Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Vorlesung

ANALYSIS I

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

Ralf Jäger und Alexander Alldridge

Marburg, Wintersemester 2001/02

Fassung vom 21. April 2002

Analysis I

Blatt 1

Abgabe : Dienstag, 23.10.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Beweisprinzip der Fallunterscheidung (7)

(a) Seien A, B, C Relationen. Zeigen Sie:
Sind $A \vee B$, $A \Rightarrow C$ und $B \Rightarrow C$ Theoreme, so ist C ein Theorem.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$|x| := \begin{cases} x & \\ & \text{falls} \\ -x & \end{cases} \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ \\ x < 0 \end{matrix} \quad .$$

Beweisen Sie mit Hilfe der bekannten Rechenregeln in $\mathbb{R}$ die Aussagen

(i)
$$x^2 = |x|^2 \ .$$

(ii)
$$x^2 = x \quad \Longrightarrow \quad (x = 0 \vee x = 1) \ .$$

Aufgabe 2 Seien A, B Relationen. Zeigen Sie, dass $A \wedge B$ ein Theorem ist, falls A und B Theoreme sind, indem Sie einen Widerspruchsbeweis führen. (3)

Aufgabe 3 Zeigen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, d.h. es gibt keine Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 3$. (4)

Aufgabe 4 [1] Geben Sie für die Aufgabe 2 einen direkten Beweis an. (m)

[1] Aufgaben, die mit einem (m) versehen sind, sind *mündlich* für das auf die Zettelabgabe folgende Tutorium vorzubereiten.

Analysis I

Blatt 2

Abgabe : Dienstag, 30.10.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen: (4)

(a) Falls $\{x, y\} = \{x, z\}$, so folgt $y = z$.

(b) Falls $(x, y) = (u, v)$, so folgt $x = u$ und $y = v$.

Aufgabe 2 Für Mengen X, Y bezeichne Y^X die Menge aller Abbildungen von X nach Y . (m)

Seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : Z^{X \times Y} \longrightarrow \left(Z^Y\right)^X , \ f \longmapsto \Phi(f) \ ,$$

wobei

$$[\Phi(f)(x)](y) := f(x, y) \quad \text{ist} \ ,$$

bijektiv ist. Welche Abbildung wird durch $\Phi(f)(x)$ beschrieben?

Aufgabe 3 Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung (4)

$$f : X \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$$

gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die $x \in X$ mit $x \notin f(x)$.

Aufgabe 4 Seien J, X, Y Mengen, $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $(A_j)_{j \in J}$, $(B_j)_{j \in J}$ Familien von Teilmengen von X bzw. Y . Dann sind $(f(A_j))_{j \in J}$ und $\left(\overset{-1}{f}(B_j)\right)_{j \in J}$ Familien von Teilmengen von Y bzw. X . (5)

Beweisen Sie die folgenden Formeln:

(a)
$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} \overset{-1}{f}(B_j)$$

(b)
$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} \overset{-1}{f}(B_j)$$

(c)
$$f\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J} f\left(A_j\right)$$

(d)
$$f\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j\in J} f\left(A_j\right) \ .$$

Untersuchen Sie, ob in der letzten Formel sogar immer Gleichheit gilt!

Analysis I

Blatt 3

Abgabe : Dienstag, 06.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4)

(a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und X_m, X_n Mengen mit m bzw. n Elementen. Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an die Zahlen m, n, so daß es eine Abbildung

$$f : X_m \longrightarrow X_n$$

gibt mit der Eigenschaft

(i) f ist injektiv.
(ii) f ist surjektiv.
(iii) f ist bijektiv.

(b) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$? (m)

Aufgabe 2 Sei X eine Menge. Für $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ definieren wir (3)

$$A \leqslant B :\Leftrightarrow B \subset A.$$

Zeigen Sie:

(a) $\leqslant$ definiert eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{P}(X)$. Ist diese Ordnung total?

(b) Zu je zwei Elementen $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ gibt es ein $C \in \mathfrak{P}(X)$ mit

$$A \leqslant C \quad \text{und} \quad B \leqslant C \ .$$

(c) Die geordnete Menge $(\mathfrak{P}(X), \leqslant)$ besitzt ein *größtes Element* , d.h. ein Element M , so daß für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$ gilt:

$$A \leqslant M \ .$$

Geben Sie M explizit an.

Aufgabe 3 Es seien A , B und C drei endliche Mengen. Zeigen Sie: (3)

(a) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$,

(b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$,
und diese Vereinigungen sind disjunkt.

(c) Folgern Sie:

$$\#(A) = \#(A \setminus B) + \#(A \cap B) \quad , \quad \#(A \cup B) = \#(A \setminus B) + \#(B) \ ,$$

sowie

$$\#(A \cup B) + \#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) \ .$$

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Gültigkeit: (4)

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \ .$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

Aufgabe 5 Seien X, Y Mengen, $a, b \in X$, $u, v \in Y$. Es gelte $a \neq b$ und $u \neq v$. Zeigen Sie, daß die Abbildungen (*m*)

$$\mathrm{pr}_a : Y^X \longrightarrow Y : f \longmapsto f(a)$$

und

$$\mathrm{pr}_b : Y^X \longrightarrow Y : f \longmapsto f(b)$$

verschieden sind.

Analysis I

Blatt 4

Abgabe : Dienstag, 13.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Definiere auf $\mathbb{R}^2$ die Verknüpfung $\circ$ durch (3)

$$(a,b) \circ (a',b') := \left(aa' + bb', \frac{1}{2}(ab' + a'b)\right) \quad \text{für alle} \quad (a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \circ)$ kommutativ, aber nicht assoziativ ist.

Aufgabe 2 (5)

(a) Die Menge M besitze folgende Eigenschaft:

$$3 \in M \quad \text{und} \quad m \in M \Rightarrow 2m \pm 1 \in M .$$

Zeigen Sie, dass M alle ungeraden Zahlen $\geqslant 3$ enthält.

(b) Die Menge $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < n!\}$ ist unendlich.

Aufgabe 3 Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$. (5)

(a) Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j-1}{j} = \binom{n+k}{n} .$$

(b) Bezeichne $M_{n,k}$ die Menge der Darstellungen der Zahl n als Summe von k natürlichen Zahlen , wobei verschiedene Reihenfolgen der Summanden unterschieden werden. Z.B. gilt: $2 = 2+0 = 0+2 = 1+1$, d.h. $\#M_{2,2} = 3$. Geben Sie eine formale mathematische Definition der Menge $M_{n,k}$ an!

(c) Zeigen Sie, dass

$$\#M_{n.k} = \binom{n+k-1}{n} .$$

Aufgabe 4 K sei ein total geordneter kommutativer Körper und $x, y \in K$. Zeigen Sie: (3)

(a) Es gilt $xy \geqslant 0$ genau dann, wenn x und y entweder beide $\geqslant 0$ oder beide $\leqslant 0$ sind.

(b) Gilt $x > 0$, dann ist $xy > 0$ genau dann, wenn $y > 0$ ist.

Aufgabe 5 Wie in der letzten Aufgabe sei K total geordneter kommutativer Körper und seien $x, y \in K$. Zeigen Sie: (m)

(a) Falls $x < y$ ist, so gibt es ein $z \in K$ mit $x < z < y$.

(b) K hat unendlich viele Elemente.

Analysis I

Blatt 5

Abgabe : Dienstag, 20.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Seien K ein total geordneter kommutativer Körper und $x, y, b \in K$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen: (4)

(a) Für $b > 0$ gilt $2xy \leqslant \frac{1}{b}x^2 + by^2$.

(b) Falls $1 < x < y$, so ist $x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}$.

Aufgabe 2 Finden Sie möglichst einfache Beschreibungen der folgenden Mengen, z.B. als Intervalle bzw. Vereinigung von Intervallen. Geben Sie im Fall endlicher Mengen ihre Elemente explizit an. (5)

(a)

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \geqslant 0 \right\} \quad , \quad B := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \leqslant 0 \right\} \; ,$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest vorgegeben seien.

(b)

$$C := \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + axy + by^2 \geqslant 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \right\} \; .$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Gleichungen (m)

(a) $\max(a,b) + \min(a,b) = a + b$;

(b) $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$;

(c) $\min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.
In welchem allgemeineren Rahmen könnten sich solche Formeln zeigen lassen?

Aufgabe 4 Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ nichtleere und beschränkte Teilmengen. Zeigen Sie: (6)

(a)

$$\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$$

und

$$\inf(X \cup Y) = \min(\inf X, \inf Y) \; .$$

(b) Gilt $X \cap Y \neq \emptyset$, dann ist

$$\sup(X \cap Y) \leqslant \min(\sup X, \sup Y)$$

und

$$\max(\inf X, \inf Y) \leqslant \inf(X \cap Y) \ .$$

Kann hierbei "strikt kleiner" gelten?

Analysis I

Blatt 6

Abgabe : Dienstag, 27.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Bestimmen Sie für die Mengen (2 + 4)

(a)

$$\left\{ \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(b)

$$X := \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Supremum und Infimum. Entscheiden Sie, ob es sich dabei um ein Maximum bzw. ein Minimum handelt.

Hinweis: Es ist bei der Menge X aus (b) nützlich, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ so zu erweitern, dass man die Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

anwenden kann.

Aufgabe 2 Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$: (4)

$$\frac{2-5i}{4+3i} \quad \text{und} \quad \left(\frac{4 \cdot i^{11} - i}{1+2i}\right)^2 .$$

Hinweis: Beachten Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R} .$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für die folgenden Teilmengen $Z_j \subset \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, die Zahlen (6)

$$\sup\nolimits_{z \in Z_j} |z| \quad \text{und} \quad \inf\nolimits_{z \in Z_j} |z|$$

und untersuchen Sie, ob es sich dabei um Maxima bzw. Minima handelt. Versuchen Sie, die Mengen Z_j zu skizzieren!

(a)

$$Z_1 := \left\{ \frac{1}{z} \;\middle|\; |z| \geqslant 1 \right\} .$$

(b)

$$Z_2 := \left\{ \frac{z-i}{z+i} \,\middle|\, \operatorname{Im} z > 0 \right\} .$$

Aufgabe 4 Es seien d_1, d_2, d_∞ die in der Vorlesung definierten Metriken auf $\mathbb{R}^2$ und $r > 0$. Skizzieren Sie die Kugeln $B(0, r, d_k)$ für $k = 1, 2, \infty$. Zeigen Sie, dass (m)

$$B(0, r, d_1) \subset B(0, r, d_2) \subset B(0, r, d_\infty) \subset B(0, 2r, d_1) .$$

Bestimmen Sie, wie groß das maximale $\rho \geqslant 0$ ist, so dass die Inklusion

$$B(0, \rho, d_2) \subset B(0, r, d_1) \quad \text{gilt.}$$

Analysis I

Blatt 7

Abgabe : Dienstag, 4.12.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie: (4)

(a) Für alle $x,y,z \in X$ ist

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y) \ .$$

(b) Für alle $x,y,z,w \in X$ gilt die '*Vierecksungleichung*'

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leqslant d(x,z) + d(y,w) \ .$$

(c) Falls $(x_n), (y_n)$ in (X,d) konvergente Folgen mit Grenzwerten x,y sind, so konvergiert $(d(x_n,y_n))$ in $\mathbb{R}_+$ gegen $d(x,y)$, d.h.

$$\lim_n d(x_n,y_n) = d(x,y) \ .$$

(d) Durch (m)

$$\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \longmapsto \delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

wird eine weitere Metrik auf X erklärt. Was fällt an dieser Metrik auf ?

Hinweis: Überlegen Sie, wie $B(0,1,\delta)$ in $\mathbb{R}^2$ aussieht, wenn $(X,d) = (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist!

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (4)

$$x_0 := 2 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + 2$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden komplexen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz bzgl. der Metrik (8)

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (z,w) \longmapsto d(z,w) := |z-w|$$

und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(a)

$$a_n := \frac{7 \cdot n^3 + 2i \cdot n^2 + n}{3 \cdot n^3 + 4i} \ .$$

(b)

$$a_n := \sqrt{n} - i^n \sqrt{n+1} \ .$$

(c)

$$a_n := \frac{2^n + i \cdot |n^2 - 42|}{n!} + (-1)^{n!} \cdot \frac{7}{\sqrt[8]{n^4+1}} \ .$$

(d)

$$a_n := \begin{cases} 13 \cdot n^2 + i \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} & n \leqslant 10^{671} \\ & \text{falls} \\ (\sqrt[n]{n}) & n > 10^{671} \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4.

Aufgabe 4 Beweisen Sie für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$ die Gleichung *(m)*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

und folgern Sie die Formel

$$\binom{n}{k} = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{l}{l-k} = \prod_{l=1}^{n-k} \frac{l+k}{l} = \prod_{l=1}^{k} \frac{n+l-k}{l}$$

sowie die Abschätzung

$$(1+a)^n \geqslant \frac{1}{2} n\,(n-1)\,a^2$$

für $a \geqslant 0$.

Analysis I

Blatt 8

Abgabe : Dienstag, 11.12.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant k \leqslant n$ gilt (m)

$$\frac{1}{n^k} \cdot \binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 7.

(b) Zeigen Sie für $n \geqslant 1$ (4)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3 \ .$$

(c) Beweisen Sie, dass die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \geqslant 1}$ streng monoton wachsend ist, also konvergiert, und dass für den Grenzwert gilt

$$\frac{64}{27} < \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3 \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die unten definierten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert. (6)

(a)

$$a_n := \frac{n+2}{\sqrt{n+1}}$$

(b)

$$a_n := \prod_{k=0}^{n} \left(1 + q^{2^k}\right) \qquad \text{wobei} \quad q \in \mathbb{C} \ .$$

Hinweis: Betrachten Sie für $q \neq 1$ den Ausdruck $(1-q)\, a_n$.

Aufgabe 3 Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen: (m)

(a) Für $a < b$ gibt es eine Cauchyfolge $(c_n) \subset [a, b[$, die in $[a, b[$ nicht konvergiert.

(b) Es gibt eine Cauchyfolge $(c_n) \subset \mathbb{R}$, für die $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ eine Teilfolge ist, die aber selbst keine Nullfolge ist.

(c) Für $a < b$ ist $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bezüglich der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik vollständig .

(d) Jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert.

Aufgabe 4 Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Es gebe ein $z \in \mathbb{C}$, so dass für jede *konvergente* Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n) gelte (5)

$$\lim_k z_{n_k} = z \ .$$

Zeigen Sie: (z_n) ist konvergent mit

$$\lim_n z_n = z \ .$$

Hinweis: Beweisen Sie durch Widerspruch und wenden Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass an!

Analysis I

Blatt 9

Abgabe : Dienstag, 18.12.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4)

(a) Zeigen Sie, daß die durch

$$a_0 := 0 \quad , \quad a_1 := 1 \quad , \quad a_{k+2} := \frac{1}{2}\left(a_k + a_{k+1}\right) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Man schreibe jedes a_k als Teleskopsumme.

Aufgabe 2 (6)

(a) Zeigen Sie durch Zurückführen auf die Definition, daß $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchyfolge ist.

(b) Beweisen Sie :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \ .$$

Der gemeinsame Grenzwert wird mit e bezeichnet und heißt *Eulersche Zahl.*

(c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n \cdot n!} \ .$$

(d) Die Zahl e ist irrational. (m)

Aufgabe 3 Untersuchen Sie folgende Reihen $\sum_{n=0}^\infty a_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert: (5)

(a)

$$a_n := \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(b)

$$a_n := \frac{2+(-1)^n}{3^n}$$

(c)

$$a_n := \begin{cases} 0 & \\ & \text{falls} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \end{cases} \begin{matrix} n \text{ gerade} \\ \\ n \text{ ungerade} \end{matrix}$$

Aufgabe 4 Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ mit $0 \leqslant a_{k+1} \leqslant a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. *(m)*

Zeigen Sie: $\lim_k k \cdot a_k = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie Summen der Gestalt $\sum_{k=n+1}^{l} a_k$ mit $l \geqslant 2n$.

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier Wintersemester 2001/02

Analysis I

Blatt 10

Abgabe : Dienstag, 15.1.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $H \subset \mathbb{R}$ die Menge ihrer Häufungspunkte. Zeigen Sie: (5)

(a) Es gilt

$$\limsup_n x_n = \max H \quad \text{und} \quad \liminf_n x_n = \min H \ .$$

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn

$$\limsup_n x_n = \liminf_n x_n \ .$$

ist und in diesem Fall gilt

$$\lim_n x_n = \limsup_n x_n \ .$$

Aufgabe 2 Finden Sie Folgen (m)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ divergiert.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergiert.

(c) Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \quad \text{in } \mathbb{C}$$

ist gleich r , wobei $r \geqslant 0$ beliebig vorgegeben sei.

Aufgabe 3 (6)

(a) Untersuchen Sie für die unten stehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i)

$$a_n := \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{n^2}$$

(ii)

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{n+k}}$$

(iii)

$$a_n := \frac{(-1)^{n^2+n+1}}{7^n} \cdot \binom{3n}{n}$$

(iv)

$$a_n := (-1)^{n-1} \cdot \left(1 - \sqrt[n]{n}\right)$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot z^n \quad \text{in } \mathbb{C} \ .$$

Aufgabe 4 Sei $(a_k)_{k \geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+$ eine Folge mit positiven Gliedern. Zeigen Sie: Falls $n \in \mathbb{N}$ ist mit (3)

$$\sup_{k \geqslant 1} k^n \cdot a_k < \infty \ ,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{n-2} \cdot a_k$, d.h.

$$\sup_{m \geqslant 1} \sum_{k=1}^{m} k^{n-2} \cdot a_k < \infty \ .$$

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches neues Jahr 2002 !

Analysis I

Blatt 11

Abgabe : Dienstag, 22.1.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$. Zeigen Sie (3)

$$\frac{1}{\limsup_k x_k} = \liminf_k \frac{1}{x_k} \ .$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie: (5)

(a) Ist $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^l$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , so hat die Potenzreihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot z^{2l}$$

den Konvergenzradius $\sqrt{R}$.

(b) Sind $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot z^l$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot z^l$ Potenzreihen mit Konvergenzradien R_a bzw. R_b , jeweils aus $]0, \infty[$, so erfüllt der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot b_l \cdot z^l$ die Bedingung $R \geqslant R_a \cdot R_b$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie: (m)

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 4 (5)

(a) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gelten

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot z^k \quad \text{und} \quad \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \cdot z^k \ .$$

Hinweis: Bilden Sie Cauchyprodukte mit der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \ .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Wintersemester 2001/02

Analysis I

Blatt 12

Abgabe : Dienstag, 29.1.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Man definiert Sinus- bzw. Cosinusfunktion auf $\mathbb{C}$, (5)

$$\sin\ ,\ \cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ ,$$

durch die (nach Satz 6.19 der Vorlesung) absolut konvergenten Potenzreihen

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot z^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot z^{2k}\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z\ .$$

Folgern Sie folgende Formeln für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad , \quad (\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz\ ,$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right) \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)\ .$$

(b) Beweisen Sie, dass die Funktionen

$$\sin\ ,\ \cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

surjektiv sind.

(c) Vergleichen Sie die Aussagen in (a) und (b) mit der Situation im Reellen, d.h. für

$$\sin\ ,\ \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ .$$

Aufgabe 2 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. (m)
Zeigen Sie: Wenn $x \in X$ ist mit $f(x) > 0$, gibt es $\varepsilon, \delta > 0$ derart, dass

$$f(y) \geqslant \varepsilon \quad \text{für alle } y \in B(x, \delta, d)\ .$$

Aufgabe 3 (5)

(a) Sei $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(x) := \sqrt[p]{x}\ .$$

(i) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sqrt[p]{a+b} \leqslant \sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{b} \quad \text{für} \quad a, b \geqslant 0$$

und folgern Sie

$$\left| \sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y} \right| \leqslant \sqrt[p]{|x-y|} \quad \text{für} \quad x, y \geqslant 0 \ .$$

(ii) Zeigen Sie, dass g stetig ist, und skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

(b) Untersuchen Sie die folgende Funktion in jedem Punkt auf Stetigkeit und skizzieren Sie ihren Graphen:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) := \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \ ,$$

wobei

$$\lfloor x \rfloor := \max \{ k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x \} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Abbildungen (4)

$$\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \max(x, y)$$

und

$$\min : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \min(x, y)$$

stetig sind.

Analysis I

Blatt 13

Abgabe : Dienstag, 5.2.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Gleichung (4)

$$\sin x = \cos 2x$$

auf $[0, \pi]$ genau zwei Lösungen besitzt.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen, und bestimmen Sie deren Bilder $f(\mathbb{R}_+)$ bzw. $g(\mathbb{R}_+)$.

(a) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x+1}$. (3)

(b) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x}{x+1}$. (m)

Aufgabe 3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: (5)

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \exp(-x) \cdot \sqrt{x} \cdot \cos\left(x^2\right) \quad .$$

(b)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\exp\left(\sqrt{x}\right) - 1 - \sqrt{x}}{x} \quad .$$

(c)

$$\lim_{\pi \neq x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} \quad .$$

(d) (m)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1} - 2\sin\frac{\pi}{2\sqrt{x}} + 86x^x}{\left(\frac{2}{x} + \ln x\right)} \quad .$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Abbildung (3)

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 5}$$

ein Minimum besitzt.

Die Punkte der folgenden Aufgabe sind **Bonuspunkte**, die nur zum Haben zählen !

Aufgabe 5 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie: (5)

(a) Ist die Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig und injektiv, so ist die Umkehrfunktion

$$\overset{-1}{f} : f\left([a, b]\right) \longrightarrow [a, b]$$

ebenfalls stetig.

(b) Seien $X := [-2, -1[\cup [1, 2]$ und

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g\left(x\right) := \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in [-2, -1[\\ x - 1 & \phantom{\text{falls }} x \in [1, 2] \end{cases} .$$

Zeigen Sie: g ist stetig und injektiv, aber

$$\overset{-1}{g} : g\left(X\right) \longrightarrow X$$

ist unstetig.

Analysis I

Blatt 14

Abgabe : Nach den Ferien, vor der 1. Analysis II-Vorlesung.

Die Punkte dieses Aufgabenblatts sind in der Analysis II anrechenbare *Bonuspunkte*.

Aufgabe 1 $\mathbb{R}^2$ sei mit der euklidischen Metrik versehen. Betrachten Sie die Funktion (4)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \phantom{\text{falls}} \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto f_x(y) := f(x, y)$$

stetig und für jedes feste $y \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f_y(x) := f(x, y)$$

stetig.

(b) Die Funktion f ist unstetig im Nullpunkt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Abbildung (3)

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

ein Maximum besitzt.

Aufgabe 3 Sei $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Polynomfunktion geraden Grades, (3)

$$p(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j x^j \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} ,$$

wobei $(a_j)_{0 \leqslant j \leqslant 2n} \subset \mathbb{R}$ mit $a_{2n} > 0$. Zeigen Sie, dass p ein Minimum besitzt und

$$p(\mathbb{R}) = [\min p(\mathbb{R}), \infty[\ .$$

Aufgabe 4 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (4)

(a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0+} x\ln^2 x$$

(b)

$$\lim_{0<x\longrightarrow\infty} \frac{\ln x}{\ln 2x}$$

Aufgabe 5 Bestimmen Sie alle Lösungen z der folgenden Gleichungen und schreiben Sie sie in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die sin- und cos-Werte, die vorkommen, mit Hilfe der Additionstheoreme. (4)

(a)

$$z^3 = 1$$

(b)

$$z^3 = i - 1$$

(c)

$$z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(d)

$$z^2 + 2iz - 1 = 0$$

Viel Erfolg bei der Klausur und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!