Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Vorlesung

ANALYSIS III

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

Björn Böttcher

Marburg, Wintersemester 2005/2006

Fassung vom 5. Februar 2006

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, B. Böttcher
Wintersemester 2005/2006

Analysis III

Blatt 1

Abgabe : Montag, 31.10.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Punktweise nach unten-Halbstetigkeit) Seien ein metrischer Raum X und eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gegeben. Die Funktion f heißt in $x \in X$ nach unten halbstetig (n.u.h.), wenn für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma < f(x)$ eine Umgebung $U \subset X$ von x existiert, so dass $\gamma < f(y)$ für alle $y \in U$. Zeigen Sie: (6)

(a) Genau dann ist f n.u.h., wenn f in jedem $x \in X$ n.u.h. ist.

(b) Genau dann ist f in x n.u.h., wenn für jede Folge $(x_k) \subset X$ mit $\lim_k x_k = x$ gilt

$$\liminf_k f(x_k) \geqslant f(x) \ .$$

(c) Genau dann ist f in x stetig, wenn f und $-f$ in x n.u.h. sind.

Aufgabe 2 (Die Additionen auf $\overline{\mathbb{R}}$) Untersuchen Sie die Verknüpfungen $+^{\bullet}$ und $+_{\bullet}$ auf (8)

(a) Assoziativität.

(b) Verträglichkeit mit der Multiplikation, d.h. welche Distributivgesetze gelten?

(c) Verträglichkeit mit sup und inf , d.h. gilt für alle $a, a_j \in \overline{\mathbb{R}}$, $j \in J$,

$$\sup_j (a +_{\bullet} a_j) = a +_{\bullet} \sup_j a_j \quad , \quad \sup_j (a +^{\bullet} a_j) = a +^{\bullet} \sup_j a_j \ ,$$

bzw.

$$\inf_j (a +_{\bullet} a_j) = a +_{\bullet} \inf_j a_j \quad , \quad \inf_j (a +^{\bullet} a_j) = a +^{\bullet} \inf_j a_j \ ?$$

DEFINITION (Umgebung, kompakt, lokal kompakt)

Eine *Umgebung* eines Punktes ist eine Menge die eine offene Menge enthält die den Punkt enthält.

Eine *kompakte Menge* ist eine Menge für die jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Ein Hausdorff-Raum heißt *lokal kompakt* , wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Aufgabe 3 (Lokal kompakte Teilräume) Sei X ein lokal kompakter (metrischer) Raum. Zeigen Sie: Der Schnitt einer offenen Teilmenge mit einer abgeschlossenen Teilmenge von X definiert wieder einen lokal kompakten Raum. (4)

Vereinfachend kann angenommen werden, dass der Raum metrisch ist.

Aufgabe 4 (Stabilität lokal kompakter Teilräume) Beweisen oder widerlegen Sie: (m)

(a) In einem lokal kompakten Raum ist die Vereinigung zweier lokal kompakter Teilräume wieder lokal kompakt.

(b) In einem lokal kompakten Raum ist das Komplement eines lokal kompakten Teilraums wieder lokal kompakt.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, B. Böttcher
Wintersemester 2005/2006

Analysis III

Blatt 2

Abgabe : Montag, 7.11.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Diskrete Räume) Es sei X ein diskreter Raum, d.h. alle Teilmengen von X sind offen. (5)

(a) Zeigen Sie, dass X ein lokal kompakter Raum ist.

(b) Charakterisieren Sie die Funktionen aus $\mathcal{K}(X)$ und $\mathcal{SK}(X)$.

(c) Zeigen Sie, dass genau ein Radon-Integral μ auf X existiert, welches

$$\mu\left(1_{\{x\}}\right) = 1 \quad \text{für alle } x \in X$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (Das Riemann-Stieltjes-Integral) Sei $\varrho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ eine wachsende, rechtsstetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, d.h. $\varrho(a+) = \varrho(a)$ für alle $a \in J$. Falls $[a, b] \subset J$ und $K = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ eine Partition von $[a, b]$ ist, definiert man die *Feinheit* von K (6)

$$|K| = \max_{j=0}^{m} (x_{j+1} - x_j) \ .$$

Ist weiterhin $\varphi \in \mathcal{K}(J)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$, so setzt man

$$S_K(\varphi) = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(x_j) \cdot (\varrho(x_{j+1}) - \varrho(x_j)) \ .$$

(a) Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Partitionen K und L von $[a, b]$ mit $|K|, |L| \leqslant \delta$ gilt

$$|S_K(\varphi) - S_L(\varphi)| \leqslant \varepsilon \ .$$

(b) Falls (K_k) eine Folge von Partitionen mit $\lim_k |K_k| = 0$ ist, definiert man

$$\int_a^b \varphi \, d\varrho = \lim_k S_{K_k}(\varphi) \ .$$

Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert existiert und von der Wahl der Folge von Partitionen unabhängig ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Wert von $\int_a^b \varphi \, d\varrho$ unabhängig von der Wahl des Intervalls $[a, b] \subset J$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass durch

$$\varphi \longmapsto \int \varphi \, d\varrho : \mathcal{K}(J) \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

wobei $\int \varphi \, d\varrho = \int_a^b \varphi \, d\varrho$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b] \subset J$ ist, eine positive Linearform definiert wird.

Aufgabe 3 (Eine Formel für die Γ-Funktion) Man definiert die *Eulersche* Γ*-Funktion* (5) durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \text{für alle} \quad x > 0 \,.$$

Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(x) = \lim_k \frac{k! \cdot k^x}{x \cdot (x+1) \cdots (x+k)} \,.$$

Hinweis : Definieren Sie für $k \geqslant 1$

$$f_k : \mathbb{R}_+ = [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k & 0 < t < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,.$$

Aus Analysis I ist bekannt, dass die Folge $\left(1 + \frac{t}{k}\right)^k$ für $k \geqslant -t$ wächst und gegen e^t konvergiert. Wenden Sie die Bourbaki-Eigenschaft des Lebesgue-Integrals an!

Aufgabe 4 (Der Flächeninhalt im $\mathbb{R}^2$) Für $a < b \in \mathbb{R}$, Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*m*) und

$$A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b \,,\; y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x) \right\}$$

ist der Flächeninhalt von A gegeben durch

$$\mathrm{Vol}_2(A) := \int\int 1_A(x,y)\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}(x,y) := \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right) dx \,.$$

(a) Berechne den Flächeninhalt von der Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ die durch folgende Kurven begrenzt wird: $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$.

(b) Berechne

$$\int_0^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx$$

und bestimme die Integrale die beim Vertauschen der Reihenfolge der Integration auftreten.

(c) Man würde gerne zeigen, daß immer

$$\int\int 1_A(x,y)\, dxdy = \int\int 1_A(x,y)\, dydx$$

gilt. Welche Probleme tauchen beim einem 'Beweis-Versuch' mit Riemann-Integralen auf ?

Analysis III

Blatt 3

Abgabe : Montag, 14.11.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Addition auf der Menge $\mathcal{M}_+$ aller Radon-Integrale) Seien μ und ν Radon-Integrale auf X . (5)

Zeigen Sie,

$$\mu + \nu : s \longmapsto \mu(s) + \nu(s) : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$$

ist ein Radon-Integral auf X .

Aufgabe 2 (Uneigentliche Integration und Euler-Mascheroni) Es seien (6)

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} 1_{[k,k+1[} : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$s : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |f(x)| - \frac{1}{x} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) f ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

(b) $s \in \mathcal{SK}([1, \infty[)$ mit

$$\int s \, d\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) =: \gamma \ .$$

Die Zahl γ heißt *Euler-Mascheronische Konstante* .

(c) $\gamma < 1$.

Aufgabe 3 (Weiteres zum Riemann-Stieltjes Integral) Sei ρ eine stetige, monoton wachsende Funktion auf einem Intervall I . Sei λ_ρ das zugehörige Radon-Integral auf $\mathcal{SK}(I)$ (vgl. Blatt 2, Aufgabe 2). (5)

Berechnen Sie für $a, b \in I$, $a < b$

$$\lambda_\rho \left(1_{]a,b[}\right) \qquad \text{und} \qquad \lambda_\rho \left(-1_{\{a\}}\right) \ .$$

Aufgabe 4 (Taylor-Reihen und Lebesgue-Integration) (m)

(a) Kann man $\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ auf $[0,1]$ so definieren, daß diese Funktion nach unten halbstetig ist ?

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Bourbaki Eigenschaft folgendes Integral :

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\, dx \ .$$

Analysis III

Blatt 4

Abgabe : Montag, 21.11.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Addition auf der Menge $\mathcal{M}_+$ aller Radon-Integrale) Seien μ und ν Radon-Integrale auf X . (6)

(a) Sei nun $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Zeigen Sie

$$\int^* f\, d(\mu + \nu) = \int^* f\, d\mu +^\bullet \int^* f\, d\nu \ .$$

(b) Beweisen Sie: Die Funktion f ist genau dann $(\mu + \nu)$-integrierbar, wenn sie μ- und ν-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int f\, d(\mu + \nu) = \int f\, d\mu + \int f\, d\nu \ .$$

Aufgabe 2 (Lebesgue-Integrierbarkeit) Es sei (m)

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} 1_{[k,k+1[} : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Zeigen Sie, daß f nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 3 (Integration auf diskreten Räumen) Sei X ein diskreter Raum. Gegeben sei das Zählintegral # durch (4)

$$\# : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \sum_{x \in \operatorname{supp} \varphi} \varphi(x) \ .$$

(a) Wir bezeichenen die eindeutige Fortsetzung von # zu einem Radon-Integral wieder mit # . Zeige, daß auf $\mathcal{SK}(X)$ gilt:

$$\#(s) = \sum_{s(x)>0} s(x) + \sum_{s(x)<0} s(x) \ .$$

(b) Zeige, daß für alle $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int^* f\, d\# = \sum_{f(x)>0} f(x) +^\bullet \sum_{f(x)<0} f(x) \ ,$$

mit

$$\sum_{f(x)>0} f(x) := \sup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \sum_{x \in K, f(x)>0} f(x) \quad \text{und} \quad \sum_{f(x)<0} f(x) := \inf_{K \in \mathfrak{K}(X)} \sum_{x \in K, f(x)<0} f(x) \ .$$

$\mathfrak{K}(X)$ bezeichnet die kompakten, d.h. die endlichen, Teilmengen von X .

Aufgabe 4 (Die Konstante der Fehlerfunktion) Zeige: (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}\ .$$

Hinweis : Benutze Blatt 2, Aufgabe 2, um $\Gamma(\frac{1}{2})^2$ mit Hilfe des Wallisschen Produkts

$$\prod_{l=1}^{\infty} \frac{4l^2}{4l^2-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2^k \cdot k!)^4}{(2k)!(2k+1)!} = \frac{\pi}{2}$$

zu berechnen.

Analysis III

Blatt 5

Abgabe : Montag, 28.11.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Dirac-Integral) Seien $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. (4)

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int^* f\, d\left(\alpha \cdot \varepsilon_x\right) = \alpha \cdot f\left(x\right)$$

für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt.

(b) Beweisen Sie: Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\alpha \cdot \varepsilon_x$-integrierbar, wenn $\alpha \cdot f\left(x\right)$ reell ist. In diesem Fall gilt

$$\int f\, d\left(\alpha \cdot \varepsilon_x\right) = \alpha \cdot f\left(x\right) \ .$$

Aufgabe 2 ($\mathbb{Q}$ als Lebesgue-Nullmenge) Sei $\varepsilon > 0$. Konstruieren Sie explizit eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $\mathbb{Q} \subset U$ und $\lambda_{\mathbb{R}}^*\left(U\right) \leqslant \varepsilon$. Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}$ eine $\lambda_{\mathbb{R}}$-Nullmenge ist. (m)

Aufgabe 3 (Keine integrierbare Majorante) Für $k \in \mathbb{N}$ sei (4)

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{\sqrt{k}}{1 + kx^2} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f_k \in \mathcal{L}^1\left(\lambda_{\mathbb{R}}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Die Folge $\left(f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1\left(\lambda_{\mathbb{R}}\right)$.

(c) $\int f \ d\lambda_{\mathbb{R}} \neq \lim_{k\longrightarrow\infty} \int f_k d\lambda_{\mathbb{R}}$.

(d) Zeigen Sie, dass es zu $x \in [-1, 1] \smallsetminus \{0\}$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f_k\left(x\right) \geqslant \frac{1}{3|x|}$. Folgern sie hieraus, dass die Folge $\left(f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine $\lambda_{\mathbb{R}}$-integrierbare Majorante besitzt.

Aufgabe 4 (Vertauschen von Limes Inferior und Integral) Seien μ ein Radon-Integral auf X und $\left(f_k\right)$ eine Folge Funktionen mit einer μ-integrierbaren Minorante. Zeigen Sie, dass (3)

$$\int^* \liminf{}_k\, f_k\, d\mu \leqslant \liminf{}_k \int^* f_k\, d\mu$$

gilt.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, B. Böttcher
Wintersemester 2005/2006

Analysis III

Blatt 6

Abgabe : Montag, 5.12.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Stetigkeit und Nullmengen) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jede der sechs möglichen Implikationen zwischen den folgenden drei Aussagen, beweisen Sie die allgemein gültigen und finden Sie für die nicht allgemein gültigen Gegenbeispiele. (m)

(a) f ist $\lambda_{\mathbb{R}}$-fast überall stetig.

(b) Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f = g$ $\lambda_{\mathbb{R}}$-f.ü.

(c) Es gibt eine $\lambda_{\mathbb{R}}$-Nullmenge N , so dass $f|_{\mathbb{R}\setminus N}$ stetig ist.

Aufgabe 2 (Vertauschbarkeit von Integral und Reihe) Sei μ ein Radonintegral auf X und $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen $f_k : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_k| \, d\mu < \infty \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf X punktweise μ-f.ü. konvergiert.
Hinweis: Zeige zunächst, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty \quad \mu\text{-f.ü. auf } X \ .$$

(b) Definieren Sie

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right](x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) & \text{falls konvergent} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist mit

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \, d\mu \ .$$

Hinweis : Wenden Sie den Satz von Lebesgue mit einer geeigneten Majorante an.

Aufgabe 3 (Integration durch Taylorentwicklung) Berechnen Sie das folgende Integral durch Taylorentwicklung: (3)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx \ .$$

Aufgabe 4 (Die Eulersche Γ-Funktion ist $\mathcal{C}^{(\infty)}$) Zeigen Sie: $\Gamma \in \mathcal{C}^{(\infty)}(]0,\infty[)$. (4)

Analysis III

Blatt 7

Abgabe : Montag, 12.12.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(ax^2)\ dx$) Für alle $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ sei f_t definiert durch (4)

$$f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \exp\left(-e^{2i \cdot t} \cdot x^2\right) \ .$$

Zeigen Sie:

(a) $f_t \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$.

(b) $F'(t) = -i \cdot F(t)$.

(c) $F(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)\ dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{-i \cdot t}$. (m)

(d) Bestimmen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ die Integrale (m)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos\left(ax^2\right)\ dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \sin\left(ax^2\right)\ dx \ .$$

Aufgabe 2 (Die Cantormenge) Durch Induktion definiert man folgendermaßen eine Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen aus $[0,1]$: $C_0 := [0,1]$ und C_{k+1} bekommt man durch herausnehmen des offenen mittleren Drittels aus jedem der Intervalle von C_k . Daher ist C_k die disjunkte Vereinigung von 2^k abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-k} und insbesondere ist (4)

$$C_1 = [0,1] \setminus \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \ .$$

Zeigen Sie :

(a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$C_k = \bigcup_{(a_j)_{j=1,\ldots,k} \in \{0,2\}^k} \left[\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 3^{-j}, \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 3^{-j} + \frac{1}{3^k}\right] \ .$$

(b) Die *Cantormenge*

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

ist eine abgeschlossene Nullmenge.

(c) Die Abbildung

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \longrightarrow C : (a_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot 3^{-j}$$

ist eine Bijektion.

(d) C ist nicht abzählbar.

Aufgabe 3 (Die Identität $\Gamma'(1) = -\gamma$) Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Identität $\Gamma'(1) = -\gamma$ zu beweisen, wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist (s. Blatt 8). Zeigen Sie dazu: (5)

(a) Die Funktionen

$$f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \frac{1-e^{-t}}{t} \quad \text{und} \quad g : [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

sind Lebesgue-integrierbar, und es gilt:

$$\Gamma'(1) = -\int_0^1 f \, d\lambda + \int_1^\infty g \, d\lambda \; .$$

Hinweis : Formel aus der Vorlesung und partielle Integration.

(b)

$$\int_0^1 f \, d\lambda = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} \, dt$$

und

$$\int_1^\infty g \, d\lambda = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} \, dt \; .$$

Hinweis :

$$1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant t \quad \text{für alle } t \in]0,1[\text{ und } n \in \mathbb{N}^*$$

und

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \quad \text{für alle } t \in [1,n[\text{ und } n \in \mathbb{N}^* \; .$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} \, dt - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} \, dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \; .$$

Hinweis : Geeignetes Zusammenfassen der Integrale und endliche geometrische Summe.

(d) Folgern Sie schließlich:

$$\Gamma'(1) = -\gamma \; .$$

Bemerkung: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} > \Gamma(1) = 1 > \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (s. Forster, Analysis 1, S. 158 f.).

Analysis III

Blatt 8

Abgabe : Montag, 19.12.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eine nicht $\lambda_{\mathbb{R}}$-messbare Menge) (5)

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ definiert ist.

(b) Sei $A \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ein Repräsentantensystem, d.h. A enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element. Sei weiter

$$q : \mathbb{N} \longrightarrow [-1, 1] \cap \mathbb{Q} : k \longmapsto q_k$$

eine Bijektion. Man definiere $A_k := A + q_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Mengen A_k paarweise disjunkt sind mit

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \ .$$

(c) Folgern Sie, dass A nicht $\lambda_{\mathbb{R}}$-messbar ist.
Hinweis: Mit A wäre auch A_k $\lambda_{\mathbb{R}}$-integrierbar mit $\lambda_{\mathbb{R}}(A) = \lambda_{\mathbb{R}}(A_k)$.

Aufgabe 2 (Eine Anwendung des Integrabilitätskriteriums) Sei μ ein Radonintegral auf X und f eine μ-messbare Funktion, so dass $\{|f| > 0\}$ eine μ-integrierbare Menge ist. Zeigen Sie, dass f genau dann μ-integrierbar ist, wenn (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^* \{|f| \geqslant k\} < \infty \ .$$

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich zunächst die Mengen $\{|f| \geqslant k\}$, $k \geqslant 1$.

Aufgabe 3 (Young-, Hölder- und Minkowski-Ungleichung) Seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie: (6)

(a) Für $A, B \geqslant 0$ gilt:

$$A \cdot B \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \ .$$

(b)

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

Hinweis: Benutzen sie (a) mit $A = \frac{|f|}{\|f\|_p}$ und $B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$.

(c)

$$\|f +^{\bullet} g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

Hinweis: $|f +^{\bullet} g|^p = |f +^{\bullet} g| \cdot |f +^{\bullet} g|^{p-1}$ und benutzen sie (b).

Aufgabe 4 ($\mathbf{L}^p$-Konvergenz vs. punktweise Konvergenz) Für $k \in \mathbb{N}^*$ gibt es genau ein Paar $(m, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so dass $2^j + m = k$ und $0 \leqslant m < 2^j$. Man definiere (m)

$$f_k = 1_{[2^{-j}m, 2^{-j}(m+1)]} \ .$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k \geqslant 1}$ zwar in $\mathbf{L}^p\left(\lambda_{[0,1]}\right)$, aber nirgends auf $[0, 1]$ punktweise konvergiert. Geben Sie weiter eine Teilfolge an, die punktweise f.ü. konvergiert.

Hinweis: Versuchen Sie, die Folge f_k zu skizzieren.

Analysis III

Blatt 9

Abgabe : Montag, 9.1.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Fourierreihen von differenzierbaren Funktionen) Sei f stetig differenzierbar auf $[0,1]$ mit $f(0) = f(1)$. (4)

(a) Bestimmen Sie einen Zusammenhang zwischen $(e_k|\, f)$ und $(e_k\,|f')$.

(b) Zeigen Sie, dass $((e_k|\, f))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ gilt.

(c) Beweisen Sie, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert.

(d) **Lemma von Riemann-Lebesgue** Gilt (b) oder (c) auch wenn $f(0) \neq f(1)$ und wenn nicht was bleibt übrig ? (3⋆)

Aufgabe 2 (Fourierreihe und Parseval-Gleichung) Es sei (4)

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) & \phantom{\text{für }} x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie f .

(b) Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe. Welches Ergebnis folgt aus der Parseval-Gleichung?

Aufgabe 3 (Fourierreihen und die Berechnung von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$(m) indem Sie die Funktion

$$f(x) := x - \frac{1}{2} \text{ für } x \in [0,1]$$

in eine Fourierreihe entwickeln.

Aufgabe 4 ($\mathbf{L}^p$-Limiten von Folgen stetiger Funktionen) Seien μ ein Radonintegral auf X und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^b(X)$ eine Cauchyfolge in diesem Raum. Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{L}^p(\mu)$ konvergiert, zeigen Sie, dass der Grenzwert einen Repräsentanten besitzt, der eine stetige Funktion ist. (2)

Aufgabe 5 (Der Raum ℓ^p) Sei X ein diskreter Raum und $\#$ sei das Zählmaß auf X (vgl. Aufgabe 15). Definiere (4)

$$\ell^p(X) := \mathbf{L}^p(\#) \ .$$

(a) Bestimmen Sie die Norm von $\ell^p(X)$.

(b) Formulieren Sie die Hölder- und die Minkowski-Ungleichung in diesem Zusammenhang.

(c) Zeigen Sie, dass $\left(1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ eine Hilbertbasis von $\ell^2(X)$ ist. (2⋆)

(d) Formulieren Sie die Hölder- und die Minkowski-Ungleichung für den Fall das X endlich ist. (2⋆)

$n\star := n$ Weihnachts-Bonuspunkte.

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, B. Böttcher Wintersemester 2005/2006

Analysis III

Blatt 10

Abgabe : Montag, 16.1.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 ($\mathbf{L}^2$-Norm und Ableitung) Sei f stetig differenzierbar auf $[0,1]$ mit $f(0) = f(1)$, $\partial f \in \mathbf{L}^2([0,1])$ und $\int_0^1 f(x)\ dx = 0$. Zeigen Sie, dass gilt (5)

$$\|f\|_2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \|\partial f\|_2$$

und dass '=' gilt genau dann, wenn $f(x) = a \cdot \cos(2\pi x) + b \cdot \sin(2\pi x)$ für gewisse $a, b \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (zum Satz über sukzessive Integration) Es sei (m)

$$f :]0,1[\times]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto e^{-xy} - 2e^{-2xy} \ .$$

Zeigen Sie: Die iterierten Lebesgue-Integrale

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x,y)\ dy\ dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \int_0^1 f(x,y)\ dx\ dy$$

von f existieren und besitzen **unterschiedliche** Vorzeichen, wohingegen die von $|f|$ beide unendlich sind.

Aufgabe 3 (Berechnung von $\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$) Zeigen Sie: (5)

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Fubini und die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Aufgabe 4 (Iterierte Integrale und λ^2-Integrierbarkeit) Sei $f : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch (3)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die iterierten Integrale von f existieren und sind gleich, aber $f \notin \mathbf{L}^1\left(\lambda_{[-1,1]^2}\right)$.

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, B. Böttcher Wintersemester 2005/2006

Analysis III

Blatt 11

Abgabe : Montag, 23.1.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Absolute Stetigkeit von Maßen) Sei ν ein moderates Radonintegral und ρ eine ν-meßbare Funktion auf X . Falls ρ lokal ν-integrierbar ist, d.h. für jedes $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x , so daß $\int^* 1_U \cdot \rho \, d\nu < \infty$, so existiert ein Radon-Integral μ auf X mit (m)

$$\mu = \int \rho(x) \cdot \varepsilon_x \, d\nu(x) \ .$$

Man schreibt auch $\mu = \rho \cdot \nu$.

Zeigen Sie :

$$N \in \mathfrak{I}(\nu) \text{ und } \nu(N) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(N) = 0 \ .$$

Diese Eigenschaft nennt man *absolute Stetigkeit* von μ bzgl. ν . In Zeichen: $\mu \ll \nu$.

Aufgabe 2 (Doppelintegrale und Tonelli) Sei $\Delta := \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 \;\middle|\; x = y \right\}$. Zeigen Sie : (2)

Die charakteristische Funktion 1_Δ ist $\lambda_{[0,1]} \otimes \#_{[0,1]}$-meßbar und

$$\int_{[0,1]}^* \left(\int_{[0,1]}^* 1_\Delta(x,y) \, dx \right) d\#(y) \neq \int_{[0,1]}^* \left(\int_{[0,1]}^* 1_\Delta(x,y) \, d\#(y) \right) dx \ .$$

Warum ist dieses kein Widerspruch zur Aussage von Tonelli ?

Aufgabe 3 (Doppelintegrale und Fubini) Zeigen Sie, daß das Integral von (6)

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \sin(x) \cdot \frac{y^2}{1+y^2} \cdot e^{-xy}$$

bezüglich $\lambda_{\mathbb{R}_+^*} \times \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$ existiert und berechnen Sie es.

Aufgabe 4 (Diffeomorphismus mit Exponentialen) Gegeben sei die Funktion (5)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto (e^x + y, e^y + y) \ .$$

(a) Zeigen Sie : Φ ist stetig und injektiv.

(b) Bestimmen Sie das Bild unter Φ der Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, welche gegeben sind durch die Gleichungen

(i) $x = a$ für $a \in \mathbb{R}$.
(ii) $y = b$ für $b \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie $Y := \Phi(\mathbb{R}^2)$ und zeigen Sie, dass $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$ ein Diffeomorphismus ist.

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, B. Böttcher

Wintersemester 2005/2006

Analysis III

Blatt 12

Abgabe : Montag, 30.1.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Transformation in $\mathbb{R}^2$) Sei (m)

$$G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x,y > 0 \text{ und } x+y < 4 \right\} .$$

Berechnen Sie

$$\int_G \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \, d(x,y) \ .$$

Aufgabe 2 (Transformation in $\mathbb{R}^3$) Seien $f, g \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ mit $0 \leqslant f \leqslant g$ und (3)

$$A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(z) \leqslant x^2 + y^2 \leqslant g(z) \right\} .$$

Skizzieren Sie A und berechnen Sie

$$\lambda^3(A) = \pi \cdot \left(\int g \, d\lambda - \int f \, d\lambda \right) .$$

Warum ist A integrierbar ?

Aufgabe 3 (Faltung auf $\mathbf{L}^1(\lambda)$) (6)

(a) Seien $f, g \in \mathbf{L}^1(\lambda)$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$(x,y) \longmapsto f(y-x) \cdot g(x) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{aus} \quad \mathbf{L}^1\left(\lambda^2\right) \quad \text{ist.}$$

Folgern Sie: Für λ-fast alle y ist $f(y - \cdot) \cdot g \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ und dies definiert eine Funktion

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(\cdot - x) \cdot g(x) \, d\lambda(x) \in \mathbf{L}^1(\lambda)$$

mit

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \ .$$

(b) Sei $f := 1_{[-1,1]} \cdot |\mathrm{id}|^{-\frac{1}{2}}$ und

$$g := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \cdot f(\cdot - q_k) \ ,$$

wobei $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ ist. Zeigen Sie, dass $g \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ ist und

$$g * g(q) = \int^{\star} g(q-y) \cdot g(y) \, dy = \infty \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Q} \ .$$

Für welche x ist $g * g(x)$ endlich ?

Aufgabe 4 (Die Fläche zwischen verschobenen Exponentialen) Sei (4)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (e^x + y, e^y + x) \ .$$

Man nehme weiter $-\infty < a_1 < a_2 < \infty$ und $-\infty < b_1 < b_2 < \infty$. Sei $F = \Phi([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$ das Flächenstück, das von den Parameterkurven

$$y \longmapsto \Phi(a_j, y) \quad \text{und} \quad x \longrightarrow \Phi(x, b_j) \quad , j \in \{1, 2\} \ ,$$

eingeschlossen wird. Berechnen Sie die Fläche $\lambda^2(F)$ von F .

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, B. Böttcher
Wintersemester 2005/2006

Analysis III

Blatt 13

Abgabe : Montag, 6.2.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Diffeomorphismus mit Spiralen) Sei $a \in]0,\infty[$, (6)

$$S_a := \{(a\varphi\cos\varphi, a\varphi\sin\varphi) \mid \varphi \in [0,\infty[\}$$

sowie

$$D_a := \left\{ \left(r, \frac{r}{a} + \psi\right) \;\middle|\; r \in]0,\infty[\ ,\ \psi \in]0,2\pi[\right\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Psi : D_a \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus S_a : (r,\varphi) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

ein Diffeomorphismus ist.

(b) Sei $X := \{(\varphi,\vartheta) \in]0,\infty[\times]0,2\pi[\mid \varphi > \vartheta\}$. Folgern Sie, dass

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus S_a : (\varphi,\vartheta) \longmapsto (a(\varphi-\vartheta)\cos\varphi, a(\varphi-\vartheta)\sin\varphi)$$

ein Diffeomorphismus ist.

(c) Skizzieren Sie für $\varphi_1,\varphi_2 \in]0,\infty[$ und $\vartheta_0 \in]0,2\pi[$ mit $\vartheta_0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2$ die Menge

$$B = \Phi(]\varphi_1,\varphi_2[\times]0,\vartheta_0[) .$$

Berechnen Sie seine Fläche $\lambda^2(B)$.

Aufgabe 2 (Stetige Differenzierbarkeit auf offenen Mengen mit Rand) (m)

Beweisen Sie die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) im Hauptsatz 13.4.

Aufgabe 3 (Kurve mit Randpunkt) Sei $\widetilde{\gamma}$ die parametrisierte Kurve (4)

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \left(t^2-1, t^3-t\right)$$

und $\gamma := \widetilde{\gamma}_{|]-\infty,\sqrt{2}]}$ die Einschränkung.

(a) Skizzieren Sie $X := \gamma\left(\left]-\infty,\sqrt{2}\right]\right)$.

(b) Beweisen Sie, dass γ im Sinne der Definition 13.4.2 stetig differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $D\gamma(t)$ für jedes $t \in \left]-\infty,\sqrt{2}\right]$ injektiv ist.

(d) Ist γ eine reguläre Parametrisierung ?

Aufgabe 4 (Das Ellipsoid) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, sowie (4)

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} .$$

(a) Finden Sie eine reguläre Parametrisierung für $E \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$, sowie möglichst wenige weitere lokale reguläre Parametrisierungen von E , welche zusammen das ganze Ellipsoid E überdecken.

(b) Finden Sie eine Parametrisierung von $E \cap \left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*\right)$ der Form

$$(x, y) \longmapsto (x, y, g(x, y))$$

mit einer stetig differenzierbaren Abbildung g . Bestimmen Sie möglichst wenige weitere Parametrisierungen ähnlicher Form, welche zusammen das ganze Ellipsoid E überdecken.

Hinweis : Die weiteren Parametrisierungen erhalten Sie jeweils durch geeignete lineare Transformationen.

Analysis III

Blatt 14

Abgabe : Montag, 13.2.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Der Torus) Seien $0 < r < R$ und (10)

$\Psi : [0, r] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (s, \varphi, \vartheta) \longmapsto (\cos\varphi \cdot (R + s \cdot \cos\vartheta), \sin\varphi \cdot (R + s \cdot \cos\vartheta), s \cdot \sin\vartheta)$.

Man definiert $D := \Psi([0, r] \times \mathbb{R}^2)$. $\mathbb{T}^2 := \partial D$ nennt man den *Torus* und D° ist das *Innere des Torus* .

(a) Zeigen Sie: $\Phi(\varphi, \vartheta) := \Psi(r, \varphi, \vartheta)$ ist auf $]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ eine lokale reguläre Parametrisierung von $\mathbb{T}^2$.

(b) Bestimmen Sie eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{T}^2 = \{F = 0\}$ und $\operatorname{grad} F \neq 0$ auf $\mathbb{T}^2$.

(c) Bestimmen eine stetig differenzierbare Funktion $\delta : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $D = \{\delta \leqslant 0\}$ und $\operatorname{grad} \delta \neq 0$ auf D .

(d) Zeigen Sie: D ist eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\partial D = \mathbb{T}^2$.

(e) Ist $\mathbb{T}^2$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(f) Überlegen Sie, wieviele lokale reguläre Parametrisierungen nötig sind, um $\mathbb{T}^2$ zu überdecken. Geben Sie affine Transformationen an, mit Hilfe derer Sie aus Φ die benötigten Parametrisierungen konstruieren können.

(g) Wieviele lokale differenzierbare Parametrisierungen *als Graph* sind nötig, um $\mathbb{T}^2$ zu überdecken?

(h) Sei $t \in \mathbb{T}^2$. Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{\mathbb{T}^2}(t)$.
Hinweis : Welche Dimension hat der Tangentialraum? Wenden Sie Hauptsatz 13.7 an, um eine Basis von $T_{\mathbb{T}^2}(t)$ zu bestimmen!

(i) Bestimmen Sie für $t \in \mathbb{T}^2$ die äußere Normale $\mathfrak{n}(t)$ an D im Punkte t .

Aufgabe 2 (Rotationskörper und Oberflächenmaß) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $F : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ stetig differenzierbar und (5)

$$X := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in I \ , \ y^2 + z^2 \leqslant F(x)^2\right\} .$$

(a) Finden Sie jeweils eine lokale reguläre Parametrisierung von X und ∂X .

(b) Bestimmen Sie $\lambda_{\partial X}(\partial X)$.

Aufgabe 3 (Anwendung der Greenformel) Zeigen sie: (m)

(a) Die Funktion $\frac{1}{|\mathrm{id}|^s}$ ist in $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ genau dann wenn $s < n$.

(b) Für alle $s < n-2$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int \Delta\varphi \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = s\,(s-n+2) \cdot \int \varphi \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{s+2}} - s \cdot \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cdot \varphi\,(0)$$

und

$$\int \Delta\varphi \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^{n-2}} = 0\ .$$

Hinweis : HS 17.7 und $\int \Delta\varphi \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{B}^n(r) \setminus \mathbb{B}^n(\varepsilon)} \Delta\varphi \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s}$