Kapitel 4

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

Fassung vom 9. Dezember 2005

4.1 Periodische Vorgänge

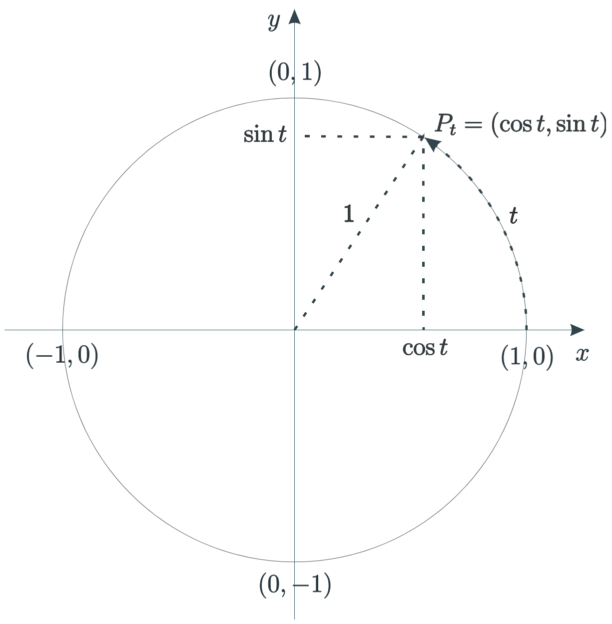
Neben den Wachstumsprozessen spielen die periodischen Vorgänge in den zeitabhängigen biologischen Vorgängen eine wichtige Rolle. Man denke nur an Herzschlag, Tages- und Jahreszyklus, weiblicher Zyklus oder gewisse Populationsschwankungen, wie z. B. "Maikäferzyklus" und "Räuber-Beute-Zyklen". Dies sind biologische Rythmen, die sich in festen Abständen annähernd gleich wiederholen. Wenn man den Grundtyp eines periodischen Vorgangs, wie die *harmonische Schwingung*, etwa in Form der Bewegung eines Federpendels, verstanden hat, versteht man auch die Biologischen Zyklen, die i.A. eine kompliziertere Struktur besitzen. Als augenfälliges Beispiel kann man hier an das Bild eines EKG denken.

Zur mathematischen Beschreibung harmonischer Schwingungen führen wir zunächst den Rand des Einheitskreises in der Ebene ein: $\mathbb{S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Mit Hilfe der (mathematisch definierbaren) Längenmessung des Kreisbogens zeigt man, daß der Kreis den Umfang 2π hat , wobei $\pi = 3,1415926535\ldots$ (inzwischen hat man mehr als eine Milliarde Dezimalen berechnet !) ist. Eine gute Approximation von π ist durch

$$\pi \simeq \frac{22}{7}$$

gegeben.

Jeder Zahl $t \in \mathbb{R}$ läßt sich genau ein Punkt $P_t \in S$ so zuordnen, daß die orientierte Länge des Kreisbogens von $(1,0)$ nach P_t gerade t ist. Dabei wird für positive t der Kreis gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, und zwar mehrfach falls $t > 2\pi$; z.B. ist $P_t = (0,1)$ für $t = \frac{5}{2}\pi$. Entsprechend wird für negative t der Kreis im Uhrzeigersinn duchlaufen.



DEFINITION $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch die x- bzw. y-Koordinate von P_t , also $P_t = (\cos t, \sin t)$.

Es ergibt sich schnell die folgende Tabelle

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos t$	1	0	-1	0	1
$\sin t$	0	1	0	-1	0

.

4.2 Eigenschaften der Cosinus- und Sinus-Funktion

SATZ *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i)

$$\cos(t + k \cdot 2\pi) = \cos t \quad , \quad \sin(t + k \cdot 2\pi) = \sin t \qquad \textit{für alle } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

also sind sin *und* cos *2π-periodisch.*

(ii)

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \ .$$

(iii)

$$\cos(-t) = \cos t \quad , \quad \sin(-t) = -\sin t \ .$$

(iv)

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t \quad , \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$$

und

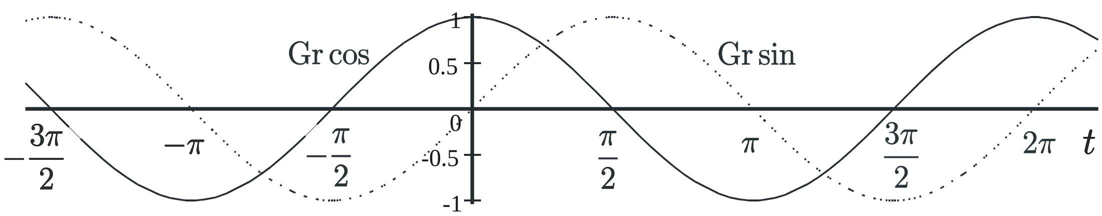
$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \quad , \quad \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t \ .$$

(v) ***Additionssätze*** *Für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt*

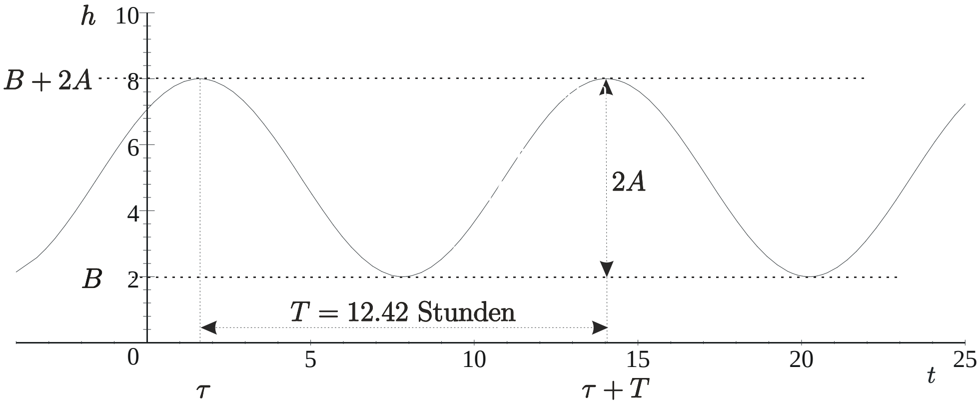
$$\cos(s + t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t$$

und

$$\sin(s + t) = \sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t \ .$$



BEISPIEL Die Wasserstandsmessungen in einem Küstenort ergeben folgenden skizzierten Verlauf :



Wir versuchen die Wasserstandsfunktion mit Hilfe einer Cosinus-Funktion anzunähern. Dies geschieht in mehreren Einzelschritten :

$$\begin{array}{cc}
 & \cos t \\
\textit{Periode } T & \downarrow \\
 & \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \\
\textit{Phasenverschiebung } \tau & \\
\text{Funktionswert in } \tau \text{ ist } 1 & \downarrow \\
 & \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot [t-\tau]\right) \\
\textit{Amplitude } A & \downarrow \\
 & A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot [t-\tau]\right) \\
\text{Verschiebung in } h\text{-Richtung} & \\
A_0 = B + A & \downarrow \\
 & A_0 + A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot [t-\tau]\right)
\end{array}$$

Diese Funktion gibt den gemessenen Wasserstand gut wieder.

BEMERKUNG 1 Die harmonischen Schwingungen werden gerade durch solche Funktionen beschrieben. Wegen Satz (iv) läßt sich dies auch durch eine Sinus-Funktion ausdrücken.

BEMERKUNG 2 Wir habe eingangs erwähnt, daß biologische Zyklen meistens eine komplizierte Struktur besitzen. Ein wichtiges mathematisches Resultat besagt, daß sich solche allgemeinen Funktionen mit beliebiger Genauigkeit durch Summen von Cosinus- und Sinus-Funktionen approximieren lassen. Trotz dieses weitreichenden Resultats sind mathematische Modelle biologischer Zyklen i.a. nur in einem begrenzten Zeitraum aussagekräftig, da bei biologischen Zyklen Amplitude und Periodenlänge gewissen Änderungen unterliegen. Biorythmuskurven, die möglichtst aus den Geburtsdaten Vorhersagen bis ins hohe Alter machen, haben den gleichen Wert wie astrologische Vorhersagen.

4.3 Gradmaß

Der oben definierte Kreisbogen t legt auch einen Winkel im Kreis fest.

DEFINITION 1 Das *Gradmaß* (DEG) $\alpha°$ des durch die Punkte

$$(1,0) \ , \ (0,0) \quad \text{und} \quad P_t = (\cos t, \sin t)$$

gegebenen Winkels ist durch

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{t}{2\pi}$$

definiert. t heißt das *Bogenmaß* (RAD) dieses Winkels. Man schreibt $\alpha° \doteq t$.

Es gilt also z.B.

$$30° \doteq \frac{\pi}{6} \quad , \quad 60° \doteq \frac{\pi}{3} \quad , \quad 90° \doteq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 180° \doteq \pi \ .$$

Falls $\alpha° \doteq t$, so sei

$$\cos \alpha° := \cos t = \cos\left(\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi\right) \quad , \quad \sin \alpha° := \sin t = \sin\left(\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi\right) \ .$$

BEISPIEL 1 Angaben im Gradmaß sind vor allem bei Überlegungen am Dreieck (*Trigonometrie*) üblich. Aus der Skizze liest man mit Hilfe des Strahlensatzes (Satz von Thalès) ab :

BEMERKUNG Im rechwinkligen Dreieck ist

$$\frac{a}{\cos \alpha°} = \frac{c}{1} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin \alpha°} = \frac{c}{1} \ ,$$

d.h.

$$a = c \cdot \cos \alpha° \quad \text{und} \quad b = c \cdot \sin \alpha° \ ,$$

wobei a , b und c die Längen der *Ankathete* , der *Gegenkathete* und der *Hypothenuse* sind.

DEFINITION 2 Es sei

$$\tan t := \frac{\sin t}{\cos t}$$

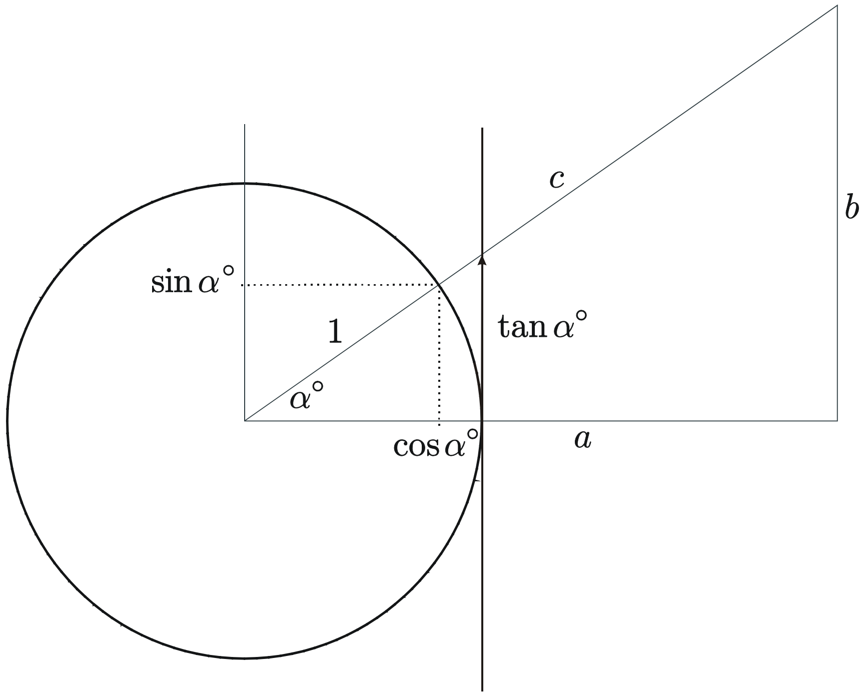
für $\cos t \neq 0$, die *Tangens* von t .

BEISPIEL 2 In einem rechwinkligen Dreieck gilt

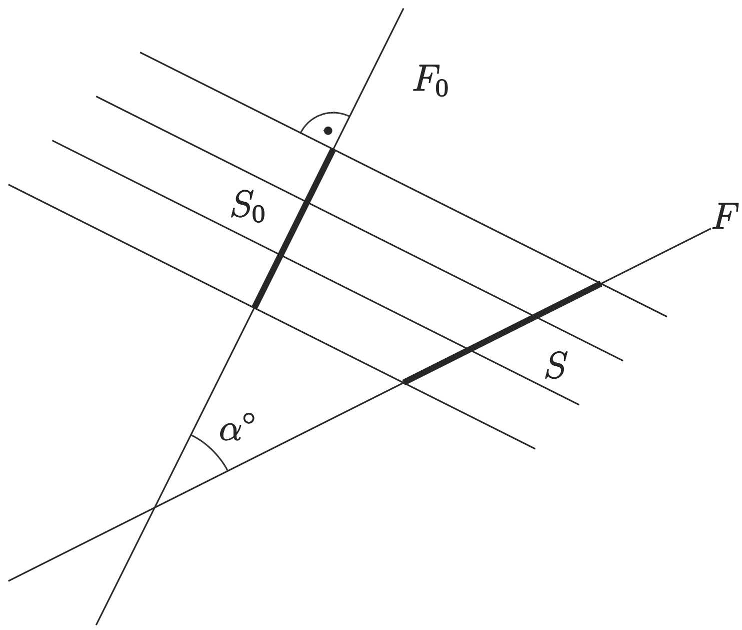
$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{c \cdot \sin \alpha°}{c \cdot \cos \alpha°} = \frac{\sin \alpha°}{\cos \alpha°} = \tan \alpha° \ ,$$

also

$$b = a \cdot \tan \alpha° \ .$$



BEISPIEL Eine Ebene F_0 stehe senkrecht zur Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen, eine zweite Ebene F schließe mit F_0 einen Winkel von α° ein.



Die Intensität des direkt (ohne Berücksichtigung des Streulichts) auf F bzw. F_0 einfallenden Sonnenlichts sei I bzw. I_0 . Man betrachte ein Rechteck S_0 in F_0 und dessen Projektion S in F mit gleicher Breite und die Längen l_0 bzw. l . Es gilt $l_0 = l \cdot \cos\alpha^\circ$, also

$$S_0 = S \cdot \cos\alpha^\circ \ .$$

Die aufkommende Lichtenergie (Intensität · Fläche) auf diese Rechtecke ist gleich, d.h.

$$I \cdot S = I_0 \cdot S_0 \ .$$

Daraus folgt

$$\frac{I}{I_0} = \frac{S_0}{S} = \cos\alpha^\circ \ ,$$

also

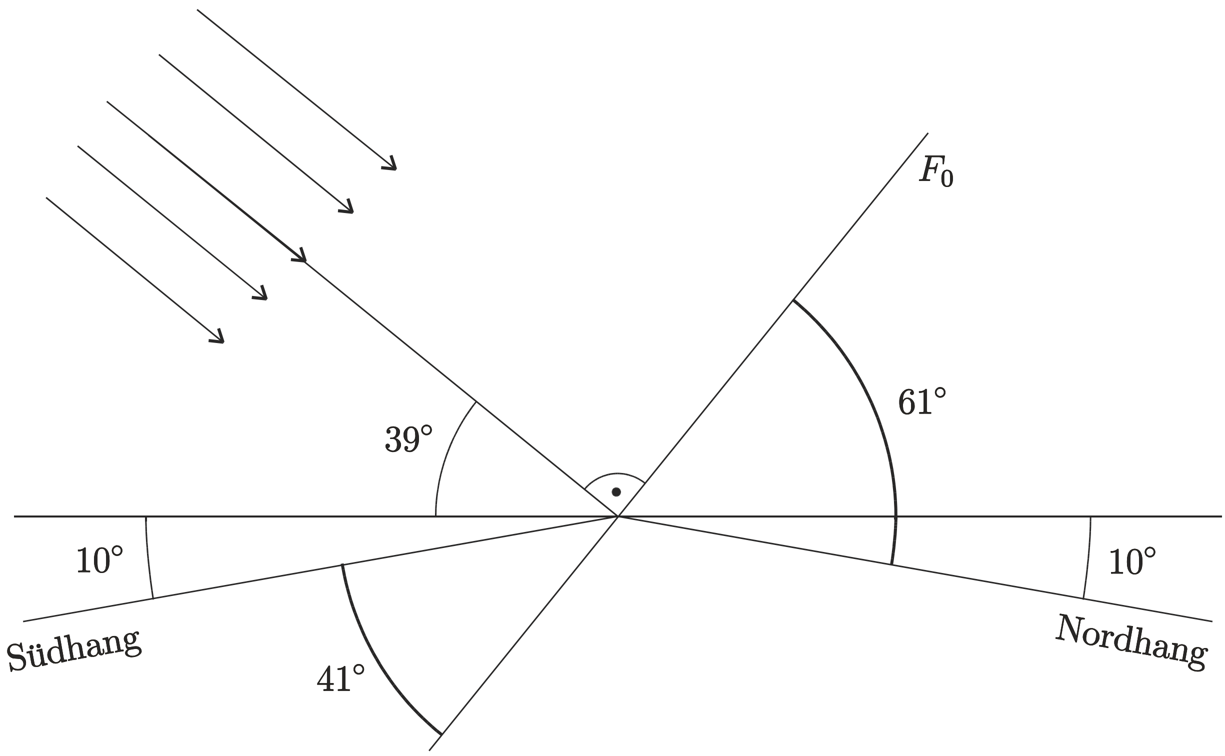
$$I = I_0 \cdot \cos\alpha^\circ \ .$$

So wird z.B. für ein Blatt, welches aus der Ebene F_0 in die Ebene F gedreht wird, die auftreffende Lichtenergie um den Faktor $\cos\alpha^\circ$ gemindert.

Zwei Grundstücke in Marburg in Nord- bzw. Südlage, deren Neigung 10° betragen, haben am 23. September zur Mittagszeit bei einem Sonnenstand von 39° ein Intensitätsverhältnis des Sonnenlichts von

$$\frac{I_N}{I_S} = \frac{\cos 61^\circ}{\cos 41^\circ} \approx 0.64 = 64\% \ .$$

Man sollte keinen Wein auf Nordhängen anbauen.



4.4 Die Umkehrfunktionen $\overset{-1}{\cos}$, $\overset{-1}{\sin}$ und $\overset{-1}{\tan}$

Da Cosinus und Sinus nicht umkehrbar sind, betrachtet man, ähnlich wie bei $y = x^2$, ein Intervall, in dem diese Funktionen streng monoton, also umkehrbar sind.

Die Funktion $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv und strikt fallend, also umkehrbar nach Satz 2.3.

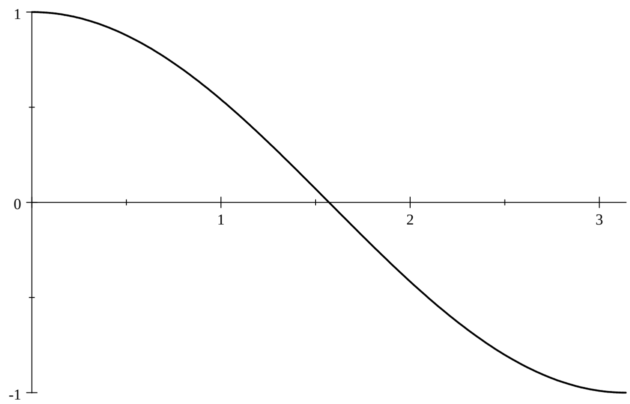
DEFINITION 1 Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ wird mit

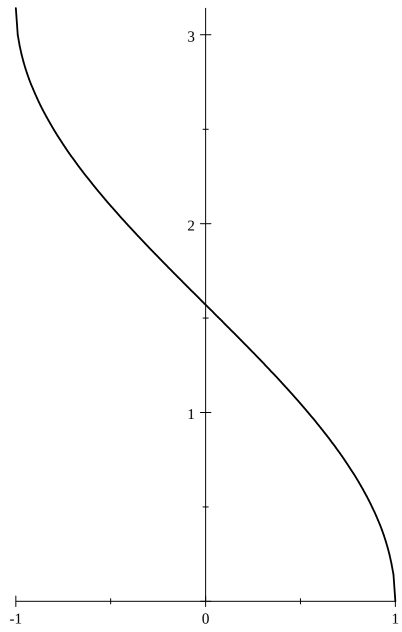
$$\arccos := \overset{-1}{\cos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

bezeichnet und heißt *Arcus-Cosinus* .

Für $t \in [0, \pi]$ und $u \in [-1, 1]$ gilt

$$u = \cos t \quad \Longleftrightarrow \quad \arccos u = \overset{-1}{\cos} u = t \ .$$





Die Funktion $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv und strikt wachsend, also umkehrbar nach Satz 2.3.

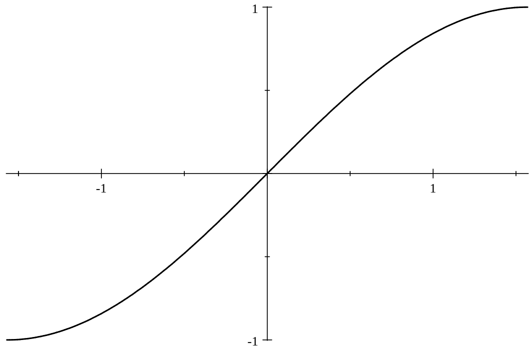
DEFINITION 2 Die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ wird mit

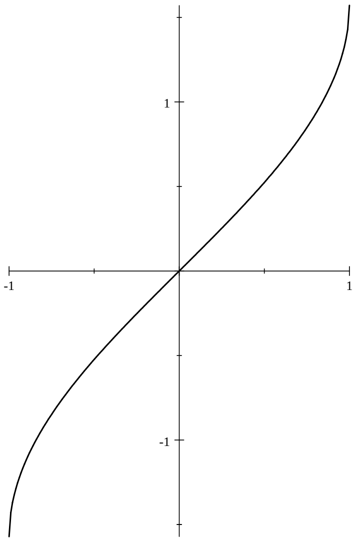
$$\arcsin := \overset{-1}{\sin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

bezeichnet und heißt *Arcus-Sinus* .

Für $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ und $u \in [-1, 1]$ gilt

$$u = \sin t \quad \Longleftrightarrow \quad \arcsin u = \overset{-1}{\sin} u = t \ .$$





Die Funktion $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv und strikt wachsend, also umkehrbar nach Satz 2.3.

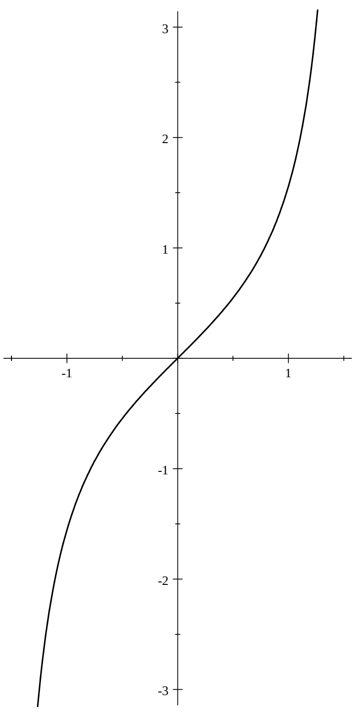
DEFINITION 3 Die Umkehrfunktion von $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ wird mit

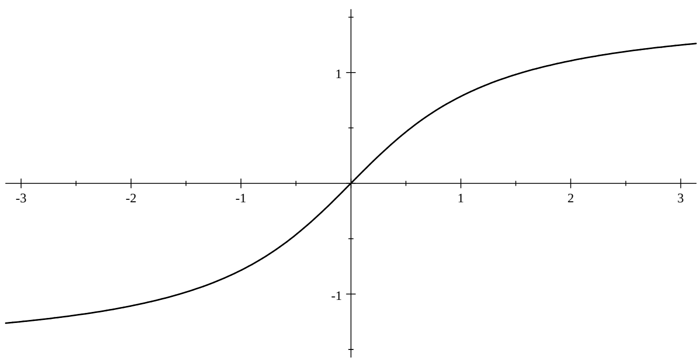
$$\arctan := \overset{-1}{\tan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

bezeichnet und heißt *Arcus-Tangens* .

Für $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$u = \tan t \quad \Longleftrightarrow \quad \arctan u = \overset{-1}{\tan} u = t \ .$$





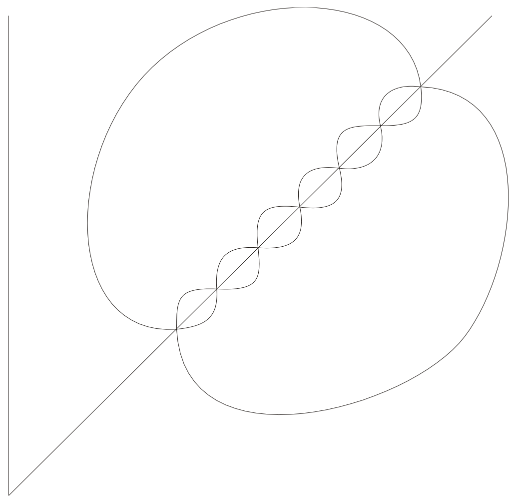
BEISPIEL 1 Für den *Steigungswinkel* α einer Geraden $y = a \cdot x + b$ gilt $\tan \alpha = a$, also $\alpha = \arctan a$. Ein Weg mit 17% Gefälle hat einen Steigungswinkel von

$$\alpha = \arctan(-0.17) = -0.168\ldots \mathrel{\widehat{=}} -9.62\ldots^\circ \ .$$

4.5 Polarkoordinaten

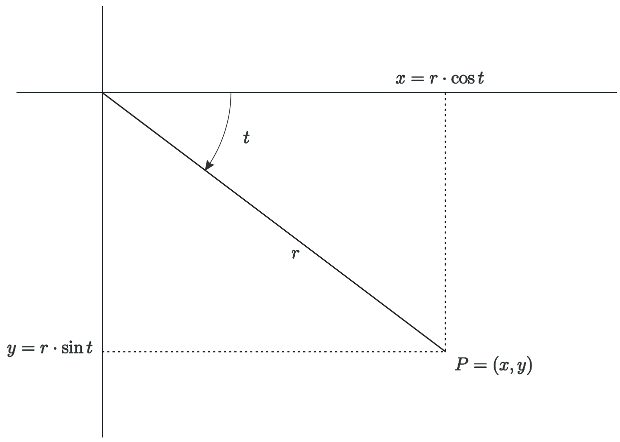
Bei dem von Karl von Frisch entschlüsselten Schwänzeltanz der Bienen übermittelt die Entdeckerbiene die Lage einer Futterquelle durch Angabe der *Richtung* und der *Entfernung* :

Beim mehrfachen Durchlaufen der skizzierten Figur auf der senkrechten Honigwabe gibt der Winkel zwischen Senkrechter und Diagonale den Winkel zwischen Sonnenrichtung und Futterquelle, die Anzahl pro Minute der abwechselnd durchlaufenden Halbkreise ist ein Maß für die Entfernung ($1000\,\mathrm{m}$ entsprechen ca. 18 Rundläufen pro Minute).



Die mathematische Beschreibung von Punkten der Ebene durch Richtungs- und Entfernungsangabe erfolgt in

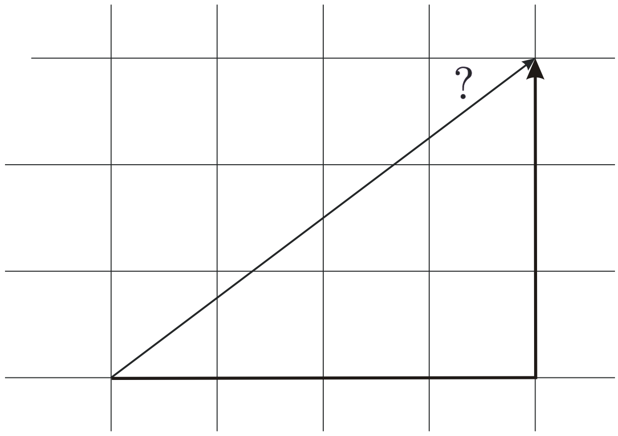
DEFINITION 1 Ist $x = r \cdot \cos t$, $y = r \cdot \sin t$ mit $r \geqslant 0$ und $-\pi < t \leqslant \pi$, so heißen r und t die *Polarkoordinaten* des Punktes $P = (x, y)$ (im Bogenmaß). Man nennt x und y die *kartesischen Koordinaten* von P .



BEMERKUNG Polarkoordinaten sind die natürlichen Koordinaten eines Ortes (bei der optischen Orientierung blickt man in *Richtung des Ortes*), sie treten demzufolge bei der Beschreibung der Orientierung vieler Lebewesen (Vögel, Fische) auf.

Prof. Dr. C. Portenier
Prof. Dr. W. Gromes

Eine Ausnahme ist die Orientierung in Manhattan:



Zur Berechnung der Polarkoordinaten aus den kartesischen Koordinaten folgern wir aus

$$x = r \cdot \cos t \quad , \quad y = r \cdot \sin t$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r^2 \ ,$$

also

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

da $r \geqslant 0$. Falls $r \neq 0$, bekommt man

$$\cos t = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin t = \frac{y}{r} \ .$$

Die Bestimmung von t führt also auf die Umkehrfunktionen von cos und sin . Diese Formeln sind äquivalent zu

$$t := \arg(x, y) := \left\{ \begin{array}{ccc} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & & y \geqslant 0 \\ & \text{falls} & \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & & y < 0 \end{array} \right\} \ .$$

In der Tat im ersten Fall $y \geqslant 0$ gilt

$$\cos t = \cos\left(\arccos\left(\frac{x}{r}\right)\right) = \frac{x}{r}$$

und, da $t \in [0, \pi]$, ist $\sin t \geqslant 0$, also

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{y^2}{r^2}} = \frac{y}{r} \ ;$$

im zweiten Fall $y < 0$ gilt

$$\cos t = \cos\left(-\arccos\left(\frac{x}{r}\right)\right) = \cos\left(\arccos\left(\frac{x}{r}\right)\right) = \frac{x}{r}$$

und, da $t \in \left]-\pi, 0\right]$, ist $\sin t \leqslant 0$, also

$$\sin t = -\sqrt{1 - \cos^2 t} = -\sqrt{\frac{y^2}{r^2}} = \frac{y}{r} \ .$$

Es gilt also

SATZ (Darstellung durch Polarkoordinaten) *Der Punkt* $(x, y) \neq (0, 0)$ *hat die Polarkoordinaten*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad t = \arg(x, y) \ .$$

DEFINITION 2 $\arg(x, y)$ heißt das *Argument* oder der *Polarwinkel* von (x, y) .

BEISPIEL 1 Für $(x, y) = (1, -2)$ erhalten wir $r^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$, also

$$r = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad t = -\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \simeq -1.11 \mathrel{\widehat{=}} -63.4^\circ \ .$$

BEISPIEL 2 Wir wollen die Funktion $a \cos \omega t + b \sin \omega t$ mit $a^2 + b^2 > 0$, $\omega > 0$, also die *Überlagerung* einer cos- und sin-Schwingung mit gleicher *Kreisfrequenz* ω , einfacher darstellen. Dazu machen wir den Ansatz einer harmonischen Schwingung und formen mit dem Satz 4.2, v und iii, um :

$$a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t = A \cdot \cos \omega (t - \tau) =$$

$$= A \cdot (\cos \omega t \cdot \cos(-\omega\tau) - \sin \omega t \cdot \sin(-\omega\tau)) = A \cdot \cos \omega\tau \cdot \cos \omega t + A \cdot \sin \omega\tau \cdot \sin \omega t \ .$$

Es folgt $a = A \cdot \cos \omega\tau$ und $b = A \cdot \sin \omega\tau$, d.h. A und $\omega\tau$ sind die Polarkoordinaten von (a, b) . Nach obigem Satz gilt demnach $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\omega\tau = \arg(a, b)$, und somit ist

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\omega t - \arg(a, b)) \ ,$$

also tatsächlich eine harmonische Schwingung.

Prof. Dr. C. Portenier
Prof. Dr. W. Gromes

4.6 Kurven

Für festes $r > 0$ beschreibt

$$t \longmapsto r \cdot (\cos t, \sin t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

einen (vielfach durchlaufenen) Kreis mit Radius r . Variiert r mit dem Polarwinkel t , so wird nach einem Umlauf, d.h. bei Vergrößerung von t um 2π , der Anfangspunkt i.a. nicht wieder erreicht, es entstehen z.B. bei monoton wachsendem r spiralförmige Kurven.

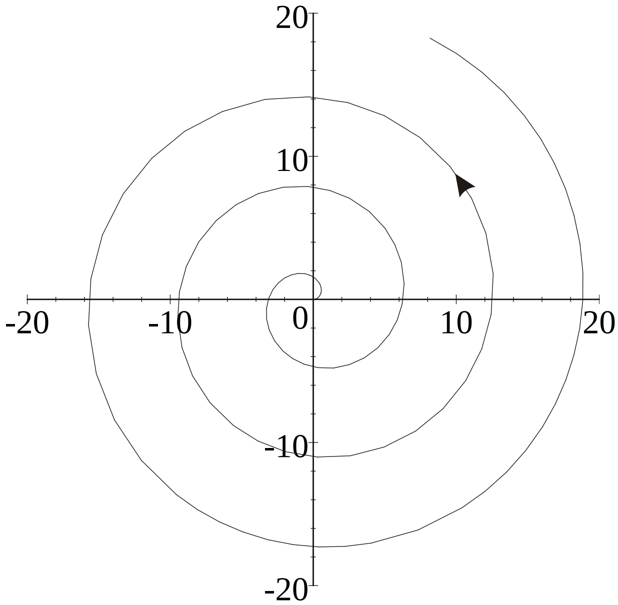
Wir betrachten dazu zwei Beispiele:

Archimedische Spirale

Für $c > 0$ beschreibt

$$t \longmapsto c \cdot t \cdot (\cos t, \sin t) = (c \cdot t \cdot \cos t, c \cdot t \cdot \sin t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine Spirale, bei der nach jedem Umlauf der Radius um den konstanten Wert $2\pi \cdot c$ zunimmt.



$c = 1$ und $t \in [0, 20]$

Der Pfeil gibt den Durchlaufungssinn an: mit wachsendem t bewegt sich der Punkt

$$c \cdot t \cdot (\cos t, \sin t)$$

auf der Spirale in Pfeilrichtung.

Archimedische Spiralen erkennt man z.B. im Rillenmuster einer Schallplatte oder angenähert bei fossilen Nummuliten.

Logarithmische Spirale

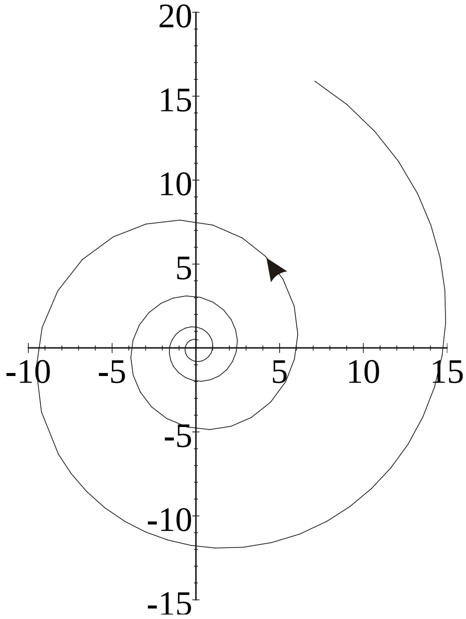
Für $c > 0$, $a > 0$ beschreibt

$$t \longmapsto c \cdot e^{a \cdot t} \cdot (\cos t, \sin t) = \left(c \cdot e^{a \cdot t} \cdot \cos t, c \cdot e^{a \cdot t} \cdot \sin t\right) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine Spirale, bei welcher der Radius $r(t) := c \cdot e^{a \cdot t}$ mit jedem Umlauf exponentiell wächst. Der Name kommt daher, daß

$$\ln r(t) = \ln c + a \cdot t$$

eine affine Funktion in t ist.



$c = 1$, $a = \frac{1}{7}$ und $t \in [-5, 20]$

Die logarithmische Spirale findet sich in nahezu vollkommener Übereinstimmung in der Abbildung eines Ammoniten wieder. Bei diesem sind periodische Vorgänge und exponentielles Wachstum gleichzeitig zu beobachten.