**Fachbereich Mathematik und Informatik**
**der Philipps-Universität Marburg**

# Übungen zur Vorlesung

# ANALYSIS II

**Prof. Dr. C. Portenier**

unter Mitarbeit von

**Ralf Jäger und Roland Knevel**

Marburg, Sommersemester 2002

Fassung vom 10. Oktober 2002

# Analysis II

## Blatt 1

### Abgabe : Dienstag, 16.04.2002, vor der Vorlesung

**Aufgabe 1** Die Kreislinie $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sei mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Metrik versehen und $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $f$ einen *Antipodenpunkt* $z \in \mathbb{U}$ besitzt, d.h. $f(z) = f(-z)$ . (2)

**Aufgabe 2** (4)

(a) Beweisen Sie für eine differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ die Formel $f' = f \cdot (\ln f)'$ .

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto x^x$$

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen: ($m$)

(a)
$$f_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x \cdot \sin(\ln x)$$

(b)
$$f_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (x^x)^x$$

(c)
$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^3}{\sqrt{\exp(x^2 + 2x + 1)}}$$

(d)
$$f_4 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^{(x^x)}$$

**Aufgabe 4** Untersuchen Sie die Funktion (3)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) := \begin{cases} x^5 - 2x^3 + 2x & \\ & \text{falls} \\ x & \end{cases} \begin{matrix} x < 1 \\ \\ x \geqslant 1 \end{matrix}$$

auf (evtl. einseitige) Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

**Aufgabe 5** Für $s \in \mathbb{R}_+$ sei (5)

$$f_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f_s(x) := \begin{cases} 0 & \\ & \text{falls} \\ x^s \cdot \sin \frac{1}{x} & \end{cases} \begin{matrix} x = 0 \\ \\ x > 0 \end{matrix} .$$

In Abhängigkeit der Werte von $s$ untersuche man die jeweilige Funktion $f_s$ auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

# Analysis II

## Blatt 2

**Abgabe : Dienstag, 23.04.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Betrachten Sie die auf $\mathbb{R}$ erklärten Funktionen (3)

$$f(x) := 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(x) := 4x^3 - 3x^2 - 2x \ .$$

Zeigen Sie, daß kein $\xi \in \left]0,1\right[$ existiert, welches

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

erfüllt. Wie verträgt sich dies mit dem Mittelwertsatz?

**Aufgabe 2** (3)

(a) Wieviele lokale Extrema besitzt die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto e^{\sin x - x^2}$$

im Intervall $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und von welchem Typ (Maxima, Minima) sind diese?

(b) Skizzieren Sie den Graphen von $g$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Aufgabe 3** Seien $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a \in J$ mit $f'(a) < 0$ . (4)

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine Umgebung $U \subset J$ um $a$ mit

$$x < a \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > f(a)$$

und

$$x > a \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) < f(a)$$

für alle $x \in U$ .

(b) Kann man auch auf die Existenz einer Umgebung $U \subset J$ um $a$ schließen mit $f|_U$ streng monoton fallend? Beweis oder Gegenbeispiel !

**Aufgabe 4** Sei det die Determinantenfunktion auf dem Ring der $n \times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen. Seien $a_{k,l} \in \mathbb{C}$ , $k, l \in \{1, \ldots, n\}^2 \setminus \{(1,1)\}$ fest. Zeigen Sie, dass die Funktion $(m)$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \det \begin{pmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'$ .

**Aufgabe 5** (Schwarzkörper-Strahlung) (4)

Nach der Planck'schen Formel für die spektrale Energiedichte $\rho$ der Schwarzkörper-Strahlung abhängig von der absoluten Temperatur $T > 0$ des Strahlers und der Frequenz $\nu$ des Lichtes gilt

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h}{kT}\cdot\nu} - 1}$$

mit den physikalischen Konstanten $h, c, k > 0$ .

Zeigen Sie: Bei fester Temperatur $T$ besitzt $\rho_T$ genau ein Maximum in $\mathbb{R}_+^*$ bei einer Frequenz $\nu_{\max}(T)$ . Zeigen Sie ferner, dass

$$\frac{\nu_{\max}(T)}{T}$$

unabhängig von $T$ ist.

*Hinweis:* Untersuchen Sie die Funktion $\nu \longmapsto \nu \cdot \frac{\rho_T'(\nu)}{\rho_T(\nu)}$ .

# Analysis II

## Blatt 3

**Abgabe : Dienstag, 30.04.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Seien $a \in J^\circ$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ in $J \smallsetminus \{a\}$ differenzierbar sowie in $a$ stetig. Man nehme an, (3)

$$f'(a-) := \lim_{x \to a-} f'(x) \quad \text{und} \quad f'(a+) := \lim_{x \to a+} f'(x)$$

existieren. Zeigen Sie:

$f$ ist in $a$ genau dann differenzierbar, wenn $f'(a+) = f'(a-)$ . In diesem Fall gilt $f'(a) = f'(a-)$ .

**Aufgabe 2** Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgende Ungleichungen:

(a) Für $a < b$ ist (1.5)

$$e^a \cdot (b-a) < e^b - e^a < e^b \cdot (b-a) \ .$$

(b) Für $0 < x < 1$ gilt ($m$)

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(1 - x^2\right)^{-1} \ .$$

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (2.5)

$$(\cos x - 1)^2 + (\sin x)^2 \leqslant 2x^2 \ .$$

**Aufgabe 3** Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\tau \in J$ und $\eta \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass es genau eine differenzierbare Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, welche das Anfangswertproblem (5)

$$f' = f + \exp \quad , \quad f(\tau) = \eta$$

löst und bestimmen Sie dieses $f$ .

*Hinweis*: Benutzen Sie den Ansatz $f = g \cdot \exp$ .

**Aufgabe 4** Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

(a) (3)

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} - x^2\right)$$

(b) ($m$)

$$\lim_{0 \neq x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^7}$$

(c) Berechnen Sie (b) erneut mit Hilfe der Restgliedabschätzung für den Sinus. ($m$)

# Analysis II

**Blatt 4**

**Abgabe : Dienstag, 07.05.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Seien $J$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{C}^{(n)}(J)$ .

(a) Zeigen Sie: $f \cdot g \in \mathcal{C}^{(n)}(J)$ und es gilt die *Leibnizsche Differentiationsformel* (3)

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \ .$$

(b) Sei $f := \sin \cdot \cosh$ . Berechnen Sie $f^{(2n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Leibnizschen Differentiationsformel. $(m)$

**Aufgabe 2** (4)

(a) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das $n$. Taylorpolynom $T_n f$ von

$$f : \left]-1, \infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{1+x}$$

im Nullpunkt.

(b) Zeigen Sie: Auf jedem Teilintervall $\left[-\delta, \infty\right[ \subset \left]-1, \infty\right[$ mit $\delta \in \left[0, 1\right[$ , und für jedes $n \geqslant 1$ gilt die Restgliedabschätzung

$$|R_n(y)| \leqslant \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!^2 n} |1-\delta|^{\frac{1}{2}-n} |y|^n \quad \text{für alle } y \in \left[-\delta, \infty\right[ \ .$$

*Hinweis*: Benutzen Sie

$$\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \ .$$

**Aufgabe 3** Seien $J$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist $f$ konvex, so ist $f$ stetig.
*Hinweis :* Für alle $x \in J$ et $a, b \in J$ mit $a < x < b$ schätzen Sie $f(x)$ für $y \in [a, b]$ ab durch

$$f(y) \leqslant f(x) + M(y-x) \quad \text{bzw.} \quad f(y) \geqslant f(x) + m(y-x)$$

für geignete Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$ getrennt für $y \leqslant x$ und $y \geqslant x$.

**Aufgabe** (a) Ist $f \in \mathcal{C}^{(2)}(J)$ , so ist $f$ genau dann konvex, wenn der Graph von $f$ oberhalb jeder seiner Tangenten liegt, d.h. wenn für alle $x, y \in J$ gilt

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x) \ .$$

**Aufgabe 4** Diskutieren Sie die Funktion (5)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

gemäß Kapitel 8.12 der Vorlesung. In welchen Teilintervallen von $\mathbb{R}$ ist $f$ konvex bzw. konkav ? Skizze !

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2002

# Analysis II

## Blatt 5

**Abgabe : Dienstag, 14.05.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1**

(a) Seien $c_1, c_2, \eta \in \mathbb{C}$, $c_1 \neq 0$ . Zeigen Sie mit Hilfe des Ansatzes $f = g \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$ , dass $(m)$

$$f = \frac{c_2}{c_1} + \left(\eta - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$f' + c_1 \cdot f = c_2 \quad , \quad f(0) = \eta$$

ist.

(b) Seien $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{C}$ . Lösen Sie das Anfangswertproblem (2.5)

$$f'' + f = 0 \quad , \quad f(0) = \eta_0 \quad , \quad f'(0) = \eta_1 \ .$$

Machen Sie dazu den Ansatz $f = g \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}}$ und zeigen Sie, dass $g'' + 2i \cdot g' = 0$ ist.

(c) Geben Sie Lösungen speziell für die Paare $(\eta_0, \eta_1) = (1, 0)$ , $(0, 1)$ an. (0.5)

**Aufgabe 2** Diskutieren Sie die Funktion $(m)$

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln^2 x - \ln x^2$$

(Grenzwerte für $x \to 0$ und $x \to \infty$ , Nullstellen, Monotonie, Extrema, Wendepunkte, Konvexität) und skizzieren Sie den Graphen von $f$ .

**Aufgabe 3** Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit einer Nullstelle $\xi \in J$ mit $f(\xi) = f'(\xi) = 0$ . Ferner gebe es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $0 < f'' \leqslant M$ . Zeigen Sie für $x_0 \in J \smallsetminus \{\xi\}$ : (5)

(a) Durch die Newtonsche Rekursion

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

wird eine streng monoton gegen $\xi$ konvergierende Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert.

(b) Ist $f''$ stetig in $\xi$ , so existiert ein $c \in \,]0,1[$ derart, dass $|x_{k+1} - \xi| \leqslant c \cdot |x_k - \xi|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ .

*Hinweis:* Für die Funktionen

$$\varphi = \mathrm{id} - \frac{f}{f'} \quad \text{und} \quad \Phi := \frac{\varphi - \xi}{\mathrm{id} - \xi}$$

ist die stetige Fortsetzbarkeit in $\xi$ (l'Hospital) und die Eigenschaft $\Phi < 1$ auf $[\xi, x_0]$ zu zeigen.

**Aufgabe 4** (6)

(a) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es existiere eine Folge von Unterteilungen $(x_{k,j})_{j=0,\dots,m_k}$ von $[a,b]$ mit

$$C := \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{m_k-1} \sup f\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{m_k-1} \inf f\left([x_{k,j}, x_{k,j+1}[\right) \cdot (x_{k,j+1} - x_{k,j}) \in \mathbb{R}\ .$$

Dann ist $f$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f = C\ .$$

(b) Für jedes $x \in [a,b]$ ist die Funktion $1_{\{x\}}$ integrierbar. Welchen Wert hat

$$\int_a^b 1_{\{x\}}\ ?$$

(c) Berechnen Sie (wie Archimedes)

$$\int_0^1 \mathrm{id}^2$$

mit Hilfe von Teil (a) .

# Analysis II

## Blatt 6

**Abgabe : Dienstag, 21.05.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty} a_k$ für

(a) (3)

$$a_k := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k+j} \ .$$

(b) $(m)$

$$a_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(j^2+k^2\right)(2j+1)}{k^4} \left(\ln\left(j^2+k^2\right) - 2\ln k\right) \ .$$

*Hinweis:* Deuten Sie die Summen als elementare Integrale.

**Aufgabe 2** Lösen Sie das Anfangswertproblem (4)

$$f' - 2\,\mathrm{id}\cdot f = \mathrm{id} \quad , \quad f(0) = 0 \ .$$

**Aufgabe 3** (5)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ auf jedem Intervall $J \subset \mathbb{R}_+$ integrierbar mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \eta \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f = \eta \ .$$

*Hinweis:* Spalten Sie das Integral auf:

$$\int_0^x \diamond = \int_0^{\sqrt{x}} \diamond + \int_{\sqrt{x}}^x \diamond \ .$$

(b) Seien nun $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \eta$ , $\lim_{x\to\infty} g(x) = \xi \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x-t)\, g(t)\ dt = \eta\xi \ .$$

**Aufgabe 4** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ . Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $(m)$

$$\int_a^b \frac{dx}{x\cdot \ln x} \quad \text{für} \quad a, b > 0 \ ;$$

(b) (2)

$$\int_0^a x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k dx \quad \text{für} \quad a \neq 0\ ;$$

(c) (2)

$$\int_a^0 \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx\ .$$

# Analysis II

## Blatt 7

**Abgabe : Dienstag, 28.05.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Sei $J$ ein Intervall, $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und $f' : J \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $f$ gleichmäßig stetig ist ! $(m)$

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $(m)$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_x^{x^2+\pi} \sqrt{1+\sin^2(t)}\, dt \ .$$

**Aufgabe 3** Sei $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Funktionalgleichung $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ erfüllt. Zeigen Sie: (6)

(a) $f = 0$ auf $\mathbb{R}_+^*$ oder $f > 0$ auf $\mathbb{R}_+^*$ .
*Hinweis:* Untersuchen Sie die möglichen Werte von $f(1)$ .

(b) $f$ ist genau dann differenzierbar, wenn $f$ in einem $x \in \mathbb{R}_+^*$ differenzierbar ist.
In diesem Fall erfüllt $f$ eine Differentialgleichung. Welche ?

(c) $f$ ist stetig differenzierbar.
*Hinweis:* Untersuchen Sie $\int_1^x f(t)\, dt$ und beachten Sie $t = \frac{t}{x} \cdot x$ .

(d) Schließen Sie durch das hergeleitete AWP auf die Gestalt von $f$ .

**Aufgabe 4** Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems (4)

$$f' = 1 + f^2 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ .$$

**Aufgabe 5** Zeigen Sie, dass die Funktion (3)

$$\frac{\sin}{\mathrm{id}} : \left]0, \infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

uneigentlich-integrierbar ist.

*Hinweis :* Man benutze partielle Integration.

# Analysis II

## Blatt 8

**Abgabe : Dienstag, 04.06.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems (5)

$$(f' \cdot \mathrm{id} - f) \cdot \exp\left(\frac{f}{\mathrm{id}}\right) = \mathrm{id} \quad , \quad f(1) = 0 \ .$$

*Hinweis :* Ansatz $f = g \cdot \mathrm{id}$ .

**Aufgabe 2** Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren?

(a) $(m)$

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^3 e^t \ dt}{\sqrt{1-t^2}} \ ,$$

(b) $(m)$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t\,(\ln t)^5} \ ,$$

(c) (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(t^2\right) \ dt \ ,$$

(d) (2)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(1+\ln t) \ dt}{\sqrt{t^4+t+1}} \ .$$

**Aufgabe 3** Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{C}^n$ $(m)$

$$\lim\nolimits_{p\to\infty} |x|_p = |x|_\infty \ .$$

**Aufgabe 4** Sei $\mathcal{R}([0,1])$ der Vektorraum aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[0,1]$ . Wir definieren die Funktion (6)

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{R}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \int_0^1 |f(t)| \ dt \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Auf dem Unterraum $\mathcal{C}([0,1])$ von $\mathcal{R}([0,1])$ ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm, auf $\mathcal{R}([0,1])$ aber nicht.

(b) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge in $\mathcal{C}([0,1])$ , dann konvergiert sie auch bzgl. der Norm $\|\cdot\|_1$ und die Grenzfunktionen bzgl. beider Normen stimmen überein.

(c) Die Abbildung

$$I : \left(\mathcal{C}\left([0,1]\right), \|\cdot\|_1\right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}\left([0,1]\right), \|\cdot\|_\infty\right) : f \longmapsto f$$

ist unstetig. (Man beachte, daß ihre Umkehrabbildung nach Aufgabenteil (b) stetig ist !)

(d) $\left(\mathcal{C}\left([0,1]\right), \|\cdot\|_1\right)$ ist kein Banachraum. Zeigen Sie dazu, daß die Folge $(f_k)_{k\geqslant 2}$ mit

$$f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \begin{cases} 0 & & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ k \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{falls} & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right[ \\ 1 & & t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{k}, 1\right] \end{cases}$$

eine Cauchyfolge in $\left(\mathcal{C}\left([0,1]\right), \|\cdot\|_1\right)$ bildet, welche nicht konvergiert.

# Analysis II

**Blatt 9**

**Abgabe : Dienstag, 11.06.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1**

(a) Zeigen Sie für Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ , $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von positiven Zahlen mit asymptotischer Äquivalenz $a_k \sim b_k$ für $k \to \infty$ die folgende Aussage: (m)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot c_k < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot c_k < \infty \ .$$

(b) Folgern Sie mit Hilfe der Stirling-Formel, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1)}$ konvergiert. (1)

**Aufgabe 2** Für $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei (5)

$$f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \frac{k^c \cdot x}{1 + k^2 \cdot x^2} \ .$$

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $c \in \mathbb{R}$ , für die gilt

(a) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $[0,1]$ .

(b) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$ .

(c) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $[0,1]$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k \ .$$

**Aufgabe 3** Auf $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ definieren wir eine Abbildung

$$\|\cdot\|_{(1)} : \mathcal{C}^{(1)}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : f \longmapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \ .$$

Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|_{(1)}$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ . (m)

(b) $\left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{(1)}\right)$ ist ein Banachraum. (2)

(c) Die Abbildung (1)

$$\partial : \left(\mathcal{C}^{(1)}([a,b]), \|\cdot\|_{(1)}\right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right) : f \longmapsto f'$$

ist stetig.

(d) Die Aussagen (b) und (c) treffen nicht mehr zu, wenn wir $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ auch mit der Supremumsnorm statt mit der $\mathcal{C}^{(1)}$-Norm versehen. (m)

**Aufgabe 4** Bestimmen Sie zwei Teilmengen $A, B$ von $\mathbb{R}$ , so dass die Mengen (4)

$$A^\circ \cap B^\circ \ , \ A^\circ \cap B \ , \ A \cap B^\circ \ , \ A \cap B \ , \ \overline{A} \cap B \ , \ A \cap \overline{B} \ , \ \overline{A \cap B} \ , \ \overline{A} \cap \overline{B}$$

alle voneinander verschieden sind.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2002

# Analysis II

## Blatt 10

**Abgabe : Dienstag, 18.06.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1**

(a) Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ und $k \in \mathbb{N}$ $(m)$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha \cdot u} \cdot u^k \cdot du = \frac{(-1)^k}{\alpha^{k+1}} \cdot k! \ .$$

(b) Beweisen Sie die Identität (3)

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{id}^{\mathrm{id}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \ ,$$

indem Sie den Integranden als Exponential-Reihe schreiben.

**Aufgabe 2** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei (5)

$$f_k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{k^{2\alpha}} \cdot \frac{1 - \cos kx}{x^{\alpha}} \ .$$

Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$ , sodaß

(a) $\lim_k f_k = 0$ punktweise;

(b) $\lim_k f_k = 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+^*$ ;

(c) $\lim_k f_k' = 0$ punktweise;

(d) $\lim_k f_k' = 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+^*$ .

*Hinweis:* Substitution $x := \frac{t}{k}$ .

**Aufgabe 3** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den *allgemeinen Binomialkoeffizienten* (5)
durch

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{l=1}^{k} \frac{\alpha - l + 1}{l} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hat die sog. *Binomialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot \mathrm{id}^k \ ,$$

den Konvergenzradius $R = 1$ .

(b) Die Funktion

$$f : ]-1,1[ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$(1 + \mathrm{id}) \cdot f' = \alpha \cdot f \quad , \quad f(0) = 1 \ .$$

(c) Es gilt

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} \quad \text{für alle } x \in ]-1,1[ \ .$$

**Aufgabe 4** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $A \subset X$ und (3)

$$d(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \inf_{y \in A} d(x,y) \ .$$

Zeigen Sie, daß die folgenden Mengen übereinstimmen:

$$\overline{A} \ ,$$

$$B := \{x \in X \mid d(x,A) = 0\} \ ,$$

$$C := \left\{x \in X \mid \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A \text{ mit } x = \lim_k x_k \right\} \ .$$

# Analysis II

## Blatt 11

**Abgabe : Dienstag, 25.06.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Seien $X, Y$ metrische Räume und $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ , $g : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ , $h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen. (4)

(a) Zeigen Sie, dass für jede abgeschlossene Menge $A$ in $X \times Y$ die Menge

$$\{(x, y) \in A \mid f(x) \cdot g(y) = h(x, y)\}$$

abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jede offene Menge $O$ in $X \times Y$ die Bilder $\mathrm{pr}_1(O)$ und $\mathrm{pr}_2(O)$ offen sind.

(c) Finden Sie mittels Teil (a) eine abgeschlossene Menge $H$ in $\mathbb{R}^2$ für die $\mathrm{pr}_1(H) = \mathrm{pr}_2(H) = ]0, \infty[$ .

**Aufgabe 2** Zeigen Sie: (4)

(a) Es existiert eine Folge $(f_k) \subset \mathcal{C}([0,1])$ mit $\|f_k\|_\infty = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\|f_k - f_j\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } k, j \in \mathbb{N} \text{ mit } k \neq j\ .$$

(b) Die Einheitskugel

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \|f\|_\infty \leqslant 1\}$$

in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht kompakt (obwohl sie abgeschlossen und beschränkt ist).

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie alle kompakten Teilmengen des diskreten metrischen Raums. $(m)$

**Aufgabe 4** Gegeben sei die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (e^x + y, e^y + y)$ . (5)

(a) Zeigen Sie: $\Phi$ ist stetig und injektiv.

(b) Bestimmen Sie das Bild unter $\Phi$ der Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ , welche gegeben sind durch die Gleichungen

(i) $x = a$ für $a \in \mathbb{R}$ .
(ii) $y = b$ für $b \in \mathbb{R}$ .

(c) Bestimmen Sie $Y := \Phi(\mathbb{R}^2)$ und zeigen Sie, dass

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$$

ein Homöomorphismus ist.

# Analysis II

## Blatt 12

### Abgabe : Dienstag, 02.07.2002, vor der Vorlesung

**Aufgabe 1** Sei $X$ ein metrischer Raum. Eine Familie $(A_j)_{j\in J}$ von Teilmengen aus $X$ besitzt die *endliche Durchschnittseigenschaft* , falls für jede endliche Teilmenge $I \neq \emptyset$ von $J$

$$\bigcap_{j\in I} A_j \neq \emptyset \ .$$

(a) Zeigen Sie: Die Folge $\left(\left]0, \frac{1}{k}\right]\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft, aber (m)

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{k}\right] = \emptyset \ .$$

(b) Sei $K \subset X$ kompakt und $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $K$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Zeigen Sie (3)

$$\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset \ .$$

**Aufgabe 2** Die parametrisierte Kurve (4)

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto e^{c\cdot t} \cdot (\cos t, \sin t)$$

mit $c > 0$ heißt *logarithmische Spirale* .

(a) Skizzieren Sie die Kurve $\gamma([-2\pi, 2\pi])$ für $c = \frac{1}{2\pi}$ und bestimmen Sie $\gamma'$ .

(b) Zeigen Sie $\gamma_{|[a,b]}$ ist rektifizierbar und berechnen Sie ihre Bogenlänge $L_{[a,b]}$ . Existiert $\lim_{a\to-\infty} L_{[a,0]}$ ?

(c) Zeigen Sie: Für jedes $r \in \mathbb{R}_+^*$ schneidet $\gamma$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ in genau einem Punkt. Berechnen Sie den Schnittwinkel.

**Aufgabe 3** Für $n \in \mathbb{N}^*$ bezeichnen wir mit

$$\mathbb{S}^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x|_2 = 1 \right\}$$

die sognannte *n-Sphäre* im $\mathbb{R}^{n+1}$ . Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{S}^n$ ist kompakt. (1)

(b) Zu je zwei Punkten $x, y \in \mathbb{S}^n$ gibt es eine stetige parametrisierte Kurve (2)

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ .

*Hinweis:* Projektion einer geeigneten Kurve von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{S}^n$ .

(c) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen Antipodenpunkt.[1] (2)

(d) Ist $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{S}^n$ differenzierbar, so steht $\gamma'(t)$ für jedes $t \in J$ senkrecht auf $\gamma(t)$ , und es ist (m)

$$|\gamma''|_2 \geqslant |\gamma'|_2^2$$

überall wo $\gamma$ zweimal differenzierbar ist.

**Aufgabe 4** Es seien $c > 0$ , $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. (3)

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,t) \longmapsto g\left((v|\,x) - c \cdot t\right)$$

eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_t^2 f = c^2 \cdot \Delta_x f$$

ist.

[1] Dies können wir z.B. folgendermaßen interpretieren: Wenn wir annehmen, daß die Temperatur an der Erdoberfläche stetig verteilt ist, so gibt es also zwei Orte auf gegenüberliegenden Seiten des Erdballs, an denen die gleiche Temperatur herrscht.

# Analysis II

## Blatt 13

**Abgabe : Dienstag, 09.07.2002, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch (4)

$$f(x,y) := \frac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

und $f(0,0) := 0$ . Zeigen Sie:

(a) $f$ ist stetig und stetig partiell differenzierbar.

(b) $f$ ist zweimal partiell differenzierbar.

(c) $\partial_1 \partial_2 f(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0,0)$ , und geben Sie eine in $(0,0)$ unstetige partielle Ableitung an.

**Aufgabe 2** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch (4)

$$f(x,y) := \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{und} \quad f(0,0) := 0 \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ in $(0,0)$ stetig und partiell differenzierbar ist, aber nicht total differenzierbar.

(b) Es sei $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma'(0) \neq (0,0)$ . Zeigen Sie, dass $f \circ \gamma$ in $0$ differenzierbar ist.

**Aufgabe 3** Es seien $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ , $I$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ , $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\gamma : I \longrightarrow U$ eine differenzierbare Kurve, so dass $f \circ \gamma$ konstant ist. Zeigen Sie (2)

$$\operatorname{grad} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in I \ ,$$

und geben Sie eine geometrische Interpretation dieses Resultats.

**Aufgabe 4** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto 3x \cdot e^y - x^3 - e^{3y}$ . (3)
Zeigen Sie, dass $f$ surjektiv ist, und bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f$ .

**Aufgabe 5** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto 4x^2 - 3xy$ . ($m$)

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f$ auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ .

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f$ auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ .

(c) Bestimmen Sie die lokalen und absoluten Extrema von $f$ auf

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqslant 1\right\} \ .$$

# Analysis II

## Blatt 14

**Abgabe : Nach den Ferien, vor der ersten Vorlesung zur Analysis III**

Die Punkte dieses Aufgabenblattes sind in der Analysis III anrechenbare Bonuspunkte.

**Aufgabe 1** $(m)$

(a) Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ offen und nicht leer. Zeigen Sie: Es existiert keine stetige injektive Abbildung $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ .

*Hinweis:* geschlossene Kurven in $X$ .

(b) Im Gegensatz dazu existiert eine stetige injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ . Geben Sie eine solche konkret an.

**Aufgabe 2** (6)

(a) Sei $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine an $a \in J$ differenzierbare Funktion, und seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $J$ mit $x_k \leqslant a < y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_k x_k = \lim_k y_k = a$ . Zeigen Sie

$$\lim_k \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} = f'(a) \ .$$

(b) Es seien für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_0(x) := \left| 2\left(\frac{x+1}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right) - 1 \right| \quad \text{und} \quad f_n(x) := \frac{1}{2^n} \cdot f_0(2^n \cdot x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ . Skizzieren Sie die Graphen von $f_0$ , $f_1$ und $f_2$ in **einem** Diagramm.

(c) Zeigen Sie, daß durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wird, welche **in keinem Punkt** $a \in \mathbb{R}$ **differenzierbar** ist.

*Hinweis:* Teil (a) angewandt mit

$$x_k := \frac{m_k}{2^k} \quad \text{und} \quad y_k := \frac{m_k + 1}{2^k} \ ,$$

$m_k \in \mathbb{Z}$ geeignet. Welche Werte können die Differenzenquotienten

$$\frac{f_n(y_k) - f_n(x_k)}{y_k - x_k}$$

annehmen ?

**Aufgabe 3** Zeigen Sie: Die Funktion (3)

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x) \longmapsto t^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

ist eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t f = \Delta_x f \ .$$

**Aufgabe 4** Ein quaderförmiger oben offener Kasten mit einem Volumen von $32\,\mathrm{m}^3$ soll so konstruiert werden, daß man möglichst wenig Farbe braucht, um die 5 Innenflächen anzustreichen. Wie müssen Länge, Breite und Höhe gewählt werden? (4)

**Aufgabe 5** Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Alkoholkonzentration im Blut, nachdem man alkoholische Getränke zu sich genommen hat, dient das folgende System von Differentialgleichungen: (4)

$$m' = -\alpha m \tag{$*$}$$

$$b' = \alpha m - \beta b \tag{$**$}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$ und Anfangsbedingungen

$$m(0) = m_0 \geqslant 0 \text{ und } b(0) = b_0 \geqslant 0 \ ,$$

wobei $m$ bzw. $b : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ die Alkoholmenge im Magen bzw. im Blut bezeichnet. Lösen Sie für $\alpha \neq \beta$ das Anfangswertproblem. Zeigen Sie, daß für $b_0 = 0$ die Lösung $b$ ein Maximum besitzt, und berechnen Sie dieses.

Viel Erfolg bei der Klausur und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!