

Kapitel 3

EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUS-FUNKTION

Fassung vom 3. Dezember 2005

3.1 Exponentialfunktion

Wir betrachten als einführendes Beispiel eine Bakterienkultur in Nährlösung. Ist $u(s)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit s und ist t eine beliebige feste Zeit (z.B. eine Stunde oder ein Tag), so stellt man fest, daß gilt : für jedes s ist $u(s+t)$ proportional zu $u(s)$, man schreibt $u(s+t) \sim u(s)$, d.h. mit einer Konstanten c (die von t abhängt) gilt

$$u(s+t) = c \cdot u(s) \quad \text{für alle } s. \quad (*)$$

BEMERKUNG 1 Dieses Verhalten nennt man (*exponentielles*) *Wachstumsgesetz*; es beschreibt viele zeitabhängige Veränderungsprozesse in der Natur: z.B. das Wachstum von Lebewesen oder Populationen zu Beginn der Entwicklung. Aber auch die Abnahme von Teilchen beim radioaktivem Zerfall oder die Abnahme der Intensität von Lichtwellen oder Röntgenstrahlen in einem homogenen Medium in Abhängigkeit von der im Medium durchlaufenen Strecke zeigt negatives Wachstum.

Insbesondere erhält man für $s = 0$:

$$u(t) = c \cdot u(0) \quad , \text{ d.h. } c = \frac{u(t)}{u(0)}.$$

Also gilt

$$u(s+t) = u(s) \cdot \frac{u(t)}{u(0)}$$

oder

$$\frac{u(s+t)}{u(0)} = \frac{u(s)}{u(0)} \cdot \frac{u(t)}{u(0)}$$

Wir normieren, indem wir definieren :

$$v(t) := \frac{u(t)}{u(0)}$$

und erhalten die sogenannte *Funktionalgleichung des exponentielles Wachstumsgesetzes*

$$v(0) = 1 \quad \text{und} \quad v(s+t) = v(s) \cdot v(t) \quad \text{für alle } s, t.$$

Eine Näherungslösung wird durch das Polynom

$$p_n(t) := 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

gegeben, und nähert diese Lösung um so genauer, je größer n ist. Dabei gilt für $s, t \geq 0$ und $s+t \leq 1 + \frac{n}{2}$ folgende Abschätzung für den Fehler :

$$0 \leq p_n(s) \cdot p_n(t) - p_n(s+t) \leq \frac{2 \cdot (s+t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dies ist zumindest für $n = 1, 2, 3$ leicht nachprüfbar. Man sieht daraus, dass für große n die Zahl $\frac{2 \cdot (s+t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sehr klein wird, so dass ungefähr

$$p_n(s+t) \simeq p_n(s) \cdot p_n(t)$$

gilt und zwar um so genauer, je größer n wird. Geht man zum Grenzwert über (siehe Kapitel 5), so gilt das exakt für

DEFINITION die *Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \exp(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} .$$

Dabei nennt man

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,71828182\dots$$

die *Eulersche Zahl* .

Somit haben wir gezeigt

HAUPTSATZ Die *Exponentialfunktion* erfüllt die *Funktionalgleichung* des *exponentiellen Wachstumsgesetzes*, d.h. es gilt

$$\exp(0) = 1$$

und

$$\exp(s+t) = \exp(s) \cdot \exp(t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} .$$

Aus dem Satz sieht man sofort für $n \in \mathbb{N}$, daß

$$\exp(n \cdot t) = \exp(\underbrace{t + t + \dots + t}_n) = \underbrace{\exp(t) \cdot \exp(t) \cdot \dots \cdot \exp(t)}_n = \exp(t)^n$$

und für $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 0$

$$\exp\left(\frac{p}{q} \cdot t\right)^q = \exp\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot t\right) = \exp(p \cdot t) = \exp(t)^p .$$

Daraus folgt

$$\exp\left(\frac{p}{q} \cdot t\right) = \sqrt[q]{\exp(t)^p} = \exp(t)^{\frac{p}{q}} ,$$

insbesondere

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp(1)^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}} .$$

Für beliebiges reelles t existiert (Beispiel 5.6.3) eine Folge von rationalen Zahlen $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $t = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k}$. Da die Exponentialfunktion stetig ist (Satz 5.4) erhält man schließlich mit Limesüberlegungen (Satz 5.6)

$$\exp(t) = \exp\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{p_k}{q_k}} =: e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k}} = e^t .$$

KOROLLAR

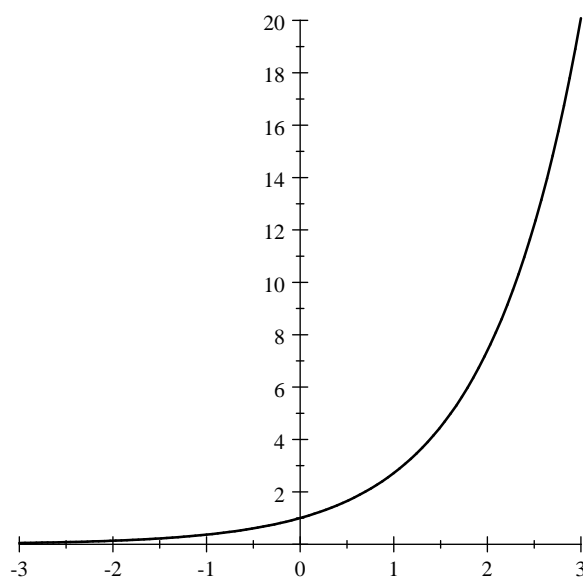
(i) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 0$ gilt

$$e^{s+t} = e^s \cdot e^t \quad , \quad e^{\frac{p}{q} \cdot t} = (e^t)^{\frac{p}{q}} \quad \text{und} \quad e^{-t} = \frac{1}{e^t} .$$

(ii) Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und $W_{\text{exp}} =]0, \infty[$.

Der Nachweis, daß jedes $y > 0$ als Funktionswert der Exponentialfunktion auftritt, erfordert weitergehende theoretische Hilfsmittel (Zwischenwertsatz.)

BEMERKUNG 2 Dem raschen Anwachsen von e^t für große t entspricht wegen $e^{-t} = \frac{1}{e^t}$ die schnelle Annäherung an 0 für kleine, d.h. betragsmäßig große und negative t .



Exponentialfunktion

t	-10	-3	-1	0	1	3	10
e^t	$4.540 \cdot 10^{-5}$	0.049	0.36	1	2.71	20.08	$2.20 \cdot 10^4$

t	22	29	63
e^t	$3.58 \cdot 10^9$	$3.93 \cdot 10^{12}$	$2.29 \cdot 10^{27}$
$t \cdot 10 \text{ cm}$	2.2 m	2.9 m	6.3 m
$e^t \cdot 10 \text{ cm}$	fast zum Mond	weiter als die Sonne	doppelten Durchmesser des Universums

Nimmt man 10 cm als Einheit, so entspricht $\exp(22)$ ungefähr $3.58 \cdot 10^8 \text{ m}$. Die Distanz von der Erde zum Mond liegt zwischen $3.65 \cdot 10^8 \text{ m}$ und $4.07 \cdot 10^8 \text{ m}$, die zur Sonne zwischen $1.47 \cdot 10^{11} \text{ m}$ und $1.52 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Der Durchmesser des Universums, der ungefähr 10^{10} Lichtjahre beträgt, ist also ungefähr 10^{26} m , da

$$1 \text{ Lichtjahr} := 9.4607 \times 10^{15} \text{ m} \simeq 10^{16} \text{ m}$$

($3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60^2 \text{ s} \simeq 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}$).

SCHOLIE (Exponentielles Wachstumsgesetz)

Alle Naturvorgänge, die der Wachstumsbedingung () genügen, werden durch Funktionen der Form*

$$u : t \longmapsto a \cdot e^{\lambda t}$$

beschrieben.

In der Tat gilt

$$u(s+t) = a \cdot e^{\lambda(s+t)} = e^{\lambda s} \cdot (a \cdot e^{\lambda t}) = e^{\lambda s} \cdot u(t)$$

und

$$c = e^{\lambda s} .$$

Für die Umkehrung benötigt man die Stetigkeit des Naturvorgangs (vgl. 5.4).

3.2 Logarithmusfunktion

Untersucht man einen exponentiellen Wachstumsvorgang, also $u(t) = a \cdot e^{\lambda t}$, so erhält man a sofort als $u(0) = a$. Die Bestimmung von λ kann prinzipiell aus einem weiteren Meßwert $u(s)$ erfolgen. Man möchte $u(s) = a \cdot e^{\lambda s}$ "nach λ auflösen". Dieses gelingt, wenn man die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion aufsucht (siehe Korollar 3.1 und Satz 2.3):

DEFINITION Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion \exp heißt der *natürliche Logarithmus* \ln

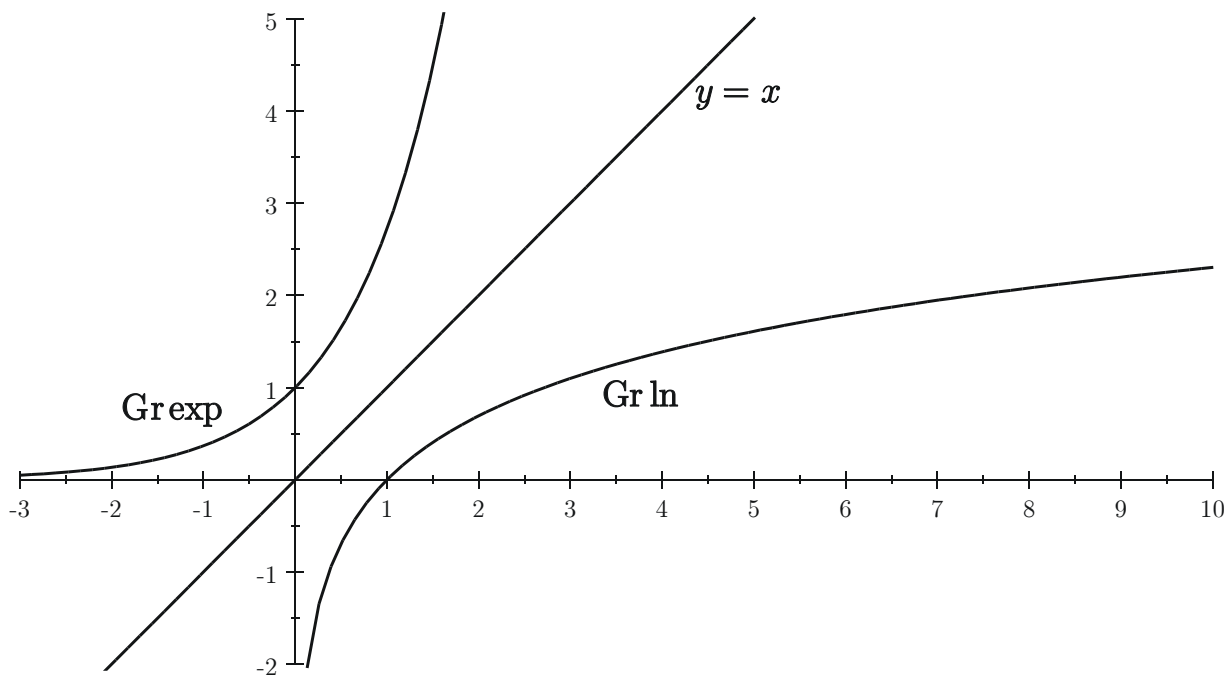
$$\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} .$$

Es gilt

$$\ln y = x \iff y = e^x ,$$

d.h.

$$\ln(e^x) = x \quad \text{und} \quad e^{\ln y} = y .$$



SATZ Für $u, v > 0$ gilt

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v \quad , \quad \ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln u \quad ,$$

und

$$\ln\left(u^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} \cdot \ln u \quad \text{für} \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} .$$

Es gilt $u = e^{\ln u}$ und $v = e^{\ln v}$, also

$$u \cdot v = e^{\ln u} \cdot e^{\ln v} = e^{\ln u + \ln v}$$

(Korollar 3.1.i) und somit

$$\ln(u \cdot v) = \ln(e^{\ln u + \ln v}) = \ln u + \ln v.$$

Weiter gilt

$$u^{\frac{p}{q}} = (e^{\ln u})^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} \cdot \ln u}$$

(wiederum Korollar 3.1.i) und schließlich

$$\ln\left(u^{\frac{p}{q}} = (e^{\ln u})^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} \cdot \ln u}\right) = \ln\left(e^{\frac{p}{q} \cdot \ln u}\right) = \frac{p}{q} \cdot \ln u.$$

BEISPIEL 1 Bezeichnet $N(t)$ die Anzahl der Teilchen eines radioaktiven Stoffes zur Zeit $t \in \mathbb{R}$, so gilt das *Zerfallsgesetz*

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t},$$

wobei λ die *Zerfallskonstante* und N_0 die Anzahl der Teilchen zur Zeit 0 ist.

Im allgemeinen wird nicht die Zerfallskonstante gemessen, sondern die *Halbwertszeit* t_h , die durch

$$\frac{N_0}{2} = N(t_h) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_h}$$

definiert ist. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot t_h},$$

also

$$-\ln 2 = \ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-\lambda \cdot t_h}) = -\lambda \cdot t_h$$

und somit

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_h} \quad \text{oder} \quad t_h = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Für das giftige Cäsiumisotop ^{137}Cs ist $t_h = 30$ a (a ist die Abkürzung von Jahr), also

$$\lambda = \frac{\ln 2}{30} \simeq \frac{0.693}{30} = 0.023 \text{ a}^{-1}.$$

Wie lange dauert es, bis ^{137}Cs bis auf 1% zerfallen ist? Gesucht ist also $t \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\frac{1}{100} = \frac{N(t)}{N_0} = e^{-0.023 \cdot t}, \quad \text{d.h.} \quad 0.023 \cdot t = \ln 100$$

oder

$$t = \frac{\ln 100}{0.023} \simeq 200 \text{ a}.$$

BEMERKUNG Die Halbwertszeit des Plutoniums-Isotops ^{239}Pu ist $2.44 \cdot 10^4$ a; die des ^{238}Pu ist 86 a.

BEISPIEL 2 Altersbestimmung nach der ^{14}C -Methode.

Das Verhältnis vom radioaktiven ^{14}C zum stabilen ^{12}C Kohlenstoffatom ist aufgrund kosmischer Strahlung im wesentlichen konstant. Lebende Organismen unterscheiden nicht zwischen ^{12}C und ^{14}C , das Verhältnis ist deshalb dort dasselbe wie in der Atmosphäre. Nach dem Absterben wird kein Kohlenstoff mehr aufgenommen. Für das Verhältnis

$$v = \frac{N_{14\text{C}}}{N_{12\text{C}}}$$

gilt dann

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t},$$

wobei λ die Zerfallskonstante von ^{14}C ist. Aus der Halbwertzeit von ^{14}C , die ungefähr 5730 a ist, kann man λ berechnen. Es gilt

$$\lambda \simeq \frac{\ln 2}{5730} \simeq 1.2097 \times 10^{-4} \text{ a}^{-1}.$$

Durch Messung des Verhältnis am toten Organismus läßt sich also die Zeit vom Absterben bis zur Messung berechnen, d.h. aus der Messung von $\frac{v(t)}{v_0}$ ist es dann möglich t zu bestimmen. Aus

$$e^{-\lambda \cdot t} = \frac{v(t)}{v_0}$$

folgt

$$-\lambda \cdot t = \ln(e^{-\lambda \cdot t}) = \ln \frac{v(t)}{v_0},$$

d.h.

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{v(t)}{v_0} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{v_0}{v(t)}.$$

3.3 Allgemeine Potenzen und Logarithmen

Nach Korollar 3.1.i und den Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus gilt

$$e^{\frac{p}{q} \cdot \ln a} = (e^{\ln a})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \quad \text{für } a > 0, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

DEFINITION Für $a > 0$ definiert man die *Exponential-Funktion zur Basis a* durch

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto e^{x \cdot \ln a}$$

und schreibt

$$a^x := e^{x \cdot \ln a}.$$

Für $a > 1$ ist die *Logarithmus-Funktion zu Basis a*

$$\log_a :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : u \longmapsto \log_a u$$

dann durch

$$\log_a u = x \iff u = a^x$$

definiert, d.h.

$$\log_a (a^x) = x \quad \text{und} \quad a^{\log_a u} = u.$$

Damit kann man die Rechenregeln für Potenzen (Satz 1.5) und Logarithmen (Satz 3.2) verallgemeinern.

SATZ (Rechenregeln für \exp_a und \log_a) Für $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $u, v \in]0, \infty[$ gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \text{und} \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

sowie (für $a > 1$)

$$\log_a u = \frac{\ln u}{\ln a}, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad \text{und} \quad \log_a (u^x) = x \cdot \log_a u.$$

Für die Beziehung zwischen \log_a und \ln braucht man nur zu bemerken, daß

$$\log_a u = x \iff u = a^x = e^{x \cdot \ln a} \iff \ln u = x \cdot \ln a,$$

d.h.

$$\log_a u = x = \frac{\ln u}{\ln a}.$$

BEISPIEL 1 Die wichtigsten Basen sind $a = e$ und $a = 10$:

$$\ln = \log_e \quad \text{und} \quad \log := \log_{10} = \frac{\ln}{\ln 10} \simeq \frac{\ln}{2.3026}.$$

Der dekadische Logarithmus \log wurde bei numerischen Rechnungen benutzt, z.B. ist

$$\log(6.0228 \cdot 10^{23}) = \log 6.0228 + \log 10^{23} \simeq 0.7798 + 23 = 23.7798$$

und

$$\log(1.6605 \cdot 10^{-24}) = \log 1.6605 + \log 10^{-24} \simeq -24 + 0.2202 = -23.7798 .$$

BEISPIEL 2 Die Vermehrung in einer Bakterienkultur wird bei gleichbleibenden äußeren Bedingungen in einem begrenzten Zeitraum durch

$$N(t) = N_0 \cdot e^{a \cdot t}$$

gegeben, wobei $N(t)$ die Anzahl oder die Masse der Bakterien zur Zeit t ist. Ist der stündliche Zuwachs $x\%$ und setzt man $q := 1 + \frac{x}{100} \text{ h}^{-1}$, so gilt

$$N_0 \cdot e^{a \cdot 1} = N(1) = N_0 + x\% \cdot N_0 = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot N_0 = q \cdot N_0 ,$$

also

$$e^a = q ,$$

d.h.

$$a = \ln q .$$

Damit erhalten wir

$$N(t) = N_0 \cdot e^{t \cdot \ln q} = N_0 \cdot q^t .$$

Daraus können wir die *Verdopplungszeit* t_d berechnen. Aus

$$2N_0 = N_0 \cdot e^{t_d \cdot \ln q}$$

folgt

$$\ln 2 = t_d \cdot \ln q ,$$

d.h.

$$t_d = \frac{\ln 2}{\ln q} .$$

Ist z.B. der stündliche Zuwachs 10% , so ist

$$t_d = \frac{\ln 2}{\ln 1.1} \simeq 7.27 \text{ h} .$$

BEMERKUNG Ein einfaches numerisches Beispiel zeigt nun auch, daß obiges Wachstumsgesetz nur in einem begrenzten Zeitraum gelten kann :

Ein einziges Herpes-simplex-Virus von $1.5 \cdot 10^{-15} \text{ g}$ hätte sich nach 3 Wochen zu einer Bakterienkultur von ungefähr einer Tonne entwickelt :

$$\tau = 3 \text{ Wochen} = 3 \cdot 7 \cdot 24 \text{ h} = 504 \text{ h} ,$$

also

$$N(\tau) = 1.5 \cdot 10^{-15} \cdot 1.1^{504} \text{ g} \simeq 1.09 \times 10^6 \text{ g} = 1.09 \text{ Tonne} .$$

3.4 Graphische Bestimmung von Konstanten

Die Exponential- und Logarithmus-Funktion werden oft benutzt, um eine Funktionsgleichung durch Variablenänderungen auf eine Geradengleichung zu transformieren (siehe 2.4). Danach lassen sich die Konstanten graphisch schätzen.

BEISPIEL 1 Durch die Variablenänderung $u = x$ und $v = \ln y$ ist

$$y = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

zu

$$v = \ln(c \cdot e^{\lambda \cdot x}) = \ln c + \lambda \cdot x = \ln c + \lambda \cdot u$$

äquivalent. In der Tabelle

$u = x$	y	$v = \ln y$
x_1	y_1	$\ln y_1$
\vdots	\vdots	\vdots

besteht dann ein linearer Zusammenhang zwischen v und u .

BEISPIEL 2 Durch die Variablenänderungen $u = \ln x$ und $v = \ln y$ ist

$$y = c \cdot x^p$$

zu

$$v = \ln y = \ln(c \cdot x^p) = \ln c + \ln(x^p) = \ln c + p \cdot \ln x = \ln c + p \cdot u$$

äquivalent. In der Tabelle

$u = \ln x$	x	y	$v = \ln y$
$\ln x_1$	x_1	y_1	$\ln y_1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

besteht dann ein linearer Zusammenhang zwischen v und u .

Der Vorteil dieser Transformation gegenüber der am Beispiel der Propionsäure 2.2.2 verwendeten besteht darin, daß jetzt auch die Potenz p (im Beispiel war $p = 2$) am Graphen ablesbar ist.

Dabei kann man *einfach-* und *doppelt-logarithmisches* Papier verwenden.

BEISPIEL 3 Für die Hefevermehrung, zu der in Beispiel 2.1.1 eine Meßreihe angegeben ist, vermutet man aufgrund der Überlegungen zu Beginn dieses Kapitel im ersten Zeitabschnitt einen funktionalen Zusammenhang der Form

$$V(t) = e^{a \cdot t}.$$

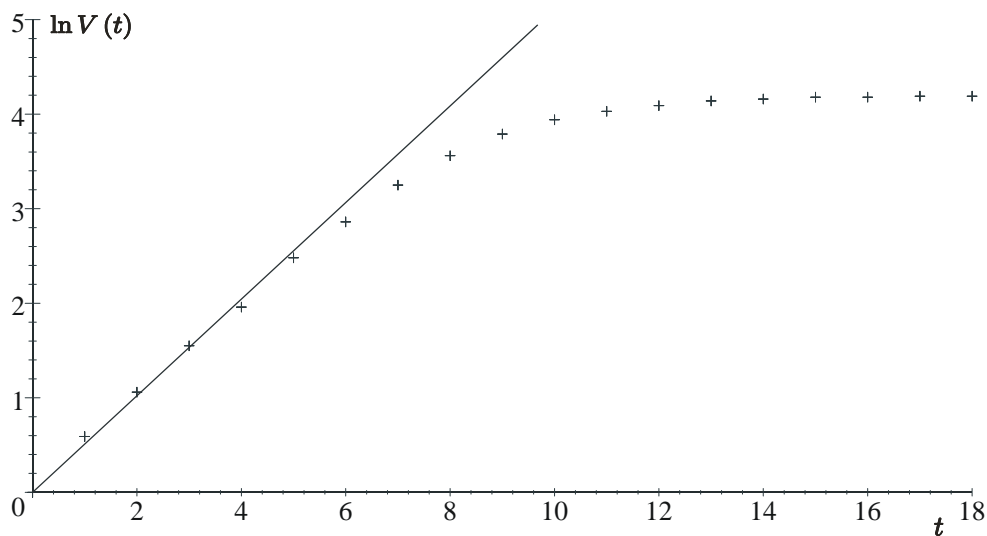
Durch Logarithmieren erhält man daraus (siehe obiges Beispiel 1)

$$\ln V(t) = \ln(e^{a \cdot t}) = \ln(e^{a \cdot t}) = a \cdot t.$$

Man kann statt \ln ebenso \log verwenden.

Wir tragen deshalb die Meßpunkte aus Beispiel 2.1.1 in ein Koordinatensystem ein, bei dem auf der vertikalen Achse $\ln V(t)$ statt $V(t)$ aufgetragen wird (einfach logarithmische Skala).

t	$V(t)$	$\ln V(t)$
0	1	0
1	1.8	0.59
2	2.9	1.06
3	4.7	1.55
4	7.1	1.96
5	11.9	2.48
6	17.5	2.86
7	25.7	3.25
8	35.1	3.56
9	44.1	3.79
10	51.3	3.94
11	56.0	4.03
12	59.5	4.09
13	62.9	4.14
14	64.1	4.16
15	65.6	4.18
16	65.6	4.18
17	65.7	4.19
18	66.2	4.19



Für $0 \leq t \leq 5$ gibt die lineare Funktion

$$t \longmapsto 0.50 \cdot t$$

eine gute Approximation an die eingetragene Punkte, d.h.

$$a = 0.50 .$$

Die Hefezellenvermehrung wird zwischen 0 und 5 Stunden in guter Näherung durch

$$V(t) = e^{0.5 \cdot t}$$

beschrieben. Hier der Vergleich

t	$V(t)$	$e^{0.5 \cdot t}$
0	1	1.0
1	1.8	1.65
2	2.9	2.72
3	4.7	4.48
4	7.1	7.39
5	11.9	12.2
6	17.5	20.1
7	25.7	33.1
8	35.1	54.6
9	44.1	90.0