# Kapitel 5

# GRENZWERTE

Fassung vom 13. Februar 2006

## 5.1 Der Begriff des Grenzwertes

An den Messungen der Hefevermehrung (vgl. Beispiel 2.1.1) und dem Michaelis-Menten-Modell der Enzymeaktion (vgl. Beispiel 2.2.3 mit $R = 0$ ) läßt sich folgendes beobachten : Für große Werte von $t$ bzw. $x$ nähern sich die Funktionswerte $V(t)$ bzw. $v(x)$ einer festen Zahl, dem Grenzwert. Entspechendes gilt auch für das Diffusionsmodell 1.6.

Die Untersuchung von Grenzwerten, durch die z.B. Gleichgewichtszustände, Sättigung, aber auch, wie wir noch sehen werden, aktuelle Wachstumsraten beschrieben werden, ist für konkrete Anwendungen und als mathematische Begriffsbildung unentbehrlich.

Für die mathematische Beschreibung ist folgende Bezeichnung hilfreich; sie faßt die Fälle, daß $x$ sich einer reellen Zahl nähert oder groß bzw. klein wird, in einer Sprechweise zusammen :

**DEFINITION 1** Sei $r > 0$ gegeben. Wir sagen, daß $x$ liegt $r$-*nahe* bei

(a) $a \in \mathbb{R}$ , falls

$$a - r \leqslant x \leqslant a + r \ ,$$

(b) $+\infty$ , falls

$$r \leqslant x \ ,$$

(c) $-\infty$ , falls

$$x \leqslant -r \ .$$

Wir kommen damit zu der zentralen

**DEFINITION 2** Es seien $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , so daß es für jedes $r > 0$ ein $x \in D_f$ existiert, der $r$-nahe bei $a$ liegt.

Eine Zahl $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *Grenzwert* von $f(x)$ für $x$ gegen $a$ (oder $f(x)$ strebt gegen $b$ für $x$ gegen $a$ ), wenn gilt:

Zu jeder Zahl $r > 0$ (die gewünschte Genauigkeit für die Funktionswerte) existiert eine Zahl $\alpha_r > 0$ (die notwendige Genauigkeit für die Variable) mit folgender Eigenschaft :

Für jedes $x \in D_f$ , das $\alpha_r$-nahe bei $a$ ist, ist $f(x)$ $r$-nahe bei $b$ .

Wir schreiben dann

$$f(x) \to b \text{ für } x \to a$$

oder

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \ ,$$

oder noch

$$\lim_{x \in D_f, x \to a} f(x) = b \ ,$$

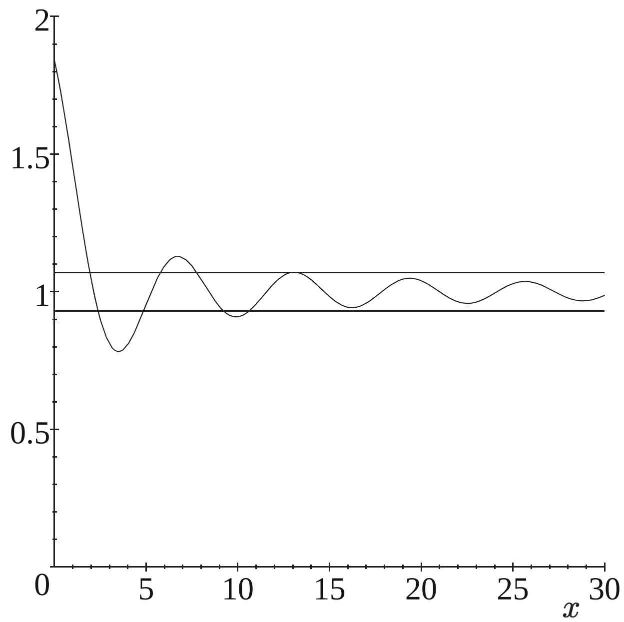
wenn man präzisieren muß.

Will man nicht so genau sein, kann man dies einfach folgendermaßen formulieren :

Ist $x$ nahe genug bei $a$ , so ist $f(x)$ nahe genug bei $b$ .

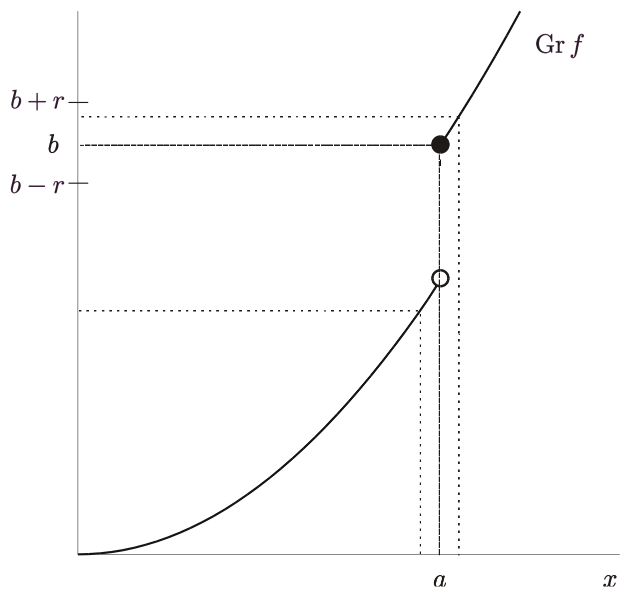
Wir lassen es aber bei einer bildlichen Vorstellung des Grenzwertes bewenden. Die Berechnung von Grenzwerten mittels der strengen Definition ist etwas knifflig. Daher werden wir Grenzwerte ausschließlich aufgrund von Standard Beispielen, der Stetigkeit von Funktionen und Rechenregeln bestimmen.

**BEISPIEL 1**




$f(x)$ konvergiert gegen 1 für $x$ gegen $\infty$

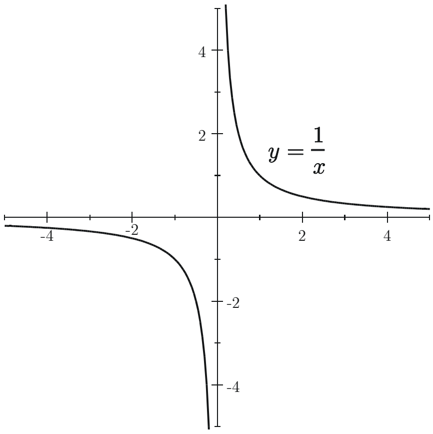
**BEISPIEL 2**




$f(x)$ konvergiert nicht für $x$ gegen $a$

## 5.2 Standardbeispiele für Grenzwerte

Anhand des Graphen der Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$




sind die vier folgenden Beispiele einsichtig.

**BEISPIEL 1**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**BEISPIEL 2**

$$\lim_{x>0, x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

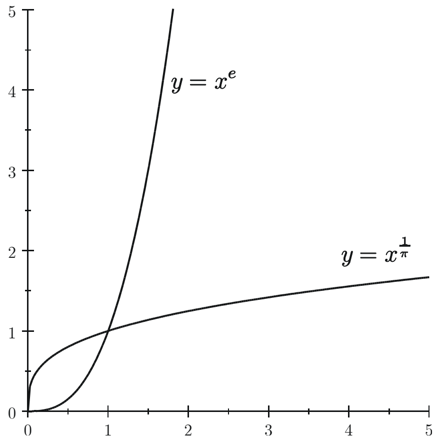
**BEISPIEL 3**

$$\lim_{x<0, x\to 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

**BEISPIEL 4**

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Sei $p > 0$ gegeben. Für die Funktion $[0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^p$



sind die folgende zwei Beispiele auch klar.

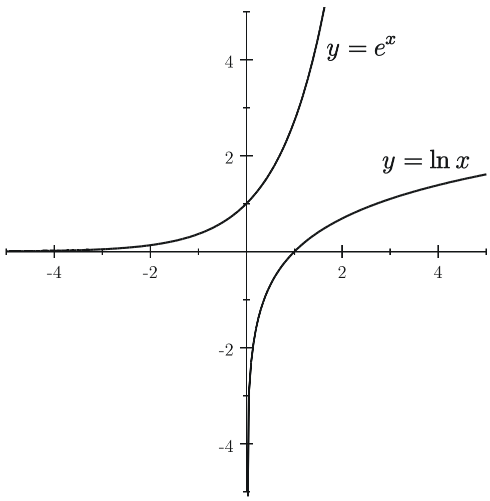
**BEISPIEL 5** Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty$$

**BEISPIEL 6** Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0} x^p = 0$$

Die vier nächsten Beispiele sind mit dem folgenden Bild




wiederum einsichtig.

**BEISPIEL 7**

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

**BEISPIEL 8**

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

**BEISPIEL 9**

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

**BEISPIEL 10**

$$\lim_{x>0, x\to 0} \ln x = -\infty$$

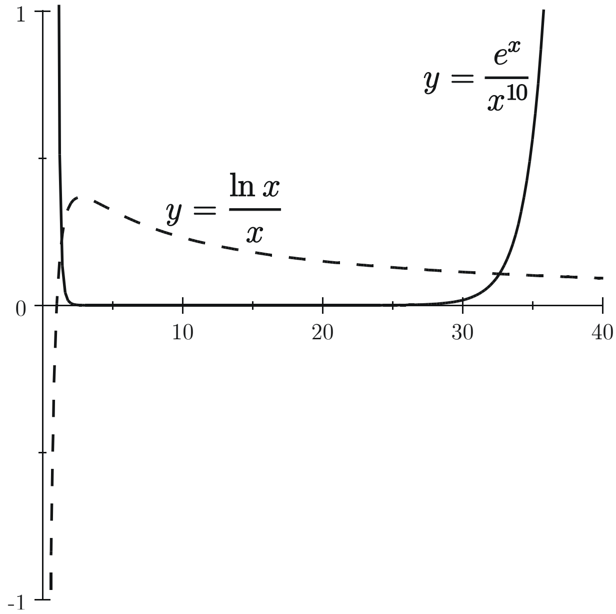
Die Exponential-Funktion wächst viel rascher, die Logarithmus-Funktion viel langsamer als jede Potenzfunktion, d.h.

**BEISPIEL 11** Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$$

**BEISPIEL 12** Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$



## 5.3 Rechenregeln für Grenzwerte

**SATZ** *Es seien* $f, g$ *Funktionen mit* $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$ *, so daß* $\lim_{x\to a} f(x)$ *und* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existieren und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *. Dann gilt:*

*(i)* ***Faktorregel***

$$\lim_{x\to a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x) \quad .$$

*(ii)* ***Summenregel***

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \quad .$$

*(iii)* ***Produktregel***

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \quad .$$

*(iv)* ***Quotientenregel***

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad , \textit{falls} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

*(v)* ***Einsetzungsregel*** *Sei* $h$ *eine Funktion, so daß* $h \circ f$ *definiert ist. Falls*

$$\lim_{x\to a} f(x) =: b \qquad \textit{und} \qquad \lim_{y\to b} h(y) \quad \textit{existieren,}$$

*so existiert* $\lim_{x\to a} h(f(x))$ *und es gilt*

$$\lim_{x\to a} h(f(x)) = \lim_{y\to b} h(y) \quad .$$

**BEMERKUNG 1** Dabei ist auch $a = +\infty$ oder $a = -\infty$ , sowie uneigentliche Grenzwerte zugelassen, solange in den Regeln (i)-(iv) die rechte Seite noch sinnvoll zu erklären ist : Dabei sei

$$c + \infty = \infty \quad \text{falls } c \neq -\infty \; ,$$

$$c - \infty = -\infty \quad \text{falls } c \neq \infty \; ,$$

$$c \cdot \infty = \infty \quad \text{falls } c > 0 \; ,$$

$$c \cdot \infty = -\infty \quad \text{falls } c < 0 \; ,$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0 \quad \text{falls } c \neq \pm\infty \; .$$

Die Fälle

$$\infty - \infty = \infty + (-\infty) \quad , \quad \pm\infty \cdot 0 \quad , \quad \frac{c}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\infty}$$

sind nicht definiert.

**BEISPIEL 1** Man könnte hoffen, daß

$$0 = \lim_{x\to\infty} 0 = \lim_{x\to\infty} (x - x) = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} (-x) = \infty - \infty \; ,$$

aber

$$1 = \lim_{x\to\infty} 1 = \lim_{x\to\infty} (1 + x - x) = \lim_{x\to\infty} (1 + x) - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty \; .$$

Dies zeigt, daß die Summenregel nicht gilt, falls $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ .

**BEMERKUNG 2** Die Einsetzungsregel kann man folgendermaßen deuten : Um $\lim_{x\to a} h(f(x))$ zu berechnen macht man die Variablenänderung $y = f(x)$ . Falls für $x \to a$ gilt $y = f(x) \to b$ , so folgt

$$\lim_{x\to a} h(f(x)) \underset{y=f(x)}{=} \lim_{y\to b} h(y) \ ,$$

wenn die rechte Seite existiert.

**BEISPIEL 2** Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^p \cdot e^{-x} = 0 \ .$$

Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$ nach Beispiel 5.2.11, also

$$\lim_{x\to\infty} x^p \cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^p}} \underset{y=\frac{e^x}{x^p}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} = 0$$

mit Hilfe der Einsetzungsregel und Beispiel 5.2.1.

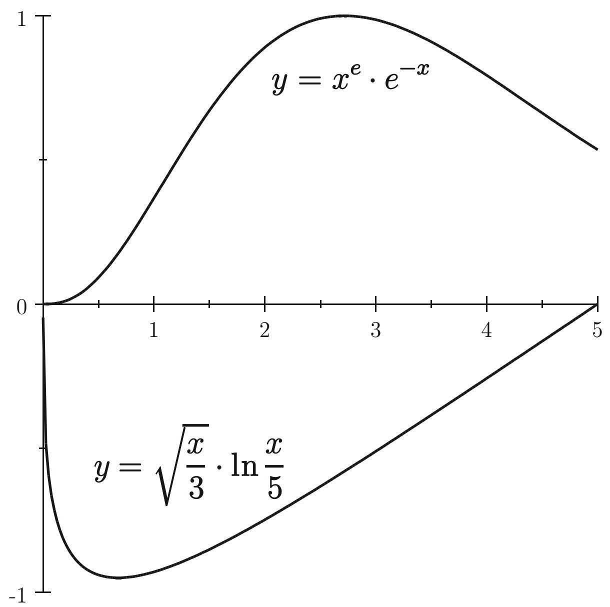
**BEISPIEL 3** Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0+} x^p \cdot \ln x = 0 \ .$$

Es gilt $\lim_{x>0, x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ nach Beispiel 5.2.2, also

$$\lim_{x\to 0+} x^p \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \left( -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} \right) \underset{y=\frac{1}{x}}{=} -\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y^p} = 0$$

mit Hilfe der Einsetzungsregel und Beispiel 5.2.12.




$x \longmapsto x^e \cdot e^{-x}$ und $x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{3}} \cdot \ln \frac{x}{5}$


Prof. Dr. C. Portenier
Prof. Dr. W. Gromes

## 5.4 Stetige Funktionen

**DEFINITION** Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig* , falls für alle $a \in D_f$ gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a) \ ,$$

d.h. bei stetigen Funktionen kann man das Limes-Symbol und das Funktionszeichen vertauschen.

**BEMERKUNG** Etwas vereinfacht läßt sich das so interpretieren, dass sich der Graph von $f$ in einer ununterbrochenen Linie durchziehen läßt, solange man $D_f$ nicht verlassen muß.

Alle bisher beschriebenen Funktionen sind stetig :

**SATZ** *Polynome, rationale Funktionen, die allgemeinen Potenzen, die Exponential- und die Logarithmusfunktion zur Basis* $a$ *, die trigonometrischen Funktionen* $\cos$ , $\sin$ , $\tan$ *und ihre Umkehrfunktionen* $\arccos$ , $\arcsin$ , $\arctan$ *sind stetig.*

Stetige Abhängigkeiten einer Größe von einer anderen sind bei Naturvorgängen fast immer gegeben; nur im molekularen Bereich des Mikrokosmos gilt das nicht mehr (natura non facit saltis).

**BEISPIEL** Die Funktion aus Beispiel 5.1.2 ist in $a$ unstetig.
Man beachte in diesem Fall, daß $\lim_{x\to a} f(x)$ nicht existiert, da

$$\lim_{x>a, x\to a} f(x) = f(a) \neq \lim_{x<a, x\to a} f(x) \ .$$

Aus den Grenzwertsätzen läßt sich leicht den folgenden Satz über Stetigkeit folgern:

**HAUPTSATZ** *Sind die Funktionen* $f$ *,* $g$ *und* $h$ *stetig, so sind die Funktionen*

$$\alpha \cdot f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f + g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \cdot g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

$$\frac{f}{g} : \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*und*

$$h \circ f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \textit{falls } W_f \subset D_h$$

*stetig.*

Der Begriff der verketteten Funktion (vgl. Definition 2.4.2) macht viele Probleme sehr viel übersichtlicher.

**BEISPIEL 1** Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto e^{-x^2}$$

ist stetig als Verkettung von

$$h : y \longmapsto e^y \quad \text{und} \quad f : x \longmapsto -x^2 \ ,$$

da

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = h\left(-x^2\right) = e^{-x^2} \ .$$

**BEISPIEL 2** Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{1 + x^2}$$

ist stetig als Verkettung von

$$h : y \longmapsto \sqrt{y} \quad \text{und} \quad f : x \longmapsto 1 + x^2 \ ,$$

da

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = h\left(1 + x^2\right) = \sqrt{1 + x^2} \ .$$

## 5.5 Weitere Beispiele für Grenzwerte

**BEISPIEL 1** Für $p < 0$ schreiben wir $x^p = \frac{1}{x^{-p}}$ . Es ist $(-p) > 0$ und damit

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-p}} \overset{\text{S. 5.3.iv}}{=} \frac{1}{\lim_{x\to\infty} x^{-p}} \overset{\text{Bsp. 5.2.5}}{=} \frac{1}{\infty} = 0 \ .$$

**BEISPIEL 2** Durch Ausklammern der höchsten Potenz erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{k+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{\frac{k}{x}+1} \overset{\text{S. 5.3, iv, ii und i}}{=} \frac{\lim_{x\to\infty} A}{k \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} 1} =$$

$$\overset{\text{S. 5.4 und Bsp. 5.2.1}}{=} \frac{A}{k \cdot 0 + 1} = A \ .$$

**BEISPIEL 3** Falls $R > 0$ erhalten wir analog

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{k+x+Rx^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{A}{x}}{\frac{k}{x^2}+\frac{1}{x}+R} =$$

$$\overset{\text{S. 5.3, iv, ii, i und iii}}{=} \frac{A \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{k \cdot (\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x})^2 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + R} \overset{\text{Bsp. 5.2.1}}{=} \frac{A \cdot 0}{k \cdot 0^2 + 0 + R} = \frac{0}{R} = 0 \ .$$

**BEISPIEL 4** Da $\lim_{x\to\infty} -x^2 = -(\lim_{x\to\infty} x)^2 = -\infty^2 = -\infty$ , folgt mit der Variablenänderung $y = -x^2$ :

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \overset{\text{S. 5.3.v}}{=} \lim_{y\to-\infty} e^y \overset{\text{Bsp. 5.2.8}}{=} 0 \ .$$

**BEISPIEL 5** Es sei $a \geqslant -1$ . Da nach Satz 5.4 das Polynom $x \longmapsto 1+x$ stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to a}(1+x) = (1+a) \ .$$

Mit der Variablenänderung $y = 1+x$ erhält man

$$\lim_{x\to a} \sqrt{1+x} = \lim_{y\to 1+a} \sqrt{y} = \sqrt{1+a}$$

da $y \longmapsto \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ als allgemeine Potenz stetig ist. Man hätte auch folgendermaßen argumentieren können. Die Funktion $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ , als Verkettung der stetigen Funktionen

$$x \longmapsto 1+x \quad \text{und} \quad y \longmapsto \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \ ,$$

ist stetig nach Hauptsatz 5.4 und somit gilt die Behauptung nach Definition der Stetigkeit.

**BEISPIEL 6** Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \overset{\text{S. 5.4}}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \overset{\text{S. 5.4}}{=} \exp\left(\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right) =$$

$$\overset{\text{S. 5.3, ii und iii}}{=} \exp\left(\sqrt{1+\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^2}\right) \overset{\text{Bsp. 5.2.1}}{=} \exp\left(\sqrt{1+0}\right) = e^1 = e\ ,$$

da exp und $\sqrt{\cdot}$ stetig sind.

## 5.6 Folgen und Reihen

**DEFINITION 1** Eine Folge ist eine auf $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ definierte Funktion, also

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : n \longmapsto f(n) = f_n \ .$$

Statt $n \longmapsto f(n)$ wird oft $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben.

**BEISPIEL 1** Z.B. sind $n \longmapsto n!$ (oder $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ ) und $n \longmapsto q^n$ (oder $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ) für $q \in \mathbb{R}$ fest Folgen.

**DEFINITION 2** Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gegen $b$ *konvergent* , falls $\lim_{n\to\infty} f_n = b$ gilt.

Die Rechenregeln für Grenzwerte gelten natürlich auch für diese speziellen Funktionen.

**BEISPIEL 2** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & & q > 1 \\ 1 & \text{falls} & q = 1 \\ 0 & & -1 < q < 1 \end{cases} \ .$$

In der Tat gilt für $q > 0$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln q} \overset{\text{S. } \underline{5.3}.\text{v}}{=} \lim_{y\to a} e^y$$

mit

$$a := \lim_{n\to\infty} (n \cdot \ln q) \overset{\text{S. } \underline{5.3}.\text{i}}{=} \ln q \cdot \lim_{n\to\infty} n = \begin{cases} \infty & & q > 1 \\ 0 & \text{falls} & q = 1 \\ -\infty & & 0 < q < 1 \end{cases} \ ,$$

also folgt das Resultat mit den Beispielen 5.2, 7 und 8. Im Fall $q = 1$ ist die Folge konstant $1$ . Die Aussage für $-1 < q \leqslant 0$ muß man extra beweisen; für $q = 0$ ist sie konstant $0$ und man beachte, daß im Fall $q = -p$ mit $0 < p < 1$ gilt

$$q^n = (-1)^n \cdot p^n$$

und

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0 \ .$$

**SATZ** *Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn für alle $a \in D_f$ und alle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_f$ mit $a = \lim_{k\to\infty} a_k$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) = f(a) \ .$$

Die folgt aus der Einsetzungsregel.

**BEISPIEL 3** Jede reelle Zahl ist Limes einer Folge von rationalen Zahlen. Z.B. liefert die Dezimalbruchzerlegung eine solche Folge.

**BEISPIEL 4** Spezielle Folgen haben wir im Diffusionsmodell 1.6 und bei der Einführung der Exponentialfunktion kennengelernt, nämlich die Folgen

$$n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

und

$$n \longmapsto p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ .$$

**DEFINITION 3** Allgemein nennt man eine Folge der Gestalt $n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine *Reihe* . Man sagt: die Reihe *konvergiert* , wenn $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ einen Grenzwert $b$ besitzt. Man schreibt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = b \ .$$

Z.B.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

## Geometrische Reihe

Für $-1 < q < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

denn nach der geometrischen Summenformel 1.6 gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ ,$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} \ .$$

Im Falle des Diffusionsmodell 1.6 ist das Gleichgewicht gegeben durch

$$\lim_{n\to\infty} N_n = N \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = N \cdot \frac{1}{1-q} = 5N \ ,$$

da $q = 0.8$ .


Prof. Dr. C. Portenier
Prof. Dr. W. Gromes