Kapitel 2

FUNKTIONEN

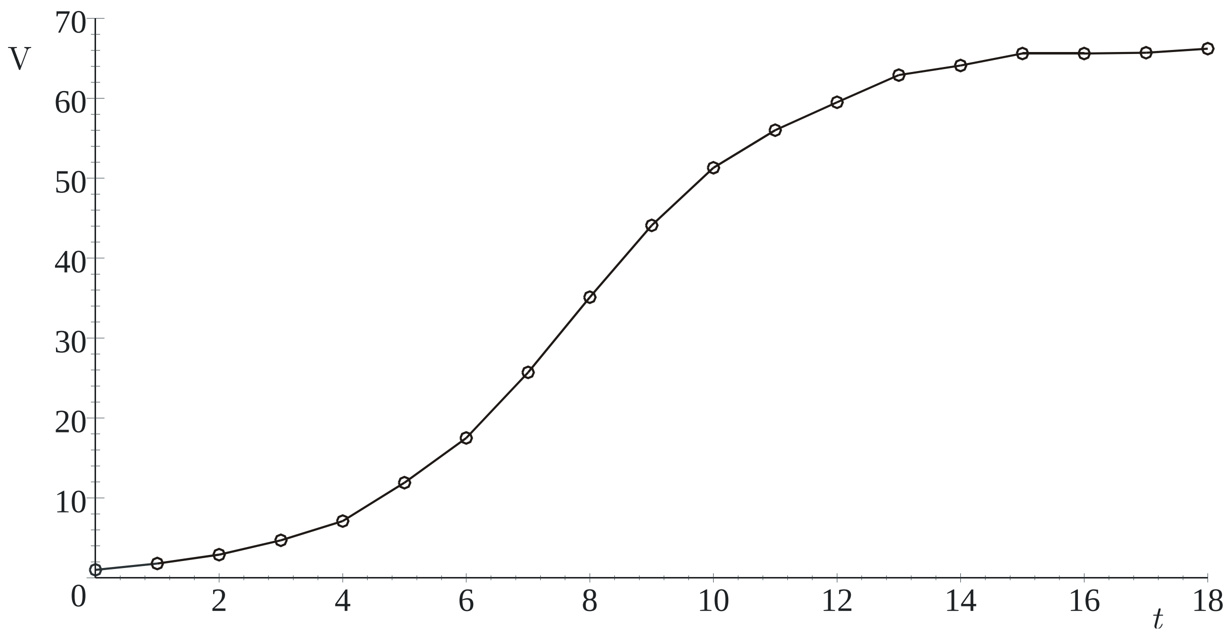
Fassung vom 3. Dezember 2005

2.1 Der Funktionsbegriff

BEISPIEL 1 Carlson hat 1913 die Vermehrung von Hefezellen in einer Gärflüssigkeit untersucht. So ein Experiment beschreibt folgende Tabelle, wobei t die Zeit in Stunden und $V(t)$ das Verhältniss des Volumenteiles zur Zeit t zur Anfangsvolumenteil der Hefe ist:

t	V
0	1
1	1.8
2	2.9
3	4.7
4	7.1
5	11.9
6	17.5
7	25.7
8	35.1
9	44.1

t	V
10	51.3
11	56.0
12	59.5
13	62.9
14	64.1
15	65.6
16	65.6
17	65.7
18	66.2
19	?

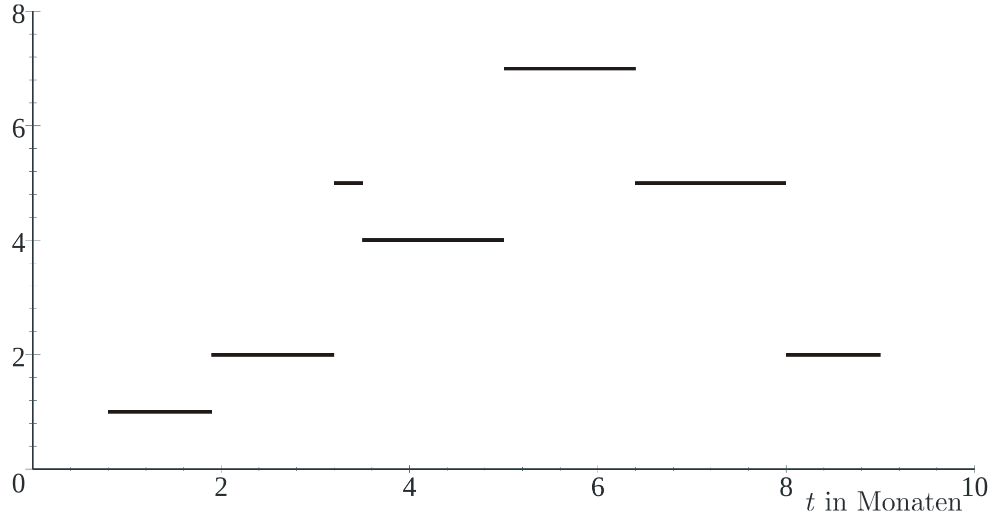


Wir werden dieses Beispiel in 3.4 und 8.4 weiter behandeln.

Zu jeder Zeit t zwischen 0 und dem Abbruch des Experimentes gehört natürlich ein eindeutiger Wert für V und so ist es ganz natürlich, dass in der graphischen Veranschaulichung in einem rechtwinkligem Koordinatensystem außer den Messwerten auch für die übrigen Zeiten

t ein geschätzter Wert für V eingetragen ist. Im Allgemeinen ist es keineswegs selbstverständlich, daß dabei eine durchzogene Linie die qualitativ richtige Beschreibung wiedergibt. Dazu ein weiteres Beispiel:

BEISPIEL 2 Studenten in einer Eisdiele:



Gemeinsam an diesen Beispielen ist, daß eine Größe (Konzentration, Anzahl) eindeutig von einer anderen Größe (Zeit) abhängt.Genauer:

DEFINITION Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) \ ,$$

die jeder Zahl x aus einer Teilmenge D_f von $\mathbb{R}$, der *Definitionsmenge* , eine und nur eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet. Dieser Wert $f(x)$ heißt *Funktionswert* von f im Punkte x . Die Menge $W_f := \{f(x) \mid x \in D_f\}$ aller Funktionswerte von f heißt *Wertemenge* .

Eine Funktion wird meistens durch eine Funktionsgleichung definiert, d.h $f(x)$ kann aus einer Formel und der Angabe von x berechnet werden.

BEMERKUNG Funktionale Abhängigkeiten sind zentral in den Naturwissenschaften. Ihre mathematische Beschreibung erfolgt in einem Modell mit einem bestimmten Erfahrungsbereich, der i.a. eine echte Teilmenge des Definitionsbereichs der Funktion ist. Funktionen sind manchmal als Standardfunktionen direkt angebbar, manchmal sind sie erst als Lösungen von mathematischer Beschreibung der Gesätzmäßigkeiten, z.B. ein Wachstumsgesetz, die den Naturvorgängen zugrunde liegen, beschreibbar. Wir werden Klassen von solchen Standardfunktionen in den nächsten beiden Kapitel betrachten und werden dann Differentialgleichungen aufstellen und zu lösen suchen. Wichtig sind noch graphische Methoden, die direkt aus einer Messreihe auf zugeordnete Funktionen schließen lassen (vgl. Beispiel 1, Vermehrung von Hefezellen). Vom Graphen sind dadurch endlich viele Punkte in der Ebene gegeben, manchmal interpoliert man zwischen diesen Werten um ein kontinuierliches Modell zu bekommen. Dabei wird man - durch Variablentransformationen - die Darstellung zu linearen Funktionen zurückzuführen. Auf diese Weise lassen sich z.B. auch der Einfluß der unvermeidbaren Meßfehler verkleinern.

In beiden Fällen wird i.a. eine möglichst einfache Funktionsgleichung gesucht, die das Bildungsgesetz bzw. die Meßreihe gut approximiert.

Es gibt aber auch Größen, die nicht funktional voneinander abhängen, wie die menschliche Augenfarbe von der Windgeschwindigkeit.

BEISPIEL 3 Die Funktion "Quadrieren"

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

kann auch durch

$$D_f := \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x) := x^2$$

oder kürzer durch

$$f(x) := x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

angeben weden. Es gilt

$$W_f = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\} \ .$$

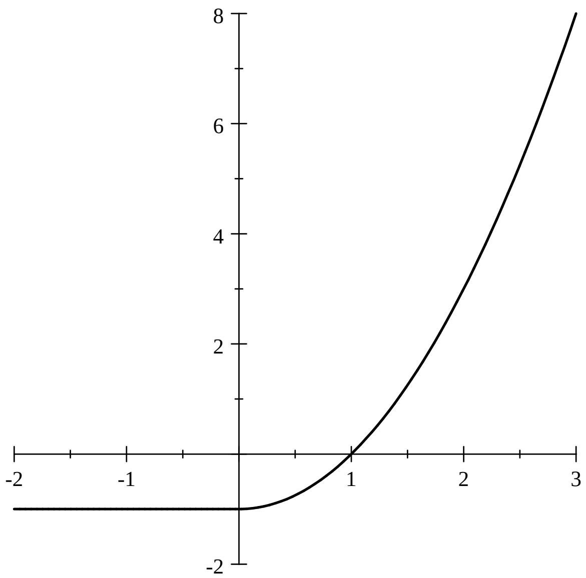
BEISPIEL 4 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x < 0 \\ -1 + x^2 & \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

wird auch durch $D_f := \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x < 0 \\ -1 + x^2 & \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

gegeben. Es gilt $W_f = [-1, \infty[\ := \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.



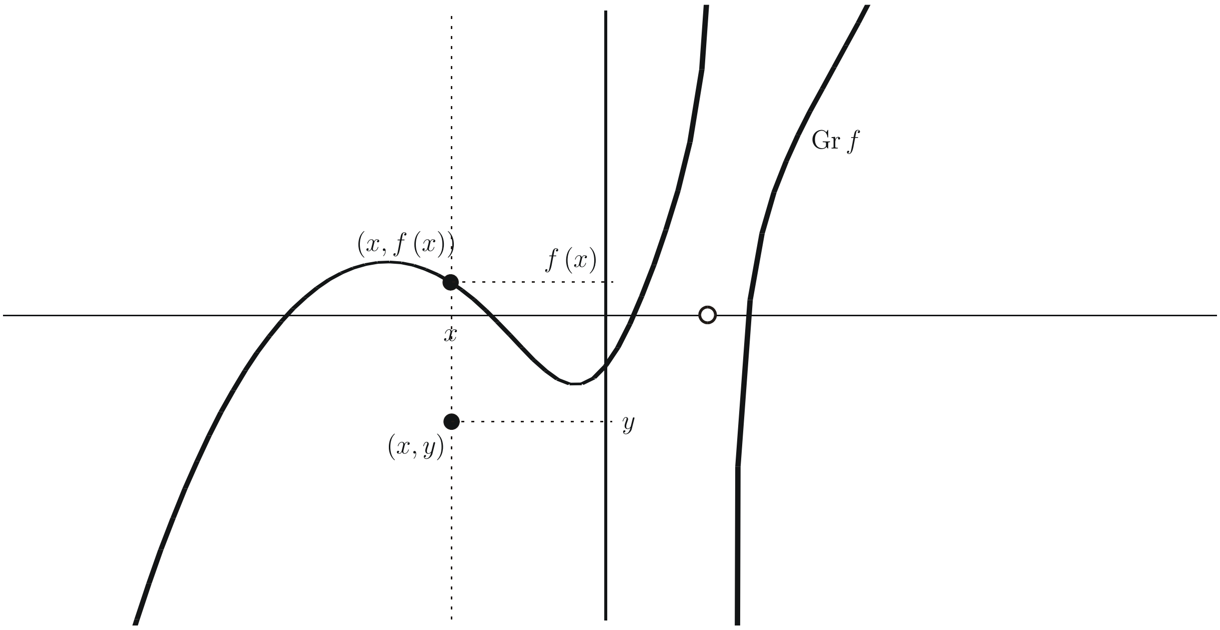
Eine Funktion f kann man durch ihren *Graph* $\operatorname{Gr} f$ darstellen. Dies ist die Menge aller Punkte in der Ebene mit den Koordinaten $(x, f(x))$ für $x \in D_f$, d.h.

$$\operatorname{Gr} f := \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in D_f \quad \text{und} \quad y = f(x) \right\} \ .$$

Die Gleichung $y = f(x)$ wird als *Gleichung des Graphen* oder als *Funktionsgleichung* von f bezeichnet.

Es gilt also

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}\, f \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x) \ .$$



2.2 Einfache Klassen von Funktionen

Affine Funktionen

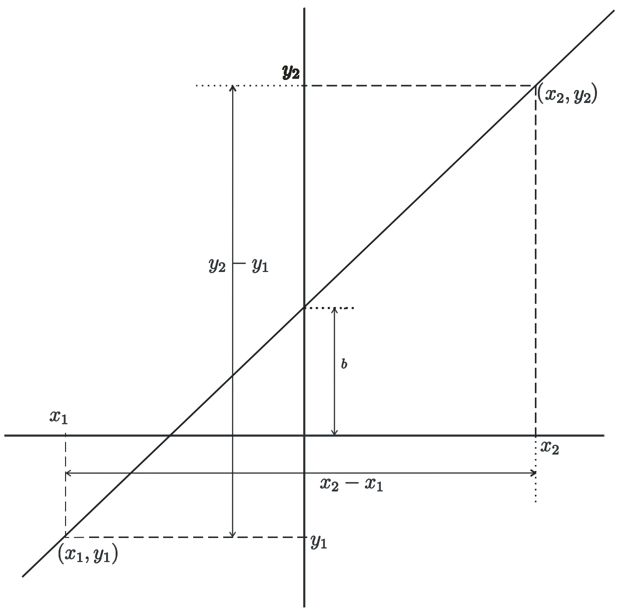
Diese Funktionen sind durch eine Funktionsgleichung der Gestalt

$$D_f := \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x) := c \cdot x + b$$

für Konstanten $c, b \in \mathbb{R}$ bestimmt. Der Graph ist eine Gerade und wird durch zwei Punkte in der Ebene (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$ festgelegt. Die Steigung c und der Abszissenabschnitt b sind durch

$$c := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad b := \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1} = y_j - c \cdot x_j \quad \text{für} \quad j = 1, 2$$

gegeben.



Ist speziell $b = 0$, d.h.

$$f(x) = c \cdot x \ ,$$

so heißt $f(x)$ *proportional zu* x mit Proportionalitätskonstante c . Der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung und wird durch einen Punkt (x_1, y_1) mit $x_1 \neq 0$ in der Ebene festgelegt. Für die Steigung gilt

$$c = \frac{y_1}{x_1} \ .$$

So eine Funktion nennt man *linear* .

BEISPIEL 1 Der Wasserdruck p ist eine affine Funktion der Eintauchtiefe d . Dabei gilt in Meerwasser $p = c \cdot d + 1$ mit $c = 0,094\,\text{bar} \cdot \text{m}^{-1}$. Damit lebt ein Tiefseefisch in $1000\,\text{m}$ Tiefe unter einem Wasserdruck von $95\,\text{bar}$, also dem 95-fachem des atmosphärischen Druckes.

BEISPIEL 2 Die Stoffmenge n einer Lösung ist proportional zum Volumen V

$$n(V) = c \cdot V \ ,$$

wobei c die Konzentration ist.

BEISPIEL 3 Bei der gleichförmigen Bewegung ist die zurückgelegte Strecke s proportional zur Zeit t

$$s(t) = v \cdot t \ ,$$

wobei v die Geschwindigkeit ist.

Potenzfunktionen

Dieses sind Funktionen der Form

$$f(x) := c \cdot x^n \quad , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

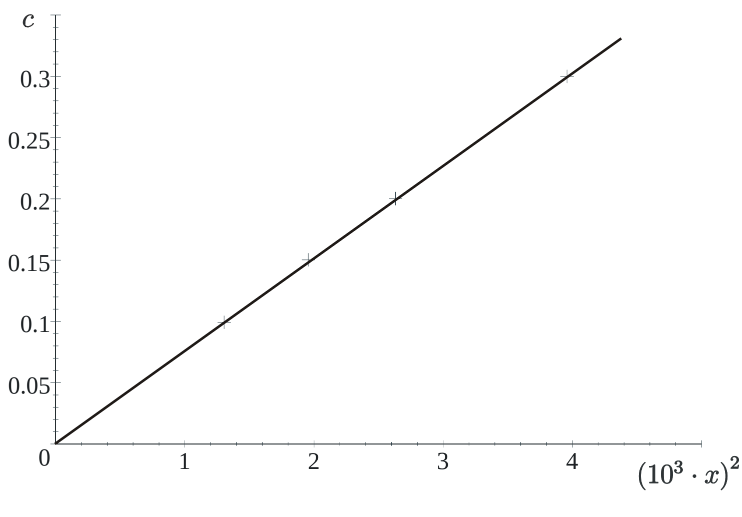
wobei $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ ist. Da $f(x)$ zu x^n proportional mit Proportionalitätskonstante c ist, liegen die Punkte $(x^n, f(x))$ auf einer Geraden durch den Ursprung mit der Steigung c . Dies liefert einen graphischen Test, bei dem man die Konstante c ablesen kann.

BEISPIEL 4 Dissoziation von Propionsäure $C_3H_6O_2$ (Konservierungsstoff E 280). Sei c die Konzentration der Säure und x die Konzentration der H_3O^+-Ionen. Man misst folgende Abhängigheit :

c	0.1	0.15	0.2	0.3
$10^3 \cdot x$	1.15	1.40	1.62	1.99
$(10^3 \cdot x)^2$	1.32	1.96	2.62	3.96

Anhand dieser Zahlen vermutet man, daß c zu x^2 proportional ist, d.h.

$$c(x) = a \cdot x^2 \ .$$



Polynome

Diese Funktionen entstehen durch Addition aus Potenzfunktionen

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist, sagt man daß n der Grad des Polynoms ist.

Quadratische Funktionen

Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{mit } a \neq 0$$

ist eine *Parabel* .

Lösung der quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \ .$$

Die (zwei) Lösungen in $\mathbb{R}$ sind

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{falls} \quad b^2 - 4ac \geqslant 0$$

Falls $b^2 - 4ac < 0$ treten "komplexen Zahlen" auf.

Man erhält diese Lösungsformel durch äquivalente Umformung der quadratischen Gleichung mittels *quadratischer Ergänzung* :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

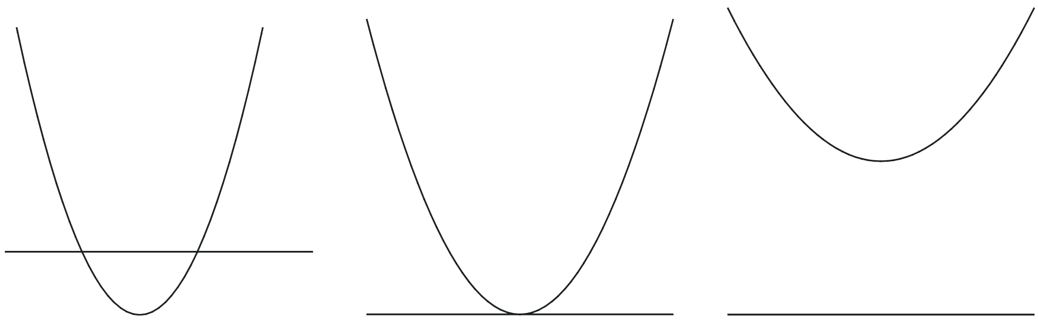
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Daraus folgt, daß die quadratische Gleichung für $b^2 - 4ac > 0$ zwei, für $b^2 - 4ac = 0$ eine und für $b^2 - 4ac < 0$ keine Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

Für $a > 0$ erhält man folgende Graphen der quadratischen Funktion f :



$b^2 - 4ac > 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac = 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac < 0$

Man kann auch

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

schreiben. Aus dieser Darstellung liest man alle wesentlichen Eigenschaften von f ab: Für $x = -\frac{b}{2a}$ ist f minimal, d.h. $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ ist der *Scheitelpunkt der Parabel* . f ist zwischen den Nullstellen x_- und x_+ negativ :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \leqslant q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_- \leqslant x \leqslant x_+\} =: [x_-, x_+] \,.$$

Man sieht auch, daß man den Graphen von dieser Funktion aus dem von $x \longmapsto ax^2$ durch Verschiebung um $\frac{-b}{2a}$ in x-Richtung und um $c - \frac{b^2}{4a}$ in y-Richtung erhält.

Rationale Funktionen

Diese Funktionen entstehen durch Quotientenbildung von Polynomen

$$\frac{P}{Q} : \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \,,$$

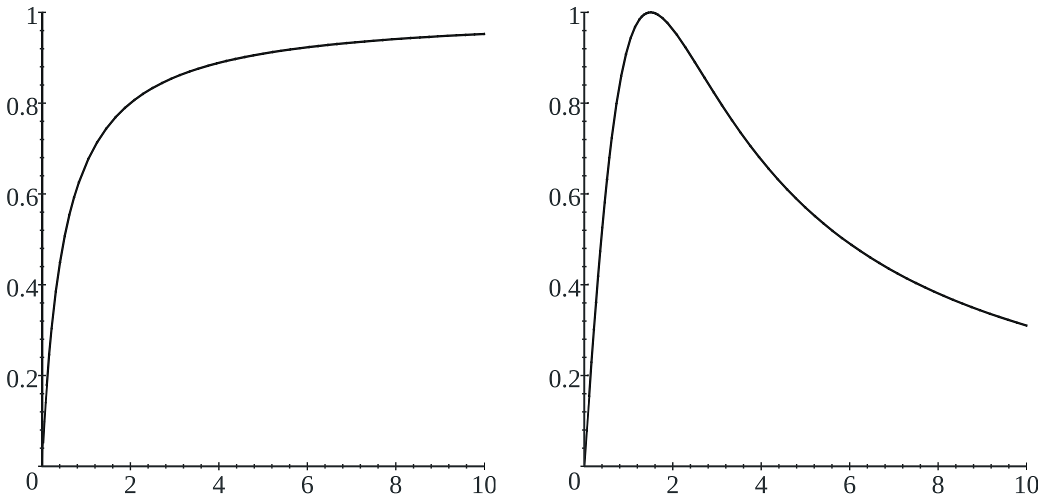
wobei P und Q Polynome sind.

BEISPIEL 5 Bei Enzymreaktionen wird ein Substrat X in ein Produkt P mit Hilfe eines Enzyms E umgewandelt, z.B. eine Gärflüssigkeit in Alkohol durch Hefe. Für die Geschwindigkeit v des Abbaus von X in Abhängigkeit der Substratkonzentration x (bei konstanter Enzymkonzentration) gilt nach Michaelis und Menten (1913)

$$v(x) = \frac{Ax}{k + x + Rx^2} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}_+ \,,$$

wobei $A > 0$ die maximal mögliche Abbaugeschwindigkeit, $k > 0$ die Dissoziationskonstante und $R \geqslant 0$ den Grad der Hemmung durch Substratüberschuß angibt. Bei vielen Reaktionen ist R klein gegen 1 , $R \ll 1$ und kann vernachlässigt werden. Dies bedeutet, daß die Wirkung des Enzyms nur wenig von dem Mengenverhältnis Enzym zu Substrat abhängt.

Man erhält z.B. folgende Graphen :



$A = 1$, $k = 0.5$ und $R = 0$ $\qquad$ $A = 13$, $k = 9$ und $R = 4$

Betragsfunktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leqslant x \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Der Betrag $|x|$ von x gibt den Abstand in $\mathbb{R}$ des Punktes x zum Nullpunkt an.

Umgekehrte Proportionalität.

Für $c \in \mathbb{R}$ betrachtet man die Funktion

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c \cdot \frac{1}{x}$$

Man sagt, daß $f(x)$ *umgekehrt proportional* zu x mit *Proportionalitätskonstante* c ist. Der Graph von f ist durch

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = \frac{c}{x}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \;\middle|\; x \cdot y = c\right\}$$

gegeben. Es ist eine *Hyperbel* .

BEISPIEL 6 Bei einem idealen Gas von n mol ist der Druck p proportional zu n , zur Temperatur T und umgekehrt proportional zum Volumen V :

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} ,$$

wobei $R = 8.31\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ die ideale Gaskonstante ist.

2.3 Umkehrfunktionen

In dem Michalis-Menten-Modell für Enzymreaktionen ist die Reaktionsgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Konzentration x gegeben. In manchen Fällen möchte man jedoch aus einer bekannten Geschwindigkeit v die Konzentration x bestimmen. Dies führt auf die Frage, ob sich x aus v eindeutig bestimmen läßt, und allgemein zu

DEFINITION 1 Eine Funktion

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$$

heißt *umkehrbar* , wenn jeder Funktionswert $y \in W_f$ nur einmal auftritt, d.h. es gibt genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$. Bezeichnet man dieses x mit $\overset{-1}{f}(y)$, so wird durch die Vorschrift

$$\overset{-1}{f} : W_f \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \overset{-1}{f}(y)$$

die Umkehrfunktion definiert. Es gilt also dann

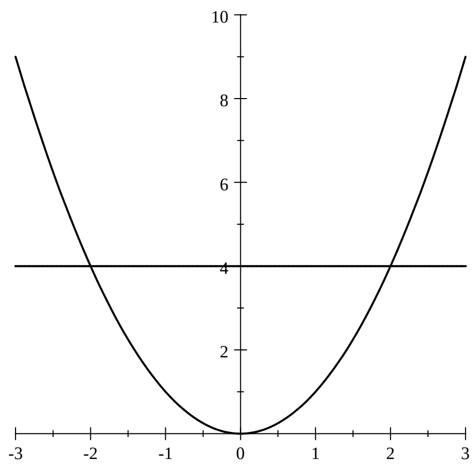
$$y = f(x) \ , \ x \in D_f \quad \Longleftrightarrow \quad x = \overset{-1}{f}(y) \ , \ y \in D_{\overset{-1}{f}} = W_f \ .$$

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $x = \overset{-1}{f}(y)$ ensteht aus der Funktionsgleichung $y = f(x)$ durch Auflösen nach x .

BEISPIEL 1 Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

ist nicht umkehrbar, da $y = 4$ Funktionswert zu $x = 2$ und $x = -2$ ist.



$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

BEISPIEL 2 Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

ist umkehrbar, da

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad x \geqslant 0$$

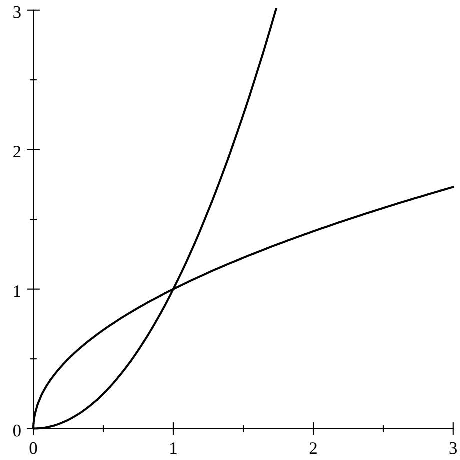
zu

$$x = \sqrt{y} \quad \text{und} \quad y \geqslant 0$$

äquivalent ist. Also ist die Umkehrfunktion $\overset{-1}{f}$ von f durch

$$\overset{-1}{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \sqrt{y}$$

gegeben.



$$x \longmapsto x^2 \quad \text{und} \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$

BEISPIEL 3 Im Michaelis-Menten Modell (Beispiel 2.2.3) ist die Geschwindigkeitsfunktion v genau dann umkehrbar, wenn $R = 0$ ist, wie eine einfache Rechnung zeigt. Ist $R \neq 0$, so gibt es zu einem gegebenen v i.a. zwei verschiedene Konzentrationen x_1 und x_2 mit $v(x_1) = v = v(x_2)$.

Es gilt

HAUPTSATZ *Sei f eine unkehrbare Funktion.*

(i) Der Graph der Umkehrfunktion $\overset{-1}{f}$ von f ensteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

(ii) Eine Wertetabelle von $\overset{-1}{f}$ entsteht aus einer Wertetabelle von f durch Vertauschung der Spalten.

Es gilt

$$(x, y) \in \operatorname{Gr} f \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \overset{-1}{f}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad (y, x) \in \operatorname{Gr} \overset{-1}{f} \ .$$

Die Vertauschung von x und y entspricht die Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

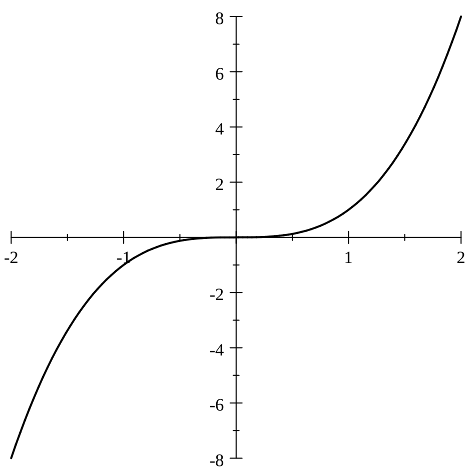
x	$f\,(x)$
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$

y	$\overset{-1}{f}\,(y)$
y_1	x_1
y_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$

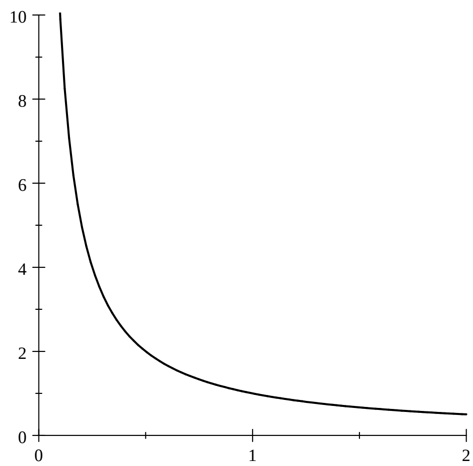
DEFINITION 2 Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend* bzw. *fallend* , wenn für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$.

BEISPIEL 4 Die Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3$ ist streng monoton wachsend.

BEISPIEL 5 Die Funktion $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$ ist streng monoton fallend.



$x \longmapsto x^3$



$x \longmapsto \frac{1}{x}$

SATZ *Ist eine Funktion f streng monoton wachsend oder fallend, so ist sie umkehrbar.*

2.4 Variablenänderungen

Wie wir schon im Beispiel 2.2.2 gesehen haben, benutzt man Graphiken, in denen man nicht die Variable x , sondern die Werte einer Funktion von x aufträgt, um den Graph der untersuchten Funktion in eine Gerade zu transformieren. In diesen Beispielen war es $(10^3 \cdot x)^2$. Es ist auch nützlich, eine solche Transformation auf dem Wertebereich zu machen.

DEFINITION 1 Seien (x, y) die Variablen eines Koordinatensystems. Eine *Variablenänderung* ist die Angabe von zwei umkehrbaren Funktionen g und h , die durch die Gleichung ihres Graphen

$$u = g(x) \quad \text{und} \quad v = h(y)$$

gegeben sind. Das Koordinatensystem mit den Variablen (u, v) nennt man das *transformierte Koordinatensystem* .

Wir schließen nicht aus, daß die Definitionsmenge der Funktionen g und h nicht $\mathbb{R}$ sind, d.h. daß die Variablen x, y sowie u, v eingeschränkt sein können. Die Umkehrbarkeit bedeutet, daß man x in Abhängigkeit von u sowie y in Abhängigkeit von v ausdrücken kann.

ANWENDUNG Sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die durch die Gleichung ihres Graphen

$$y = f(x) \tag{\dagger}$$

gegeben ist. Man sucht eine Variablenänderung

$$u = g(x) \quad \text{und} \quad v = h(y) \ , \tag{\dagger\dagger}$$

so daß durch Einsetzen in $(*)$ eine äquivalente Gleichung der Gestalt

$$v = a \cdot u + b$$

hervorgeht.

BEISPIEL 1 Im Beispiel 2.2.2 haben wir die Variablenänderung

$$u = \left(10^3 \cdot x\right)^2 \quad \text{und} \quad v = c$$

durchgeführt.

BEISPIEL 2 Sei

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c \cdot \frac{1}{x} \ .$$

Die Gleichung des Graphen ist also

$$y = c \cdot \frac{1}{x} \ . \tag{*}$$

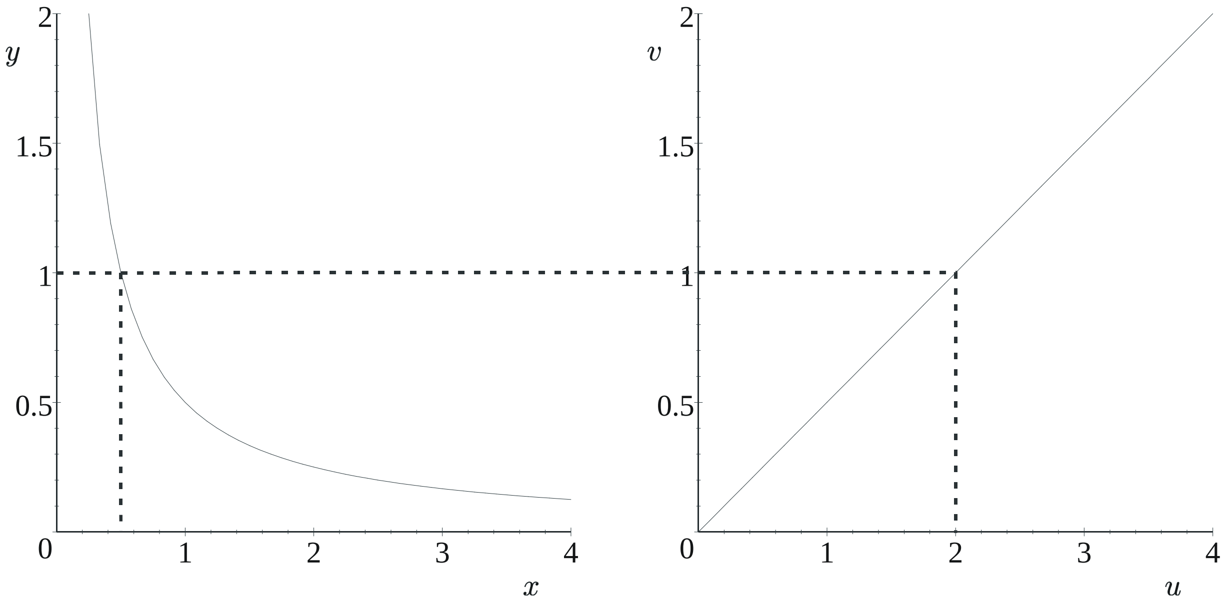
Führt man die Variablenänderung

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad v = y$$

durch, so ist $(*)$ zu

$$v = c \cdot u$$

äquivalent. Die Punkte $(x, f(x))$ liegen auf einer Hyperbel; dagegen liegen die Punkte $\left(\frac{1}{x}, f(x)\right)$ auf einer Geraden durch den Ursprung mit der Steigung c . Dies liefert einen graphischen Test um festzustellen, ob eine durch eine Wertetabelle gegebene Funktion eine umgekehrte Proportionalität ist. Die Konstante c kann man in dieser Graphik ablesen.



$c = 0.5$

BEISPIEL 3 Sei $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{A \cdot x}{k + x}$ gegeben, d.h.

$$y = \frac{A \cdot x}{k + x} \ . \tag{$**$}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{y} = \frac{k + x}{A \cdot x} = \frac{k}{A} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{A} \ .$$

Durch die Variablenänderung

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{y}$$

ist $(**)$ äquivalent zu

$$v = \frac{k}{A} \cdot u + \frac{1}{A} \ .$$

Verkettung von Funktionen

Mit dem folgenden Begriff, von dem wir später auch Gebrauch machen werden, kann man obiges Einsetzen von (††) in (†) formal aufschreiben. Seien $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $W_f \subset D_g$. Dann ist für jedes $x \in D_f$ die Zahl $f(x)$ in D_g , also ist $g(f(x))$ definiert und somit $D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(f(x))$ eine Funktion.

DEFINITION 2 Diese Funktion wird mit $g \circ f$ bezeichnet, also

$$g \circ f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(f(x)) \ ,$$

und heißt *zusammengesetzte* oder *verkettete Funktion* .

BEMERKUNG Ist $f : D_f \longrightarrow W_f$ eine Umkehrbare Funktion und $\overset{-1}{f} : W_f \longrightarrow D_f$ die Umkehrabbildung, so gilt

$$\overset{-1}{f} \circ f(x) = \overset{-1}{f}(f(x)) = x \qquad \text{und} \qquad f \circ \overset{-1}{f}(y) = f\left(\overset{-1}{f}(y)\right) = y$$

für alle $x \in D_f$ und $y \in W_f$.

ANWENDUNG Um (††) in (†) einsetzen zu können, muß man zuerst Auflösen, d.h. x in Abhängigkeit von u sowie y in Abhängigkeit von v ausdrücken :

$$x = \overset{-1}{g}(u) \quad \text{und} \quad y = \overset{-1}{h}(v) \ .$$

Durch Einsetzen bekommt man

$$\overset{-1}{h}(v) = f\left(\overset{-1}{g}(u)\right)$$

und schließlich

$$v = h\left(\overset{-1}{h}(v)\right) = h\left(f\left(\overset{-1}{g}(u)\right)\right) = h \circ f \circ \overset{-1}{g}(u) \ .$$

Die verkettete Funktion $h \circ f \circ \overset{-1}{g}$ muß also durch geeignete Wahl der Variablenänderung $u = g(x)$ und $v = h(x)$ die einfache Form

$$h \circ f \circ \overset{-1}{g} : u \longmapsto a \cdot u + b$$

erhalten.

Prof. Dr. C. Portenier
Prof. Dr. W. Gromes