. Da für alle $|z| \geqslant 1$ gilt $\frac{1}{|z|} > 0$, ist dies kein Minimum. Da weiter $\frac{1}{|z|} \leqslant 1$ und dies für $z = 1$ zu einer Gleichung wird, ist $\max|Z_1| = \sup|Z_1| = 1$.

Z_1 ist die punktierte Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt 0 , inklusive des Randes.

(b) Wieder gilt

$$\inf|Z_2| = \inf_{\operatorname{Im} z>0} \left|\frac{z-i}{z+i}\right| \geqslant 0 \ .$$

Andererseits gilt für $z = i$, dass $\frac{z-i}{z+i} = \frac{0}{2i} = 0$. Also ist das Infimum $= 0$ und ein Minimum.

Andererseits gilt für $\operatorname{Im} z > 0$

$$|z-i|^2 = (z-i)\left(\overline{z}+i\right) = |z|^2 - 2\operatorname{Im} z + 1 < |z|^2 + 2\operatorname{Im} z + 1 = |z+i|^2 \ ,$$

also

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \quad \text{und insbesondere} \quad \sup|Z_2| \leqslant 1 \ .$$

Es gilt sogar $\sup|Z_2| = 1$. Ist nämlich $0 < \varepsilon < 1$, so gibt es nach Archimedes ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \ .$$

Es folgt

$$\varepsilon \cdot |i\cdot(n+1)+i| = \varepsilon \cdot (n+2) < n = |i\cdot(n+1)-i| \ ,$$

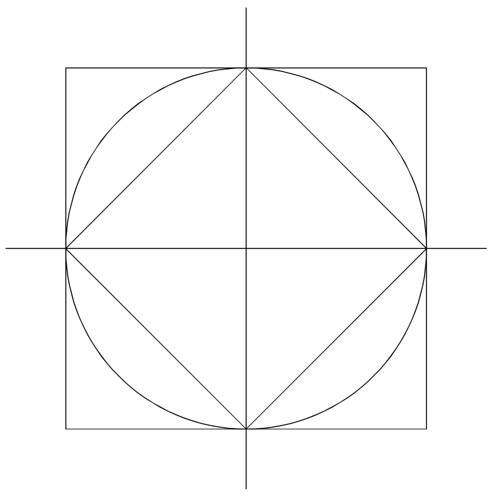
also mit $z := i\cdot(n+1)$

$$\varepsilon < \left|\frac{i\cdot(n+1)-i}{i\cdot(n+1)+i}\right| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right| \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = n+1 > 0 \ .$$

Damit ist $\sup|Z_2| = 1$ und dies ist kein Maximum, da stets $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$ wenn $\operatorname{Im} z > 0$.

Die Menge Z_2 ist die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt 0 , ohne den Rand.

Aufgabe 4 Man sieht von außen nach innen die Kugeln bezüglich der Metriken d_∞, d_2, d_1 :



Sei $(x, y) \in B(0, r, d_1)$. Dann ist

$$d_2(0, (x, y))^2 = x^2 + y^2 \leqslant x^2 + 2|x||y| + y^2 = d_1(0, (x, y))^2 \leqslant r^2 ,$$

also $d_2(0, (x, y)) \leqslant r$ und somit $(x, y) \in B(0, r, d_2)$.

Sei $(x, y) \in B(0, r, d_2)$. Dann ist

$$d_\infty(0, (x, y))^2 = (\max(|x|, |y|))^2 = \max\left(x^2, y^2\right) \leqslant x^2 + y^2 = d_2(0, (x, y))^2 \leqslant r^2 ,$$

also $d_\infty(0, (x, y)) \leqslant r$ und somit $(x, y) \in B(0, r, d_\infty)$.

Sei $(x, y) \in B(0, r, d_\infty)$. Dann ist

$$d_1(0, (x, y)) = |x| + |y| \leqslant 2\max(|x|, |y|) = 2d_\infty(0, (x, y)) \leqslant 2r ,$$

also ist $(x, y) \in B(0, 2r, d_1)$.

Es gilt

$$B(0, \rho, d_2) \subset B(0, r, d_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \rho \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}} .$$

In der Tat: Sei $(x, y) \in B\left(0, \frac{r}{\sqrt{2}}, d_2\right)$. Dann gilt

$$d_1(0, (x, y))^2 = (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \leqslant 2\left(|x|^2 + |y|^2\right) \leqslant 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 ,$$

da

$$2\left(|x|^2 + |y|^2\right) - \left(x^2 + y^2 + 2|x||y|\right) = |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2 \geqslant 0 .$$

Damit ist $d_1(0, (x, y)) \leqslant r$, mithin $(x, y) \in B(0, r, d_1)$.

Andererseits gilt für $(x, y) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$, dass

$$d_2(0, (x, y)) = \sqrt{2 \cdot \frac{\rho^2}{2}} = \rho ,$$

d.h. $(x, y) \in B(0, \rho, d_2)$. Gilt also $B(0, \rho, d_2) \subset B(0, r, d_1)$, so folgt $(x, y) \in B(0, r, d_1)$, das heißt

$$r \geqslant d_1(0, (x, y)) = 2 \cdot \frac{\rho}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \rho ,$$

mit anderen Worten, $\rho \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}$. Damit ist die obige Äquivalenz bewiesen und der maximale Radius ist $\rho = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Analysis I

Lösungsblatt 7

Aufgabe 1

(a) Es folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$d(x,z) - d(z,y) \leqslant d(x,y) \ .$$

Da $d(y,x) = d(x,y)$, kann man x und y auf der linken Seite vertauschen, und es gilt

$$d(y,z) - d(z,x) \leqslant d(x,y) \ .$$

Insgesamt gilt also $|d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y)$.

(b) Mit der Dreiecksungleichung für $|\cdot|$ und (a) folgt

$$|d(x,y) - d(z,w)| = |d(x,y) - d(y,z) + d(y,z) - d(z,w)| \leqslant$$

$$\leqslant |d(x,y) - d(y,z)| + |d(y,z) - d(z,w)| \leqslant d(x,z) + d(y,w) \ .$$

(c) Nach der Vierecksungleichung ist

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leqslant d(x_n,x) + d(y_n,y) \ .$$

Da nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} d(y_n,y) = 0$$

gilt, folgt $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

(d) Es folgt unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften für d , dass

$$\delta(x,y) \geqslant 0 \quad \text{für alle } x,y \in X$$

und

$$\delta(x,y) = 0 \quad \text{genau dann, wenn } x = y \ .$$

Für $a,b > -1$ gilt

$$a \leqslant b \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b} \ .$$

Denn

$$\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b} \Longleftrightarrow a + ab = a\cdot(1+b) \leqslant b\cdot(1+a) = b + ab \Longleftrightarrow a \leqslant b \ .$$

Es folgt

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leqslant \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} =$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \delta(x,z) + \delta(z,y) \ ,$$

d.h. δ erfüllt ebenfalls die Dreiecksungleichung. Somit ist auch (X,δ) ein metrischer Raum.

Es gilt $\delta(x,y) < 1$ für alle $x, y \in X$, denn für $x = y$ gilt $\delta(x,y) = 0$ und sonst ist

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{d(x,y)}{d(x,y)} = 1 \ .$$

Insbesondere gilt $B(x,1,\delta) = X$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 2 Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst. Es ist

$$x_1 - x_0 = 3 - 2 = 1 > 0$$

und setzen wir voraus, daß $x_n - x_{n-1} > 0$ ist, so folgt

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + 2 - \frac{x_{n-1}}{2} - 2 = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) > 0 \ .$$

Des weiteren ist $x_n \leqslant 4$ für alle n , wie wir ebenfalls durch Induktion sehen. Der Induktionsanfang $x_0 = 2$ ist klar und ist $x_n \leqslant 4$, so ist auch

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 2 \leqslant \frac{4}{2} + 2 = 4 \ .$$

Es folgt aus Monotonie und Beschränktheit, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Der Limes x erfüllt die Gleichung

$$x = \frac{x}{2} + 2 \ ,$$

also folgt $x = \lim_{n\to\infty} x_n = 4$.

Aufgabe 3

(a) Für $n \neq 0$ ist

$$a_n = \frac{n^3\left(7 + \frac{2i}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(3 + \frac{4i}{n^3}\right)} = \frac{7 + \frac{2i}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4i}{n^3}} \ .$$

Unter Benutzung der Grenzwertregeln folgt, daß die Folge konvergiert mit

$$\frac{7}{3} = \frac{7 + 2i\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3 + 4i\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

(b) Ist n von der Form $n = 4k+2$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$i^n = i^2\left(i^4\right)^k = -1^k = -1$$

und damit

$$a_{4k+2} = \sqrt{4k+2} + \sqrt{4k+3} \geqslant \sqrt{k} \ ,$$

d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt und deshalb auch nicht konvergent.

(c) Es ist

$$|a_n| = \left| \frac{2^n + i\,|n^2 - 42|}{n!} + (-1)^{n!}\,\frac{7}{\sqrt[8]{n^4+1}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n}{n!} + \frac{n^2}{n!} + \frac{42}{n!} + \frac{7}{\sqrt[8]{n^4+1}} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \cdot \max\left\{ \frac{2^n}{n!}, \frac{n^2}{n!}, \frac{42}{n!}, \frac{7}{\sqrt[8]{n^4+1}} \right\} \; ,$$

wobei wir die Dreiecksungleichung benutzt haben sowie die Identitäten $|i| = \left|(-1)^{n!}\right| = 1$. Man kann nun leicht zeigen, z.B. mit vollständiger Induktion, daß für $n \geqslant 6$ gilt

$$\max\left\{ \frac{2^n}{n!}, \frac{n^2}{n!}, \frac{42}{n!}, \frac{7}{\sqrt[8]{n^4+1}} \right\} \leqslant \frac{7}{\sqrt{n}} \; .$$

Sei ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Archimedes existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geqslant 16 \cdot \frac{49}{\varepsilon^2}$. Für alle $n \geqslant \max(6, n_0)$ ist dann

$$|a_n| \leqslant 4 \cdot \frac{7}{\sqrt{n_0}} \leqslant \frac{7}{\sqrt{\frac{49}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon \; .$$

Es folgt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert.

(d) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn $(a_n)_{n>10^{671}}$ konvergiert. Für alle $n \geqslant 1$ ist $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, wie sofort durch Potenzieren mit n folgt. Setzen wir

$$\delta_n := \sqrt[n]{n} - 1 \; ,$$

so ist $\delta_n \geqslant 0$ für alle $n \geqslant 1$ und mit der Abschätzung aus Aufgabe 4 folgt

$$n = (1 + \delta_n)^n \geqslant \frac{1}{2} n\,(n-1)\,\delta_n^2 \; .$$

Für $n \geqslant 2$ folgt $\delta_n^2 \leqslant \frac{2}{n-1}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle

$$n \geqslant N(\varepsilon) := 1 + \frac{2}{\varepsilon^2} \; ,$$

daß

$$\delta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{2}{\varepsilon^2} - 1}} = \varepsilon$$

ist. Es folgt, daß $(\delta_n)_{n\geqslant 2}$ eine Nullfolge ist, also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Aufgabe 4 Wir beweisen die erste Aussage mit vollständiger Induktion nach n . Für $n = 0$ ist wegen $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!\,(0-0)!} \; .$$

$n-1 \rightsquigarrow n$: Per definitionem ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} .$$

Falls $k = n$, ist

$$\binom{n-1}{k} = 0 \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} .$$

Falls $k < n$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!k!\,(n-1-k)! + (n-1)!\,(k-1)!\,(n-k)!}{(k-1)!\,(n-k)!k!\,(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{k\,(n-1)! + (n-k)\,(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} .$$

Es folgt

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\prod_{l=1}^{n} l}{\left(\prod_{l=1}^{k} l\right)\left(\prod_{l=1}^{n-k} l\right)} = \frac{\prod_{l=1}^{n} l}{\left(\prod_{l=1}^{k} l\right)\left(\prod_{l=k+1}^{n} (l-k)\right)} =$$

$$= \frac{\prod_{l=k+1}^{n} l}{\left(\prod_{l=k+1}^{n} (l-k)\right)} = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{l}{l-k} = \prod_{l=1}^{n-k} \frac{l+k}{l} ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Indexverschiebung $l \rightsquigarrow l+k$ folgt. Es ist außerdem

$$\prod_{l=1}^{k} \frac{n+l-k}{l} = \frac{1}{k!} \frac{\prod_{l=1}^{n} l}{\prod_{l=1}^{n-k}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} .$$

Die Ungleichung

$$(1+a)^n \geqslant \frac{1}{2} n\,(n-1)\,a^2$$

ist wegen $(1+a)^n \geqslant 0$ trivialerweise für $n = 0$ und $n = 1$ erfüllt. Für $n \geqslant 2$ folgt mit dem Binomischen Lehrsatz

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \geqslant \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^k = 1 + na + \binom{n}{2} a^2 \geqslant$$

$$\geqslant \binom{n}{2} a^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} a^2 = \frac{1}{2} n\,(n-1)\,a^2 .$$

Analysis I

Lösungsblatt 8

Aufgabe 1

(a) Nach Aufgabe 4, Blatt 7 ist

$$\frac{1}{n^k}\cdot\binom{n}{k} = \frac{1}{n^k}\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{k!}\cdot\prod_{l=1}^{k}\frac{n-k+l}{n} \leqslant \frac{1}{k!}\ ,$$

da für alle $1\leqslant l\leqslant k\leqslant n$ gilt

$$0 < \frac{n-k+l}{n} \leqslant 1\ .$$

Durch Induktion nach k sieht man

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{für alle } k\in\mathbb{N}\ .$$

(b) Für alle $n\in\mathbb{N}$ folgt aus (a) einerseits mit der binomischen Formel

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\ ,$$

und anderseits mit der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

$$= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3\ .$$

(c) Da die rechte Seite der Ungleichung von n unabhängig ist, folgt

$$\sup_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3\ .$$

Weiterhin gilt für $n=3$

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}\ .$$

Schließlich bleibt zu zeigen, dass die Folge streng monoton wächst. Es gilt mit der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant$$

$$\geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = 1+\frac{1}{(n+1)^3}\left[(n+1)^2-n\,(n+1)-n\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Damit folgt

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Also ist die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ streng monoton und nach (b) beschränkt, konvergiert also mit

$$\frac{64}{27} < \lim\nolimits_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup\nolimits_{n\geqslant 1} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \leqslant 3 .$$

Aufgabe 2

(a) Es ist

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} > \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} .$$

Damit ist die Folge unbeschränkt, also auch divergent.

(b) Für $q = 1$ ist $a_n = 2^{n+1}$, also (a_n) divergent, weil unbeschränkt. Ist $q \neq 1$, so ist

$$(1-q)\, a_n = (1-q) \prod_{k=0}^{n} \left(1 + q^{2^k}\right) = 1 - q^{2^{n+1}} .$$

In der Tat: Beweis durch Induktion nach n . Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar, da $a_0 = 1+q$ ist. Weiter gilt unter der Induktionsvoraussetzung für n , dass

$$(1-q) \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + q^{2^k}\right) = (1-q) \cdot \left[\prod_{k=0}^{n} \left(1 + q^{2^k}\right)\right] \cdot \left(1 + q^{2^{n+1}}\right) =$$

$$= \left(1 - q^{2^{n+1}}\right)\left(1 + q^{2^{n+1}}\right) = 1 - q^{2^{n+2}} ,$$

also die obige Formel. Damit gilt

$$a_n = \frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1-q} .$$

Aus dieser Formel folgt sofort, dass (a_n) genau dann konvergent ist, wenn $\left(q^{2^{n+1}}\right)$ konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\lim\nolimits_n a_n = \frac{1 - \lim_n q^{2^{n+1}}}{1-q}$$

und

$$\lim\nolimits_n q^{2^{n+1}} = \lim\nolimits_n q^{2^{n+2}} = \lim\nolimits_n q^{2^{n+1}\cdot 2} = \left(\lim\nolimits_n q^{2^{n+1}}\right)^2 ,$$

also

$$\lim\nolimits_n q^{2^{n+1}} = 1 , \quad \text{falls} \quad \lim\nolimits_n q^{2^{n+1}} \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Sei $|q| < 1$. Da $\left|q^{2^{n+1}} - 0\right| = |q|^{2^{n+1}}$ folgt aus Beispiel 5.3.4

$$\lim_n q^{2^{n+1}} = 0 \ ,$$

also

$$\lim_n a_n = \frac{1}{1-q} \ .$$

Sei $|q| > 1$. Nach Korollar 4.10.i ist $\left(|q|^{2^{n+1}}\right)$ als Teilfolge der unbeschränkten und wachsende Folge $\left(|q|^k\right)$ unbeschränkt, somit divergent, und gleiches folgt für (a_n) .

Bleibt der Fall $q \neq 1$ mit $|q| = 1$. Falls $\left(q^{2^{n+1}}\right)$ konvergiert, gilt

$$\left|\lim_n q^{2^{n+1}}\right| = \lim_n |q|^{2^{n+1}} = 1 \ ,$$

also $\lim_n q^{2^{n+1}} \neq 0$ und somit $\lim_n q^{2^{n+1}} = 1$. Wir zeigen jetzt durch Widerspruch, dass ein $M \in \mathbb{N}$ mit $q^{2^{M+1}} = 1$ existiert. Sei also $q^{2^{n+1}} \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_n q^{2^{n+1}} = 1$ folgt die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|q^{2^{n+1}} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \geqslant N \ .$$

Sei $m := \sup_{n \geqslant N} \left|q^{2^{n+1}} - 1\right|$. Nach der Widerspruchsannahme gilt $m \neq 0$ und es gibt ein $\widetilde{N} \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|q^{2^{n+1}} - 1\right| \leqslant \frac{m}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geqslant \widetilde{N} \ ;$$

es folgt

$$m = \sup_{N \leqslant n < \widetilde{N}} \left|q^{2^{n+1}} - 1\right| \ ,$$

also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $m = \left|q^{2^{M+1}} - 1\right|$, denn endliche Mengen haben ein Maximum.

Der Widerspruch ergibt sich nun aus den folgenden Ungleichungen :

$$\frac{1}{2} \geqslant \left|q^{2^{M+2}} - 1\right| = \left|\left(q^{2^{M+1}}\right)^2 - 1\right| = \left|q^{2^{M+1}} - 1\right| \left|q^{2^{M+1}} + 1\right| =$$

$$= \left|q^{2^{M+1}} - 1\right| \left|2 + q^{2^{M+1}} - 1\right| \geqslant \left|q^{2^{M+1}} - 1\right| \left(2 - \left|q^{2^{M+1}} - 1\right|\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2} \left|q^{2^{M+1}} - 1\right| \ .$$

Ist umgekehrt $q \neq 1$ und $q^{2^{M+1}} = 1$ für ein $M \in \mathbb{N}$, so gilt

$$q^{2^{n+1}} = \left(q^{2^{M+1}}\right)^{n-m} = 1 \quad \text{füralle} \quad n \geqslant M \ ,$$

also $\lim_n q^{2^{n+1}} = 1$ und somit $\lim_n a_n = 0$. In diesem Fall kann man sogar zeigen, dass ein $\widetilde{M} \in \mathbb{N}$ existiert mit $q^{2^{\widetilde{M}+1}} = -1$, d.h. $a_n = 0$ für alle $n \geqslant \widetilde{M}$.

Damit konvergiert die Folge (a_n) genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, oder wenn $q \neq 1$ ist und ein $M \in \mathbb{N}$ existiert mit $q^{2^{M+1}} = 1$.

Aufgabe 3

(a) Die Aussage ist wahr.
Denn definiere

$$c_n := b - \frac{b-a}{n+1} \ .$$

Dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b[$ monoton wachsend mit $\sup_n c_n = b$, also gilt

$$\lim_n c_n = b \ .$$

Insbesondere ist (c_n) eine Cauchyfolge. Aber $b \notin [a,b[$. Also ist die Behauptung bewiesen.

(b) Die Aussage ist falsch.
Denn wenn $(c_n) \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge ist, konvergiert (c_n) gegen ein $c \in \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ vollständig ist, insbesondere ist c der einzige Häufungspunkt von (c_n) . Falls nun $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge von (c_n) ist, ist 0 ein Häufungspunkt und somit $c = 0$, d.h., (c_n) ist eine Nullfolge.

(c) Die Aussage ist wahr.
Sei nämlich $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ eine Cauchyfolge. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert (c_n) gegen ein $c \in \mathbb{R}$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a \leqslant c_n \leqslant b \ ,$$

folgt auch

$$a \leqslant c = \lim_n c_n \leqslant b \ ,$$

d.h. $c \in [a,b]$; somit ist (c_n) in $[a,b]$ konvergent und $[a,b]$ ist vollständig.

(d) Die Aussage ist falsch.
Denn definiert man

$$c_n := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ n & \text{falls} \quad n \text{ ungerade} \end{cases} \ ,$$

so ist (c_n) unbeschränkt, also divergent, aber der einzige Häufungspunkt von (c_n) ist 1 .

Aufgabe 4 Man nehme an, dass (z_n) nicht gegen z konvergierte. Damit gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n \geqslant k$ existierte mit

$$|z_n - z| = d(z_n, z) > \varepsilon \ .$$

Sei $n_0 \geqslant 0$ mit

$$|z_{n_0} - z| > \varepsilon$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $n_{k+1} \geqslant n_k + 1$ mit

$$|z_{n_k} - z| > \varepsilon \ .$$

Dann wäre (n_k) eine Teilfolge von $\mathbb{N}$, also (z_{n_k}) eine Teilfolge von (z_n) . Insbesondere wäre $(z_{n_k}) \subset \mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass existierte eine Teilfolge (k_l) von $\mathbb{N}$, so dass $\left(z_{n_{k_l}}\right)$ konvergierte. Da $\left(z_{n_{k_l}}\right)$ eine konvergente Teilfolge von (z_n) wäre, wäre der Grenzwert

$$\lim_l z_{n_{k_l}} = z \ .$$

Dies aber widerspricht

$$\left| z_{n_{k_l}} - z \right| > \varepsilon \quad \text{für alle} \quad l \in \mathbb{N} \, .$$

Damit konvergiert (z_n) gegen z .

Analysis I

Lösungsblatt 9

Aufgabe 1

(a) Nach Rekursionsformel gilt

$$a_{j+1} - a_j = \frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_{j-1} - a_j = \frac{-1}{2}(a_j - a_{j-1}) \quad \text{für } j \geqslant 1$$

und somit $a_{j+1} - a_j = \left(\frac{-1}{2}\right)^j (a_1 - a_0) = \left(\frac{-1}{2}\right)^j$ für alle $j \geqslant 0$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$|a_l - a_k| = \left|\sum_{j=k}^{l-1} (a_{j+1} - a_j)\right| \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} |a_{j+1} - a_j| = \sum_{j=k}^{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } k, l \geqslant N \ ,$$

da die geometrische Reihe konvergiert, also die Cauchy-Bedingung erfüllt. Dies liefert aber gerade die Cauchy-Bedingung für die Folge $(a_k)_k$.

(b) Die Konvergenz der Folge ist nach dem (a)-Teil aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gewährleistet (Cauchy-Kriterium). Über die Gleichung

$$a_k = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^j = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^k\right)$$

erhält man mit den Grenzwertsätzen $\lim_k a_k = \frac{2}{3} \cdot (1 - 0) = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 2

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nehmen wir Œ $n \geqslant m$ an, so folgt für $a_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ mit Aufgabe 8.1.(a), daß

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{2^{m+k}} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2^{m-1}} \ .$$

Da $\frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \frac{1}{m}$ für alle $m \geqslant 2$ ist, folgt $|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant m \geqslant \max\left(2, \frac{1}{\varepsilon}\right)$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent nach dem Cauchy-Kriterium.

Es genügt auch zu beweisen, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist (Satz 6.2). In der Tat gilt nach Aufgabe 4.1.(c) folgende Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{8}{3} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{3} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \leqslant 2,792 \ .$$

(b) Nach Aufgabe 8.1.(b) ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\ .$$

Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Für jedes $n \geqslant m$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{l=0}^{k-1}\frac{n-l}{n}\ .$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{n-l}{n} = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{l}{n} = 1$ für alle $l = 0,\dots,m-1$, ist mit den Grenzwertregeln

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{l=0}^{k-1}\frac{n-l}{n} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{l=0}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n-l}{n} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\ .$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \quad \text{für alle } m\in\mathbb{N}$$

und daher auch $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. Insgesamt folgt also Gleichheit der Limiten.

(c) Nach Bemerkung 6.1.1 gilt

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\ .$$

Mit Aufgabe 8.1.(a) folgt dann

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n\cdot n!}\ .$$

(d) Angenommen, e wäre rational. Dann existieren $p,q\in\mathbb{N}$ mit $q>1$ und $e=\frac{p}{q}$. Für alle $n\geqslant 1$ folgte

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n\cdot n!}\ ,$$

also insbesondere für $n=q$ folgt nach Multiplikation mit $q!$

$$0 < p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} q\,(q-1)\cdots(q-k+1) \leqslant \frac{1}{q} < 1\ .$$

Dies ist jedoch unmöglich, denn

$$p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} q\,(q-1)\cdots(q-k+1) \in \mathbb{Z}\ .$$

Somit haben wir einen Widerspruch und deshalb ist e irrational.

Aufgabe 3 Wir schreiben $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(a) Es ist

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right) .$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

(b) Wir benutzen die geometrische Summenformel, wonach

$$S_n = 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3} \right)^k = 2 \cdot \frac{1 - 3^{-n-1}}{1 - 3^{-1}} + \frac{1 - (-3)^{-n-1}}{1 - (-3)^{-1}}$$

und dieses konvergiert gegen $\frac{15}{4}$ für $n \to \infty$.

(c) Es gilt $\frac{1}{\sqrt{2l+1}} \geqslant \frac{1}{2l+1} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l+1}$. Somit folgt

$$S_{2n+1} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \geqslant \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2l+1} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l+1} .$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Die Partialsummenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat demnach eine divergente Teilfolge, ist also selbst divergent.

Aufgabe 4 Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Cauchy-Eigenschaft der Reihe existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$0 \leqslant n \cdot a_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant N ,$$

insbesondere für alle $n \geqslant N$

$$0 \leqslant 2n \cdot a_{2n} \leqslant 2\varepsilon$$

und

$$0 \leqslant (2n+1) \cdot a_{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{n} \cdot n \cdot a_{2n} \leqslant \frac{2n+1}{n} \cdot \varepsilon \leqslant 3\varepsilon .$$

Dies zeigt, daß $|k \cdot a_k| \leqslant 3\varepsilon$ für alle $k \geqslant 2N$ gilt.

Analysis I

Lösungsblatt 10

Aufgabe 1

(a) Wir zeigen zunächst, dass $\overline{x} := \limsup_k x_k$ ein Häufungspunkt von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Dazu konstruieren wir eine gegen s konvergente Teilfolge.

Beachte zunächst, dass $\left(\sup_{l\geqslant k} x_l\right)_{l\in\mathbb{N}}$ eine fallende nach unten beschränkte Folge ist, also konvergiert mit

$$\lim_k \sup_{l\geqslant k} x_l = \inf_k \sup_{l\geqslant k} x_l = \overline{x} \ .$$

Es gibt also ein $j \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\overline{x} - \sup_{l\geqslant j} x_l\right| \leqslant \frac{1}{2} \ .$$

Wegen der Approximationseigenschaft des Supremums gibt es ein $\alpha(0) \geqslant j$ mit

$$\left|\sup_{l\geqslant j} x_l - x_{\alpha(0)}\right| \leqslant \frac{1}{2} \ .$$

Es folgt mit der Dreieicksungleichung

$$\left|\overline{x} - x_{\alpha(0)}\right| = \left|\overline{x} - \sup_{l\geqslant j} x_l + \sup_{l\geqslant j} x_l - x_{\alpha(0)}\right| \leqslant \left|\overline{x} - \sup_{l\geqslant j} x_l\right| + \left|\sup_{l\geqslant j} x_l - x_{\alpha(0)}\right| \leqslant 1$$

Seien nun $\alpha(0) < \cdots < \alpha(k)$ mit

$$\left|\overline{x} - x_{\alpha(j)}\right| \leqslant \frac{1}{j+1} \quad \text{für alle} \quad 0 \leqslant j \leqslant k \ .$$

Es gibt also ein $j \geqslant \alpha(k) + 1$ mit

$$\left|\overline{x} - \sup_{l\geqslant j} x_l\right| \leqslant \frac{1}{2(k+2)} \ .$$

Wegen der Approximationseigenschaft des Supremums gibt es ein $\alpha(k+1) \geqslant j > \alpha(k)$ mit

$$\left|\sup_{l\geqslant j} x_l - x_{\alpha(k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{2(k+2)} \ .$$

Wie oben folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\left|\overline{x} - x_{\alpha(k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{k+2} \ .$$

Damit ist $\left(x_{\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_k x_{\alpha(k)} = \overline{x} \ .$$

Nun zeigen wir, dass jeder Häufungspunkt $h \in H$ kleiner als $\overline{x}$ ist. Sei dazu β eine Teilfolge, so dass $h = \lim_k x_{\beta(k)}$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$x_{\beta(j)} \leqslant \sup_{l\geqslant\beta(k)} x_l \leqslant \sup_{l\geqslant k} x_l \quad \text{für alle} \quad j \geqslant k \ ,$$

also folgt

$$h = \lim_j x_{\beta(j)} \leqslant \sup_{l \geqslant k} x_l \ .$$

Da k beliebig war, gilt

$$h \leqslant \inf_k \sup_{l \geqslant k} x_l = \overline{x} \ .$$

Also ist

$$\overline{x} = \max H \ .$$

Nun ist mit dem obigen Argument

$$\liminf_k x_k = \sup_k \inf_{l \geqslant k} x_l = -\inf_k \left(-\inf_{l \geqslant k} x_l\right) = -\inf_k \sup_{l \geqslant k} (-x_l) =$$

$$= -\max(-H) = \min H \ .$$

(b) Sicherlich hat die Folge (x_k) nur einen Häufungspunkt, wenn sie konvergiert. Aber Aufgabe 4 von Blatt 7 zeigt, dass die Umkehrung für beschränkte Folgen auch richtig ist. Also folgt die Aussage aus (a) , denn offenbar gilt

$$\liminf_k x_k = \limsup_k x_k$$

genau dann, wenn

$$\min H = \max H \ ,$$

d.h., genau dann, wenn H genau ein Element besitzt.

Wenn (x_k) konvergiert, ist der Limes der einzige Häufungspunkt. Nach (a) ist

$$\limsup_k x_k = \max H \ ,$$

also ein Häufungspunkt, und es folgt

$$\lim_k x_k = \limsup_k x_k \ .$$

Aufgabe 2

(a) Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \ ,$$

aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist die harmonische Reihe, also divergent.

(b) Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert, aber nach Vorlesung konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ .$$

(c) Betrachte für $r=0$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^n\cdot z^n\ .$$

Nach der Hadamard-Formel hat sie den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\liminf_n \sqrt[n]{n^n}}=\limsup_n \frac{1}{n}=0\ .$$

Für $r>0$ betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\cdot z^n\ .$$

Sie hat den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\liminf_n \sqrt[n]{r^{-n}}}=\frac{1}{r^{-1}}=r\ .$$

Aufgabe 3

(a)

(i) Es gilt

$$\liminf_n \sqrt[n]{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{n^2}}=\liminf_n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n=0\ ,$$

denn $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge (Aufgabe 1, Blatt 6). Also konvergiert die Reihe absolut nach dem Wurzelkriterium.

Alternativ: Die Folge $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fallend (ebda.). Da $\sqrt{2}-1\leqslant\frac{1}{2}$, folgt

$$0\leqslant|a_n|=a_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad\text{für alle } n\geqslant 2\ .$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ absolut konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ absolut konvergiert.

(ii) Es gilt mit der binomischen Formel

$$a_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\ ;$$

d.h., die Reihe ist eine geometrische Reihe. Da $\frac{3}{4}<1$, konvergiert sie absolut.

(iii) Es gilt für $n\geqslant 1$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{7}\cdot\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!\,(n+1)!}\cdot\frac{(2n)!\cdot n!}{(3n)!}=\frac{1}{7}\cdot\frac{(3n+3)\,(3n+2)\,(3n+1)}{(2n+2)\,(2n+1)\,(n+1)}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{(n)} \frac{3\cdot 3\cdot 3}{7\cdot 2\cdot 2\cdot 1} = \frac{27}{28} \ .$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(iv) Es ist $(\sqrt[n]{n}-1)_{n\geqslant 1}$ eine fallende Nullfolge, also konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium.

Es liegt aber keine absolute Konvergenz vor, denn für $n \geqslant 2$ gilt

$$|a_n| = \sqrt[n]{n} - 1 \geqslant \sqrt[n]{2} - 1 \ ,$$

da die Funktion $\sqrt[n]{\cdot}$ wachsend ist. Weiter gilt nach Blatt 8, Aufgabe 1,

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \leqslant 3 \ ,$$

also

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2 \ .$$

Es folgt

$$|a_n| \geqslant \sqrt[n]{2} - 1 \geqslant \frac{1}{2n} \ .$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) Für $z \neq 0$ und $n \geqslant 1$ gilt

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} z^{n+1}}{\frac{n!}{n^n} z^n} \right| = |z| \cdot \frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = |z| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |z| \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{(n)} \frac{|z|}{e} \ .$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} |z|^n$ für $|z| < e$ konvergiert und für $|z| > e$ divergiert, also ist der Konvergenzradius der Potenzreihe aus der Aufgabenstellung gleich e .

Daraus schließt man mit der Hadamard-Formel

$$e = \frac{1}{\liminf_n \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}} = \limsup_n \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_n \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \ ,$$

da die Folge wachsend ist.

Aufgabe 4 Es gilt

$$k^{n-2} \cdot a_k \leqslant \frac{1}{k^2} \cdot \sup_{l\geqslant 1} l^n \cdot a_l \ ,$$

und da $\sup_l l^n \cdot a_l < \infty$, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

A. Alldridge und R. Jäger
Wintersemester 2001/02

Analysis I

Lösungsblatt 11

Aufgabe 1 Man beachte, dass $\frac{1}{x_k} \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ und $x_k \in [a, b]$ für alle k gilt und somit entsprechendes für die lim inf- und lim sup-Werte. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ gilt

$$\inf_{k \geqslant n} \frac{1}{x_k} \geqslant \gamma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{k \geqslant n} x_k \leqslant \frac{1}{\gamma} \ ,$$

sowie die gleiche Äquivalenz mit strikten Ungleichungen. Dies zeigt für alle $\gamma \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$

$$\liminf_k \frac{1}{x_k} \geqslant \gamma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma \leqslant \frac{1}{\limsup_k x_k} \ ,$$

sowie die gleiche Äquivalenz mit strikten Ungleichungen, d.h. (Kontraposition)

$$\liminf_k \frac{1}{x_k} \leqslant \gamma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma \geqslant \frac{1}{\limsup_k x_k} \ .$$

Aufgabe 2

(a) Nach Voraussetzung gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt{R}$, also mit $|z^2| = |z|^2 < R$, dass die Reihe über $\left(c_l \cdot z^{2l}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ absolut konvergiert. Umgekehrt zieht die Existenz eines reellen $z > \sqrt{R}$ mit konvergenter Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^{2l}$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \left(z^2\right)^l$ mit $z^2 > R$ nach sich. Letzteres steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Zusammen ist gezeigt, dass die Reihe über $\left(c_l \cdot z^{2l}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert, falls $|z| < \sqrt{R}$, und divergiert, falls $|z| > \sqrt{R}$.

(b) Für reelles $z < R_a \cdot R_b$ existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha < R_a$ und $\beta < R_b$, sowie $z = \alpha \cdot \beta$. Die Reihen über $\left(a_l \cdot \alpha^l\right)_{l \in \mathbb{N}}$ und über $\left(b_l \cdot \beta^l\right)_{l \in \mathbb{N}}$ sind nach Voraussetzung absolut konvergent, wie auch die Reihe über die Produkte $\left(a_l \cdot b_l \cdot \alpha^l \cdot \beta^l\right)_{l \in \mathbb{N}} = \left(a_l \cdot b_l \cdot z^l\right)_{l \in \mathbb{N}}$. Dies zeigt, $R \geqslant R_a \cdot R_b$.

Aufgabe 3 Durch Induktion zeigen wir zunächst, dass $\mathbb{N}^n$ abzählbar ist. In der Tat ist der Induktionsanfang für $n = 0, 1, 2$ klar erfüllt. Sei also $n \geqslant 2$ und $\Psi_{n-1} : \mathbb{N}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist

$$\Psi_n : \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-1} \overset{(\mathrm{id}, \Psi_{n-1})}{\longrightarrow} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ ,$$

definiert durch

$$\Psi_n(k, l) := \frac{1}{2}\left[n + \Psi_{n-1}(l)\right]\left[n + \Psi_{n-1}(l) + 1\right] + \Psi_{n-1}(l) \ ,$$

nach Satz 6.11 auch eine Bijektion.

(a) Seien $\mathcal{F}$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\mathcal{F}_n := \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A = n\}$, für $n \in \mathbb{N}$, die Menge der n-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann ist

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{0 \leqslant j \leqslant n} \mathcal{F}_j \ .$$

Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \bigcup_{j \leqslant n} \mathcal{F}_j : (a_0, \ldots, a_n) \longmapsto \{a_0, \ldots, a_n\} \smallsetminus \{a_n\}$$

ist surjektiv. In der Tat ist $\Phi(a, \ldots, a) = \emptyset$ für ein $a \in \mathbb{N}$ und

$$\Phi(a_0, \ldots, a_{j-1}, a_{j-1}, \ldots) = A$$

falls $A = \{a_0, \ldots, a_{j-1}\} \subset \mathbb{N}$ mit $0 < j \leqslant n$.

Nach der Vorbemerkung ist $\mathbb{N}^{n+1}$ abzählbar, sagen wir durch die obige Bijektion $\Psi_{n+1}^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{n+1}$. Wegen der Surjektivität von $\Phi \circ \Psi_{n+1}^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{j \leqslant n} \mathcal{F}_j$, folgt mit Lemma 6.12, daß $\bigcup_{j \leqslant n} \mathcal{F}_j$ abzählbar ist. Da eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist (Satz 6.12), ist $\mathcal{F}$ abzählbar.

(b) Nach Aufgabe 2.3 gibt es keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Nach Lemma 6.12 ist somit $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar.

Aufgabe 4 (a) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut konvergent, wie auch ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} 1\right) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot z^k \ .$$

Für den Grenzwert gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, also die erste Formel.

Nochmaliges Produkt mit $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $|z| < 1$, liefert die zweite Formel:

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} 1 \cdot (l+1)\right) \cdot z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{k+1} l\right) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)}{2} \cdot z^k \ .$$

(b) Es gilt nach dem Teil (i)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \ ,$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\,(k+2)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} - 2 = 6\ .$$

Analysis I

Lösungsblatt 12

Aufgabe 1

(a) Es gilt aufgrund der Konvergenz beiden Reihen mit Lemma 6.15 (oder durch absolute Konvergenz mit Umordnungssatz)

$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z \ .$$

Es gilt

$$\sin^2 z + \cos^2 z = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) =$$

$$(\cos z + i \sin z)(\cos(-z) + i \sin(-z)) = \exp(iz)\exp(-iz) = \exp(0) = 1 \ .$$

Weiter

$$(\cos z + i \sin z)^n = \exp(iz)^n = \exp(inz) = \cos nz + i \sin nz \ .$$

Schließlich

$$\frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) = \frac{1}{2}(\cos z + i \sin z + \cos(-z) + i \sin(-z)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos z + i \sin z + \cos(z) - i \sin(z)) = \cos z$$

und analog

$$\frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) = \frac{1}{2i}(\cos z + i \sin z - \cos(-z) - i \sin(-z)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos z + i \sin z - \cos(z) + i \sin(z)) = \sin z \ .$$

(b) Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist surjektiv: Denn sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es gibt $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit $z = |z| \cdot \exp(i\varphi)$. Da $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ bijektiv ist, gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|z| = x$; damit gilt

$$z = \exp(x)\exp(i\varphi) = \exp(x + i\varphi) \ .$$

Für jedes $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist daher die Gleichung $\exp(iz) = \zeta$ lösbar. Deshalb gibt es für $w \in \mathbb{C}$ genau dann eine Lösung z von

$$\cos z = w \ , \tag{$*$}$$

wenn es eine Lösung $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ der Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = w \tag{$**$}$$

gibt. Die Gleichung $(**)$ ist nach Multiplikation mit 2ζ äquivalent zu

$$\zeta^2 - 2w\zeta + 1 = 0 \ ,$$

welche die Lösungen $w + \eta \in \mathbb{C}$ besitzt, wobei $\eta^2 = w^2 - 1$. Also ist die Gleichung $(*)$ lösbar und cos surjektiv.

Analog ist auch die Gleichung

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) = w$$

in $\mathbb{C}$ lösbar und somit sin surjektiv.

(c) Die Gleichungen aus (a) gelten durch Einschränkung auch für die reellen trigonometrischen Funktionen. Die zwei letzten vereinfachen sich zu

$$\sin x = \operatorname{Im} \exp(ix) \quad \text{und} \quad \cos x = \operatorname{Re} \exp(ix) \ .$$

Es gilt aber für $x \in \mathbb{R}$

$$\max\left(|\sin x|^2, |\cos x|^2\right) = \max\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

und damit

$$\sin(\mathbb{R}) \cup \cos(\mathbb{R}) \subset [-1, 1] \ .$$

Insbesondere sind sin , cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ also nicht surjektiv.

Aufgabe 2 Es gibt $f(x) > r > 0$. Setze $\varepsilon := f(x) - r > 0$. Da f in x stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(y) - f(x)| \leqslant r \quad \text{für alle} \quad y \in B(x, \delta, d) \ .$$

Insbesondere gilt für alle $y \in B(x, \delta, d)$

$$f(y) \geqslant f(x) - r = \varepsilon \ .$$

Aufgabe 3

(a)

(i) Es gilt

$$a + b \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot \left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-k} \left(\sqrt[p]{b}\right)^k = \left(\sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{b}\right)^p \ .$$

Da g wachsend ist, folgt die erste Ungleichung. Beide Seiten der zweiten Ungleichung sind unter Vertauschung von x und y invariant, also sei Œ $x \geqslant y$. Dann gilt mit der ersten Ungleichung

$$0 \leqslant \sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y} \leqslant \sqrt[p]{x-y}$$

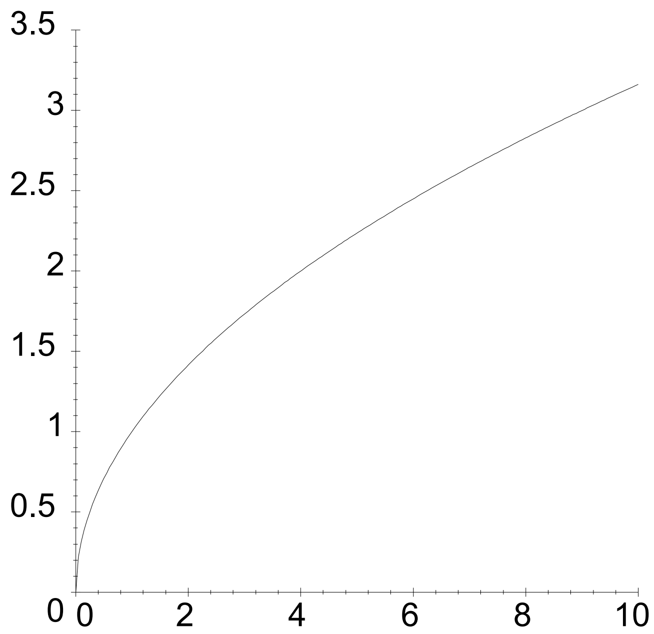
und damit ist die Behauptung bewiesen.
(ii) Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ die Ungleichung

$$|g(x) - g(y)| = \left|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}\right| \leqslant \sqrt[p]{|x-y|} \ .$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $|x-y| \leqslant \varepsilon^p$,dass

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$$

ist, d.h., g ist stetig auf $\mathbb{R}_+$.



$x \longmapsto \sqrt{x}$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

1.Fall : $x \notin \mathbb{Z}$: In diesem Fall ist $x \in \left]\lfloor x \rfloor , \lfloor x \rfloor + 1\right[$ und für alle $y \in \left[\lfloor x \rfloor , \lfloor x \rfloor + 1\right[$ gilt

$$\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor \ ,$$

also

$$f(y) = \lfloor y \rfloor + \sqrt{y - \lfloor y \rfloor} = \lfloor x \rfloor + \sqrt{y - \lfloor x \rfloor} \ .$$

Ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(y_k)_{k \geqslant N} \subset B\left(x, \frac{1}{2} \cdot \min\left(x - \lfloor x \rfloor , \lfloor x \rfloor + 1 - x\right)\right) \subset \left]\lfloor x \rfloor , \lfloor x \rfloor + 1\right[$$

und es folgt

$$\lim_k f(y_k) = \lim_{k\geqslant N} f(y_k) = \lim_{k\geqslant N}\left(\lfloor x\rfloor + \sqrt{y_k - \lfloor x\rfloor}\right) =$$

$$= \lfloor x\rfloor + \sqrt{\lim_{k\geqslant N} y_k - \lfloor x\rfloor} = \lfloor x\rfloor + \sqrt{x - \lfloor x\rfloor} = f(x) \ .$$

wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion in $x - \lfloor x\rfloor$. Damit ist f in x stetig.
2.Fall : $x \in \mathbb{Z}$: In diesem Fall ist $x = \lfloor x\rfloor$ und $f(x) = x$. Wir zeigen, dass in x links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen und gleich $f(x)$ sind.
Ist $y \in [x-1, x[$,so ist $\lfloor y\rfloor = x - 1$,also

$$f(y) = \lfloor y\rfloor + \sqrt{y - \lfloor y\rfloor} = x - 1 + \sqrt{y - x + 1} = f(x) + \sqrt{y - x + 1} - 1$$

Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion in 1 folgt nun

$$\lim_{y\to x-} f(y) = \lim_{x-1\leqslant y\to x-} f(y) = \lim_{x-1\leqslant y\to x-}\left(f(x) + \sqrt{y - x + 1} - 1\right) = f(x) \ ,$$

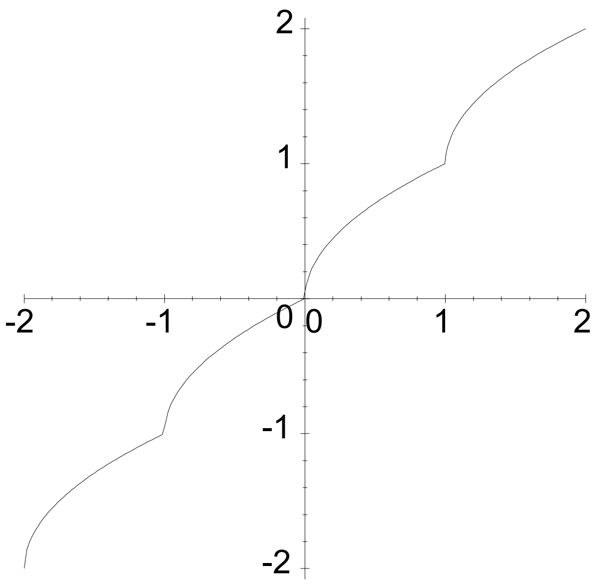
also ist f linksstetig in x.
Ist nun $y \in]x, x+1[$,so ist $\lfloor y\rfloor = x$ .Es folgt

$$f(y) = x + \sqrt{y - x} = f(x) + \sqrt{y - x} \ .$$

Erneut folgt aus der Stetigkeit der Wurzel in 0 , daß

$$\lim_{y\to x-} f(y) = \lim_{x-1\leqslant y\to x-} f(y) = \lim_{x-1\leqslant y\to x-}\left(f(x) + \sqrt{y - x}\right) = f(x) \ ,$$

also ist f auch rechtsstetig in x . Da Links- und Rechtsseitige Grenzwerte übereinstimmen, ist f stetig in x nach Satz 7.8.



$$x \longmapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x - \lfloor x\rfloor}$$

Aufgabe 4 Es gilt

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}\cdot(x+y+|x-y|) \ ,$$

also

$$\max = \frac{1}{2}\cdot[+\circ(+,|\cdot|\circ -)]$$

oder

$$\max = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+|\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2|)$$

und da die Funktionen

$$\pm : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \quad , \quad |\cdot| : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \quad , \quad \mathrm{pr}_j : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

stetig sind (vgl. Hauptsatz 7.2 und Beispiel 7.2.3), folgt mit Hilfe des Hauptsatzes 7.3 oder des Korollars 7.3, dass

$$\max : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

stetig ist.

Die Behauptung für min folgt analog aus

$$\min(x,y) = \frac{1}{2}\cdot(x+y-|x-y|) \ ,$$

oder aus $\min(x,y) = -\max(-x,-y)$, also

$$\min = -\max\circ(-\mathrm{pr}_1,-\mathrm{pr}_2) \ .$$

Man kann auch obige Formeln und die Grenzwertsätze 5.5 benutzen.

Analysis I

Lösungsblatt 13

Aufgabe 1 Wir müssen zeigen, dass die stetige Funktion $\sin - \cos(2\diamond)$ auf $[0, \pi]$ genau zwei Nullstellen besitzt. Da

$$\sin 0 - \cos 0 = -1 = \sin \pi - \cos 2\pi \ ,$$

aber

$$\sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi = 2 \ ,$$

müssen nach dem Hauptsatz von Bolzano 7.4 mindestens zwei Nullstellen vorliegen (in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ jeweils eine).

Wir wissen, dass cos auf $[0, 2]$ streng monoton fällt und (wegen Symmetrie) auf $[-2, 0]$ streng monoton wächst. Wegen $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ folgt aus letzterem, dass cos auch auf $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ streng monoton fällt. Insgesamt ist also $-\cos(2\diamond)$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend.

Durch Symmetrie ist cos auf $[-\pi, 0]$ streng monoton wachsend. Es folgt (wegen $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$), dass sin auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ebenfalls streng monoton wächst. Zusammen ist $\sin - \cos(2\diamond)$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend, also kann die Gleichung

$$\sin x - \cos(2x) = 0$$

auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ höchstens eine Lösung haben. Ähnlich argumentiert man auf $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Aufgabe 2

(a) Die Funktion $\mathrm{id} + 1$ ist auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend mit Werten größer als 1 , so dass $f = (\mathrm{id} + 1)^{-1}$ auf $\mathbb{R}_+$ wohldefiniert und streng monoton fallend ist. Demnach ist $f(0) = 1$ das Maximum des Bildes von f und man zeigt schnell, dass $0 = \lim_{x \to \infty} f(x)$ (vgl. weiter unten) das Infimum des Bildes von f ist. Die Grenzwertsätze zeigen für jede in $\mathbb{R}_+$ gegen x konvergente Folge $(x_k)_k$ die Bilder $(f(x_k))_k$ gegen $f(x)$ konvergieren; f ist also stetig. Ist $0 < y < 1$, so gilt $f(x) < y$ für alle $x > \frac{1}{y} - 1$. Insbesondere gilt für jedes $0 < y < 1$

$$f(0) = 1 > y > f\left(\frac{1}{y}\right) \ .$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in \left]0, \frac{1}{y}\right[$ mit $f(\xi) = y$. Das Bild ist somit

$$f(\mathbb{R}_+) = \left]0, 1\right] \ .$$

(b) Es gilt

$$g = \frac{\mathrm{id} + 1 - 1}{\mathrm{id} + 1} = 1 - \frac{1}{\mathrm{id} + 1} = 1 - f \ .$$

Damit kann man alle Aussagen über f sofort auf g übertragen; g ist stetig, streng monoton wachsend mit $g(0) = 0$ und $1 = \lim_{x \to \infty} g(x)$ sowie

$$g(\mathbb{R}_+) = \left[0, 1\right[\ .$$

Aufgabe 3

(a) Es ist $\sqrt{x} \leqslant x$ für $x \geqslant 1$, also

$$0 \leqslant \exp(-x)\sqrt{x} \leqslant \exp(-x) \cdot x$$

und da $|\cos(x^2)| \leqslant 1$, folgt nach Beispiel 7.9.3.

$$\lim_{x\to\infty} \exp(-x)\sqrt{x}\cos\left(x^2\right) = 0 \ .$$

(b) Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt für $x > 0$

$$\exp\left(\sqrt{x}\right) - 1 - \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^n}{n!} - 1 - \sqrt{x} = \frac{x}{2!} + r_3\left(\sqrt{x}\right) \ ,$$

wobei $r_3(\cdot)$ das Restglied aus Satz 6.16 ist. Es folgt

$$\frac{\exp(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2} + \frac{r_3(\sqrt{x})}{x} \quad \text{für } x > 0 \ ,$$

und nach Satz 6.16 gilt

$$\left|\frac{r_3(\sqrt{x})}{x}\right| \leqslant \frac{2}{3!} \cdot \frac{|\sqrt{x}|^3}{|x|} = \frac{1}{3}|x|^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \text{für } 0 \neq x \to 0 \ ,$$

also ist

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\exp(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2} \ .$$

(c) Nach Abschnitt 7.6 ist

$$\lim_{\pi\neq x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{\pi\neq x\to\pi} \frac{-\sin(x-\pi)}{\pi - x} = \lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

zu bestimmen. Lemma 7.5 besagt, dass dieser Limes mit Wert 1 existiert.

(d) Aus Stetigkeitsgründen gilt

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2-1} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 1} \sin\frac{\pi}{2\sqrt{x}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \ ,$$

$$\lim_{x\to 1} x^x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \ .$$

Damit ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1} - 2\sin\frac{\pi}{2\sqrt{x}} + 86x^x}{\frac{2}{x} + \ln x} = \frac{0 - 2 + 86}{2} = 42 \ .$$

Aufgabe 4 Zunächst sieht man sofort ein, dass f (als Komposition stetiger Funktionen) stetig ist mit $f(0) = 0$. Da für $x \geqslant 0$

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 5} \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2 \geqslant 0$$

gilt, ist f auf $\left[\sqrt{2},\infty\right[$ positiv und auf $\left[0,\sqrt{2}\right]$ negativ. Aufgrund der Stetigkeit nimmt nach Weierstraß f ihr Minimum (und Maximum) auf $\left[0,\sqrt{2}\right]$ an, welches wegen $f(1) = -\frac{1}{6} < 0$ sogar das globale Minimum ist.

Aufgabe 5

Wir beweisen zunächst

LEMMA *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f strikt monoton.*

Beweis: Da f injektiv ist, können wir o.B.d.A. $f(a) < f(b)$ annehmen; es folgt sogar $f(a) < f(\xi)$ für alle ξ im Intervall $]a,b]$. Wäre nämlich $f(a) \geqslant f(\xi)$ - wegen Injektivität also $f(a) > f(\xi)$ - für ein $\xi \in]a,b[$, so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz (Korollar 7.4) ein $\eta \in]\xi,b[$ mit $f(\eta) = f(a)$, was der Injektivität von f widerspräche.

Nehmen wir nun an, dass es zwei Stellen $x,y \in]a,b]$ gibt mit

$$x < y \quad \text{und} \quad f(y) \leqslant f(x) \quad \text{bzw. (Injektivität)} \quad f(y) < f(x) \ .$$

Es folgt $f(a) < f(y) < f(x)$. Wenden wir erneut den Zwischenwertsatz an, so erhalten wir ein $z \in]a,x[$ (insbesondere $z \neq y$) mit $f(z) = f(y)$, doch auch das widerspricht der Injektivität von f . Insgesamt folgt, dass f strikt wachsend ist. Analog zeigt man, dass f strikt fällt, falls $f(a) > f(b)$ ist.

(a) Wir geben zwei Beweise der Behauptung. Der erste Beweis folgt mit obigem Lemma sofort aus Hauptsatz 7.11 . Der zweite Beweis greift nicht auf Hauptsatz 7.11 zurück, sondern benutzt den Satz von Bolzano-Weierstraß (Hauptsatz 5.11): Angenommen $\overset{-1}{f}$ ist nicht stetig. Dann gibt es eine Folge

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f([a,b]) \ ,$$

welche gegen ein $y \in [\min f([a,b]), \max f([a,b])]$ konvergiert, so dass

$$\left(\overset{-1}{f}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$$

nicht gegen $\overset{-1}{f}(y)$ konvergiert. Setzt man

$$x_n := \overset{-1}{f}(y_n) \quad \text{und} \quad x := \overset{-1}{f}(y) \ ,$$

so besagt letzteres

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad |x_n - x| \geqslant \varepsilon \ .$$

Somit gibt es also eine Teilfolge $\left(x_{\alpha(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\left|x_{\alpha(n)} - x\right| \geqslant \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $\left(x_{\alpha(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ wiederum eine konvergente Teilfolge $\left(x_{\beta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x' \neq x$. Aus der Stetigkeit von f folgt nun $\lim_{n\to\infty} f\left(x_{\beta(n)}\right) = f(x')$. Es ist

$$\left(f\left(x_{\beta(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(y_{\beta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche gegen y konvergiert, so dass man weiter schreiben kann:

$$f(x') = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{\beta(n)}\right) = y = f(x) \ .$$

Da f injektiv ist, folgt $x = x'$, Widerspruch !

(b) Die Stetigkeit von g ist klar, da g auf $[-2,-1[$ und $[1,2]$ jeweils ein Polynom ist. Es ist auch trivial, dass $g|_{[-2,-1[}$ und $g|_{[1,2]}$ injektiv sind. Für $x \in [-2,-1[$ und $y \in [1,2]$ ist

$$g(x) = x+1 < 0 \leqslant y-1 = g(y) \ ,$$

also ist g auf ganz X injektiv. Weiter gilt $g(X) = [-1,1]$ und

$$\overset{-1}{g} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \begin{cases} y-1 & \\ & \text{falls} \\ y+1 & \end{cases} \begin{matrix} y \in [-1,0[\\ \\ y \in [0,1] \end{matrix} \ .$$

$\overset{-1}{g}$ ist unstetig im Nullpunkt, da

$$\lim_{y\to 0-} \overset{-1}{g}(y) = -1 \neq 1 = \lim_{y\to 0+} \overset{-1}{g}(y) \ .$$

Analysis I

Lösungsblatt 14

Aufgabe 1 (a) Es gilt für $x \neq 0$

$$\lim_{y\to 0} f_x(y) = \frac{x \cdot \lim_{y\to 0} y}{x^2 + \lim_{y\to 0} y^2} = \frac{0}{x^2} = 0 \ ,$$

also ist dann f_x stetig. Für $x = 0$ gilt

$$f_x = 0 \ .$$

Diese Funktion ist auch stetig. Da $f_x(y) = f_y(x)$, folgt die Aussage für f_y .

(b) Es gilt

$$\lim_k f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \ ,$$

also folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 Da sin beschränkt ist, gilt

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \ .$$

Nun ist $0 < \frac{2}{\pi} < 1$ und

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} > 0 \ .$$

Also gibt es ein $\frac{2}{\pi} > \varepsilon > 0$, so dass

$$0 < \left| x \sin\frac{1}{x} \right| < \frac{2}{\pi} \quad \text{für alle} \quad 0 < x < \varepsilon \ .$$

Die stetige Funktion $f|[\varepsilon, 1]$ nimmt ihr Maximum an, das $\geqslant \frac{2}{\pi}$ sein muss. Folglich ist dies das Maximum der Funktion f .

Aufgabe 3 Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{x\to -\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \ .$$

Daher gibt es ein $R > 0$, so dass

$$p(x) > a_0 \quad \text{für alle} \quad |x| > R \ .$$

Die stetige Funktion $p|[-R, R]$ nimmt ihr Minimum in $x_0 \in [-R, R]$ an, dass $\leqslant a_0 = p(0)$ sein muss. Folglich ist dies das Minimum von p . Damit ist

$$p(\mathbb{R}) \subset [\min p(\mathbb{R}), \infty[\ .$$

Sei nun $p(x_0) = \min p(\mathbb{R}) \leqslant y < \infty$. Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $p(x) > y$. Nach Bolzano gibt es ein $x' \in \mathbb{R}$ mit $p(x') = y$. Also ist die Gleichung bewiesen.

Aufgabe 4 (a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} x \ln^2 x = \lim_{y\to\infty} \exp(-y) \cdot y^2 = 0 \ .$$

(b) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\ln 2}{\ln x} + 1} = 1 \ .$$

Aufgabe 5 (a) Es gilt für ein $0 \leqslant j \leqslant 2$

$$z = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{j}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} j + i \sin\frac{2\pi}{3} j =$$

$$= \begin{cases} 1 & j = 0 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & j = 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & j = 2 \end{cases} ,$$

denn

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \sin 2\frac{\pi}{6} = 2\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} \ ,$$

also

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

Damit ist

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \ .$$

Da $\cos\frac{\pi}{6} > 0$ ist, folgt

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} \ .$$

(b) Es gilt

$$|i - 1|^2 = 2 \ ,$$

also mit $w = i - 1$

$$\arg w = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \ .$$

denn

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{4} \ ,$$

also, da $\sin\frac{\pi}{4} > 0$,

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \ .$$

Damit ist für $0 \leqslant j \leqslant 2$

$$z = \sqrt[6]{2}\cdot e^{\frac{i}{3}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi j\right)} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\pi\left(\frac{1}{12}+\frac{2j}{3}\right) + i\sin\pi\left(\frac{1}{12}+\frac{2j}{3}\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right] & j=0 \\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left[\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right] & j=1 \\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(-1+i) & j=2 \end{cases} ,$$

denn

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = 1-2\sin^2\frac{\pi}{12} \ ,$$

also

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \ .$$

Weiter

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} \ .$$

Schließlich

$$\cos\frac{5\pi}{12} = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

und

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \ .$$

(c) Es gilt

$$\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1 \ ,$$

also mit $w = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, dass $\arg w = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Damit ist

$$z = \pm e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2} \ .$$

(d) Mit $b = 2i$ und $c = -1$ gilt

$$b^2 - 4c = 0 \ ,$$

also ist die Lösung

$$z = -i \ .$$

Man sieht dies auch, da trivialerweise

$$z^2 + 2iz - 1 = (z+i)^2 \ .$$