Kapitel 10

VERTEILUNGEN

Fassung vom 13. Februar 2006

10.1 Zufallsvariable

Häufig wird statt des Ergebnisses $\omega \in \Omega$ eines Zufalls-Experiments eine zugeordnete Zahl $X(\omega) \in \mathbb{R}$ angegeben, z.B. sei

$$\Omega : \text{Stichprobenraum einer Personengruppe}$$

und für $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) \ : \text{Alter oder Körpergröße.}$$

BEISPIEL Wir betrachten nochmals das unabhängiges Dreistufen-Experiment aus Beispiel 9.4.3. Auf dem Stichprobenraum

$$\Omega = \{+++, ++-, +-+, +--, -++, -+-, --+, ---\}$$

definiert man für $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) := k \quad \text{falls } Rh_- \ k\text{-mal auftritt.}$$

Diese Funktion erzeugt eine Einteilung von Ω in 4 Klassen

$$\{X = k\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\} \ ,$$

für $k = 0, 1, 2, 3$, nämlich die Ereignisse, dass Rh_- gerade k-mal auftritt.

Die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) := P(\{X = k\})$$

sind für $k = 3$ und $k = 2$ schon berechnet. Für $k = 1$ erhält man

$$P(X = 1) = P(++-) + P(+-+) + P(-++) = 3 \cdot (0.85)^2 \cdot 0.15 \simeq 0.325 \ ,$$

und insgesamt

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.614	0.325	0.057	0.003

.

Diese Zahlen kann man auch in einem *Histogramm* (oder *Balkendiagramm*) veranschaulichen.

DEFINITION Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Wahrscheinlichkeitsfunktion P . Eine Funktion

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto X(\omega)$$

heißt *Zufallsvariable* . Die Funktion

$$P_X : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto P_X(x) := P(X = x) := P(\{X = x\}) \ ,$$

wobei

$$\{X = x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \ ,$$

heißt *Verteilung* von X . Die Zahl $P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß X den Wert x annimmt.

BEMERKUNG 1 Bei vielen Berechnungen wird nur die Verteilung von X und nicht die Wahrscheinlichkeiten auf Ω benötigt.

BEMERKUNG 2 Die Menge $X(\omega)$ ist mit der Verteilung P_X wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für die Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X(\omega)$ gilt

$$P_X(\{x_1, \ldots, x_n\}) = P_X\left(\bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\}\right) = \sum_{j=1}^{n} P_X(x_j) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_j) \ ,$$

da für $k \neq l$ die Teilmenge $\{x_k\}$ und $\{x_l\}$ disjunkt sind.

10.2 Erwartungswert und Varianz

DEFINITION Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit der Verteilung P_X und den Werten $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Man definiert

$$p_j := P_X(x_j) = P(X = x_j) \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Die Zahlen

$$\mu := E(X) := \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j \ ,$$

$$Var(X) := \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot (x_j - \mu)^2$$

und

$$\sigma(X) := \sqrt{Var(X)}$$

heißen *Erwartungswert* , *Varianz* und *Standard-Abweichung* von X .

Nimmt die Zufallsvariable unendlich viele Werte an, so werden diese Größen entsprechend durch unendliche Reihen definiert.

Diese Zahlen kann man folgendermaßen interpretieren : Der Erwartungswert gibt den Mittelwert der Werte von X bei häufiger Wiederholung des Experiments. Die Varianz oder die Standard-Abweichung ist ein Maß für die Streuung um den Erwartungswert.

BEISPIEL Wir betrachten nochmals das unabhängige Dreistufen-Experiment in Beispiel 10.1. Es gilt

$$E(X) = 0.614 \cdot 0 + 0.326 \cdot 1 + 0.057 \cdot 2 + 0.003 \cdot 3 = 0.449 \simeq 0.45 \ .$$

Die exakte Rechnung ergibt mit $p = 0.15$ und $q = 0.85$

$$E(X) = q^3 \cdot 0 + 3 \cdot q^2 \cdot p \cdot 1 + 3 \cdot q \cdot p^2 \cdot 2 + p^3 \cdot 3 =$$

$$= 3 \cdot p(q^2 + 2pq + q^2) = 3 \cdot p(q + p)^2 =$$

$$= 3 \cdot p \cdot 1 = 0.45 \ .$$

Für die Varianz erhält man

$$Var(X) =$$

$$= 0.614 \cdot (0 - 0.45)^2 + 0.326 \cdot (1 - 0.45)^2 + 0.057 \cdot (2 - 0.45)^2 + 0.003 \cdot (3 - 0.45)^2 \simeq$$

$$\simeq 0.38 \ ,$$

und ähnlich wie oben die exakte Formel

$$Var(X) = 3pq = 0,3825 \ .$$

Viele Zufallsvariablen haben als Verteilung eine von vier *Standard-Verteilungen* :

Gleich- , Binomial- , Poisson- , Normal-Verteilung.

Beispiele zur Gleichverteilung finden sich in den Beispielen 9.2.1 und 9.2.3 , die übrigen Verteilungen werden in den nächsten Abschnitten behandelt.

10.3 Binomial-Verteilung

DEFINITION 1 Ein unabhängiges n-Stufen-Experiment, bei dem in jeder Stufe der gleiche Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \left\{A, \bar{A}\right\}$ auftritt, heißt ein *n-stufiges Bernoulli-Experiment* .

Der Stichprobenraum wird mit Ω^n bezeichnet. Er besitzt 2^n Elemente. Jedes Element $\omega \in \Omega^n$ ist ein "Wort" der Länge n mit den Buchstaben A und $\bar{A}$, das man im Baumdiagramm als Zweig darstellen kann.

Mit $p := P(A)$ und $q := P\left(\bar{A}\right)$ ($= 1 - p$) werden die elementaren Wahrscheinlichkeiten bezeichnet, und mit X die Zufallsvariable auf Ω^n , die das Auftreten von A in ω zählt, d.h.

$$X(\omega) = k \quad \text{falls } A \text{ in } \omega \;\; k\text{-mal auftritt.}$$

DEFINITION 2 Die Verteilung

$$b_{n,p} : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{R} : k \longmapsto b_{n,p}(k) := P(X = k)$$

heißt die *Binomial-Verteilung* .

SATZ *Für die Binomialverteilung gilt*

$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \ .$$

Ist Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, die binomialverteilt ist, so gilt

$$E(Y) = n \cdot p \quad \textit{und} \quad Var(Y) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p) \ .$$

Man vergleiche dazu die Berechnungen in Beispiel 10.2 .

BEISPIEL Eine Bevölkerungsgruppe habe zu 3 % die Erbanlage E . Es werden 100 Personen zufällig gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau 2 Personen die Erbanlage E haben ? Es gilt

$$p = 0.03 \quad , \quad q = 0.97$$

und

$$P(X = 2) = b_{100,0.03}(2) = \binom{100}{2} \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^{98} \simeq 0.225 \ .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 2 Personen die Erbanlage E haben ? Man betrachte das Gegenereignis $\{X < 2\}$: Es gilt

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \binom{100}{0} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^{99} \simeq 0.195 \ ,$$

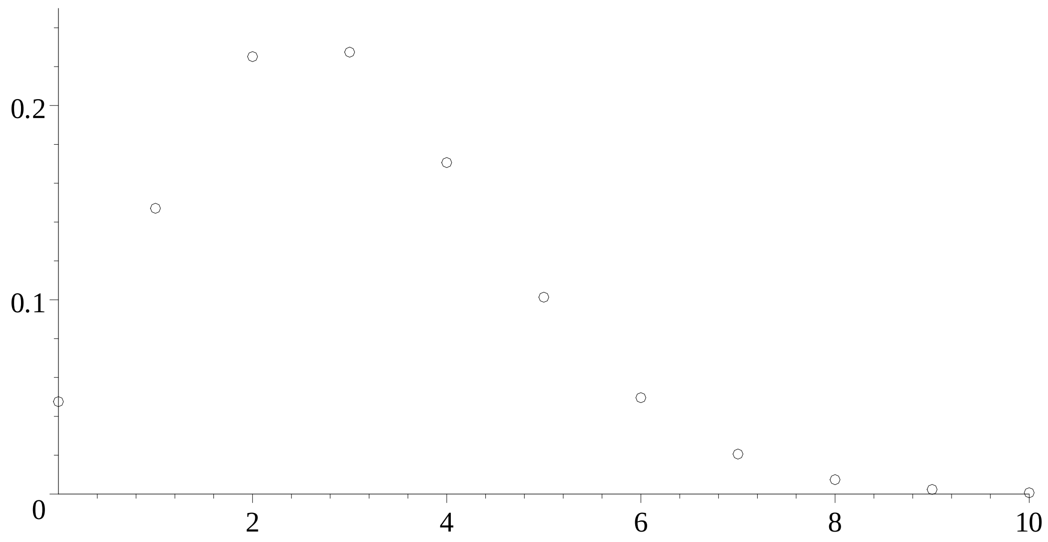
also

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) \simeq 0.805 \ .$$

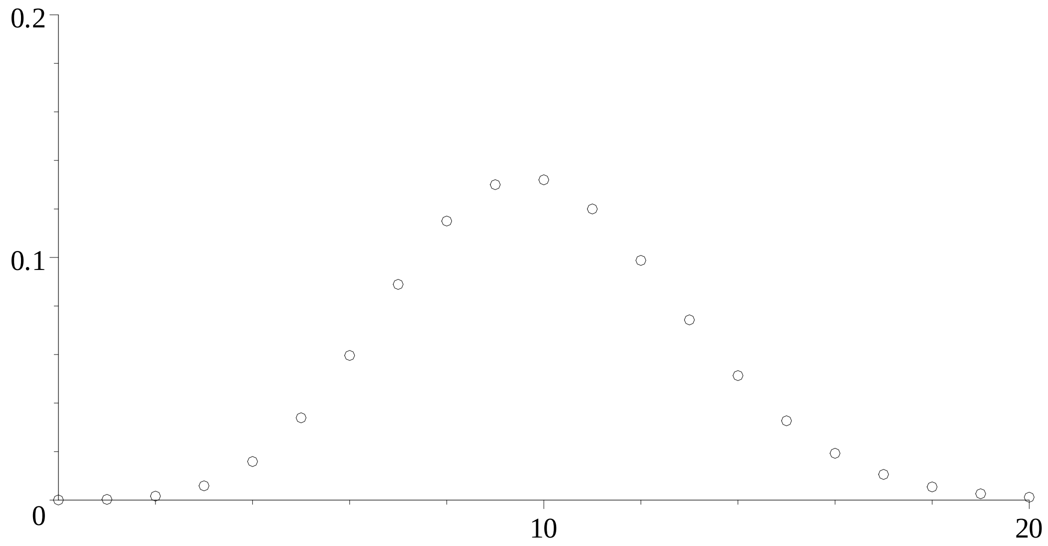
Der Erwartungswert von X ist

$$E(X) = 100 \cdot 0.03 = 3 \ ,$$

d.h. im Mittel gibt es 3 Personen, die die Erbanlage E haben, wenn man mehrmals eine Stichprobe von 100 Personen auswählt.



$n = 100$ und $p = 0.03$



$n = 100$ und $p = 0.1$

10.4 Poisson-Verteilung

BEISPIEL 1 Ein radioaktives Präparat sendet α-Teilchen (Heliumionen) aus und wir wählen eine feste und genügeng große Beobachtungszeit, die als Einheit dienen soll. Sei m die mittlere Anzahl gesendeter α-Teilchen pro Einheit und für $n \in \mathbb{N}$ sei das Einheitsintervall $[0,1]$ in n Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ unterteilt. Ist n viel größer als m ($n \gg m$) , so können wir annehmen, daß in jedem dieser Intervalle höchstens ein α-Teilchen gesendet wurde. Da es m solchen Intervalle gibt, in denen genau ein α-Teilchen gesendet wurde, ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Zeitintervall der Länge $\frac{1}{n}$ ein Teilchen ausgesandt wird, gleich $\frac{m}{n}$.

Da diese α-Teilchen voneinander unabhängig ausgesandt werden, lässt sich demnach das Aussenden von α-Teilchen im Einheitsintervall $[0,1]$ approximativ als n-stufiges Bernoulli-Experiment interpretieren. Die Wahrscheinlichkeit, daß k Teilchen im Einheitsintervall $[0,1]$ ausgesandt werden, ist somit nach Satz 10.3 approximativ durch

$$P(X=k) \simeq b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}$$

gegeben, und zwar umso genauer, je größer $n \in \mathbb{N}$ wird.

Da

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} = \frac{m^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{m}{n}\right)^k} \cdot \frac{(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{n^k} =$$

$$= \frac{m^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1}{\left(1-\frac{m}{n}\right)^k}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{m}{n}\right)^n = e^{-m}$$

gilt damit die von D. Poisson stammende Aussage :

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,\frac{m}{n}}(k) = \frac{m^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{m}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1}{\left(1-\frac{m}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m} \ . \qquad (*)$$

DEFINITION Die Verteilung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : k \longmapsto p_m(k) := \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m}$$

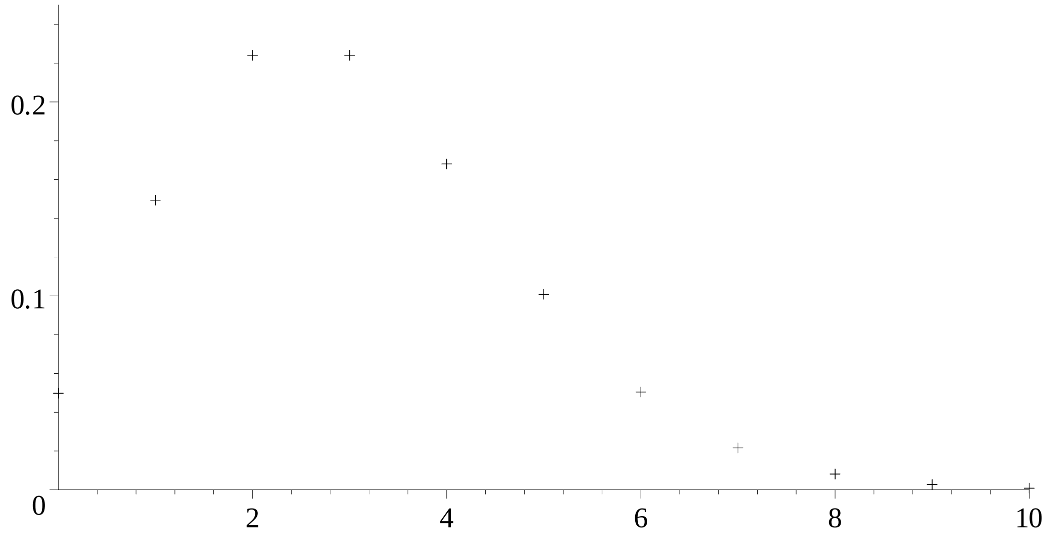
heißt *Poisson-Verteilung* .

In obigem Beispiel erhält man z.B. für $m = 10$

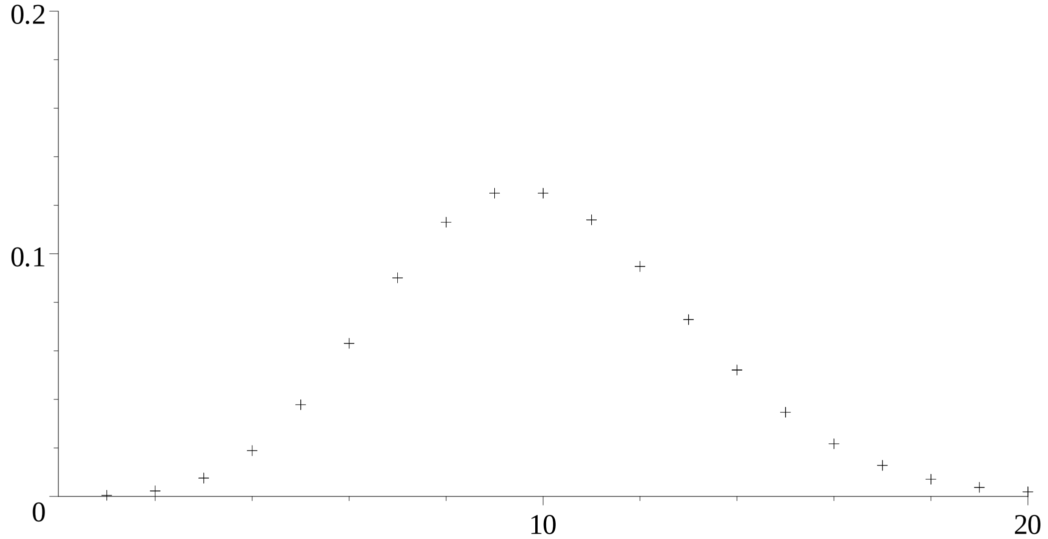
$$P(X=6) = p_{10}(6) = \frac{10^6}{6!} \cdot e^{-10} = 0.063055\ldots \simeq 6.3\%$$

und

$$P(X=10) = p_{10}(10) = \frac{10^{10}}{10!} \cdot e^{-10} \simeq 12.5\% \; .$$



$m = 3$



$m = 10$

SATZ *Ist Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$, die poissonverteilt ist, d.h.*

$$P(Y=k) = p_m(k) \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \; .$$

so gilt

$$E(Y) = m \quad \textit{und} \quad Var(Y) = m \; .$$

BEMERKUNG 1 Mit denselben Überlegungen wie in dem Eingangsbeispiel erhält man, dass auch zufällig auf einer Fläche verteilte Partikel – z.B. vom Wind verteilte Samenkörner oder Blutkörperchen auf einem Objektträger – poissonverteilt sind.

BEISPIEL 2 Bei zufällig auf einer Fläche verteilten Partikeln soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass auf einem Einheitsquadrat Q mindestens ein Partikel liegt.

Statt $P(X \geqslant 1)$ ist es hier wesentlich günstiger, das Gegenereignis $P(X < 1)$ zu betrachten, man erhält damit

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) =$$

$$= 1 - \frac{m^0}{0!} e^{-m} = 1 - e^{-m} \; .$$

Um m zu ermitteln, muss ein Durchschnittswert durch Auszählen aller Partikel auf einer größeren Fläche berechnet werden. Für $m = 1$ erhält man dann z.B.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - e^{-1} \simeq 0.63 \; .$$

Ungefähr 63% aller Quadrate mit derselben Fläche wie Q enthalten zumindest einen Partikel.

BEMERKUNG 2 Für die obige Formel $(*)$ gilt folgende präzisere Aussage

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_{n,p}(k) - p_{n \cdot p}(k)| \leqslant 2n \cdot p^2 \; .$$

Ist $2n \cdot p^2 \ll 1$ (z.B. $n = 100$ und $p = 2\% = 0.02$, also $2n \cdot p^2 = 200 \cdot 0.02^2 = 0.08 \ll 1$), so kann in sehr guter Näherung die Binomial-Verteilung $b_{n,p}(k)$ durch die Poisson-Verteilung $p_{n \cdot p}(k)$ ersetzt werden. Letztere ist wesentlich einfacher zu berechnen.

Prof. Dr. C. Portenier
Prof. Dr. W. Gromes