Kapitel 7

INTEGRATION

Fassung vom 13. Februar 2006

7.1 Additive Prozesse

BEISPIEL Die Aufnahme von Blei aus der Luft durch einen Organismus ist in einem kleinen Zeitintervall $[t, t+h]$ ungefähr durch $h \cdot f(t)$ gegeben, wobei $f(t)$ proportional zur Bleikonzentration in der Luft zur Zeit t ist. Um die Gesamtaufnahme in einem Zeitintervall $[a, b]$ anzunähern, zerlegt man $[a, b]$, z.B. durch Einfügen von equidistanten Zwischenpunkten

$$t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1 \ ,$$

in Teilintervallen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ .Eine Näherung S_n für die Gesamtaufnahme erhält man durch Addition der Näherungswerte für die Aufnahme in den Zeitintervallen $[t_k, t_{k+1}]$, also

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) \ .$$

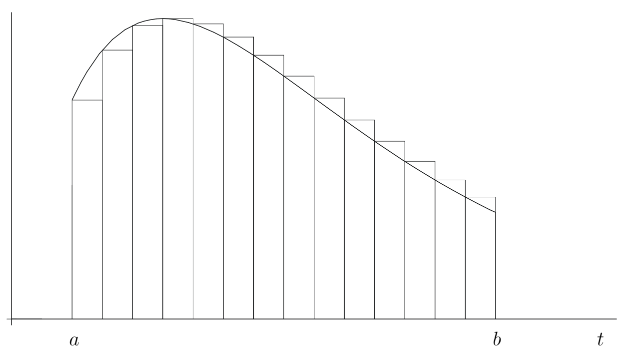
Das mathematische Modell für die Gesamtaufnahme ergibt sich, ähnlich wie in Beispiel 6.1, durch Grenzübergang.

DEFINITION Man definiert das *Integral* von f über das Intervall $[a, b]$ durch

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{n \to \infty} S_n$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Die geometrische Interpretation des Integrals entnimmt man der Skizze :



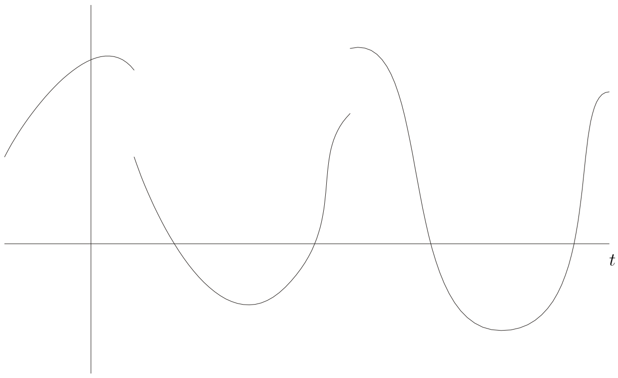
S_n ist die Summe der Rechteckflächen

BEMERKUNG 1 Der Buchstabe t in $\int_a^b f(t)\ dt$ ist eine "stumme" Variable. Man kann auch $\int_a^b f(s)\ ds$ schreiben, ohne die Bedeutung des Integrals zu verändern.

BEMERKUNG 2 Man kann zeigen, daß für stetige, sogar *stückweise stetige* Funktionen

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ existiert, also das Integral $\int_a^b f(t)\ dt$ definiert ist.



Graph einer stückweise stetigen Funktionen

BEMERKUNG 3 Integrale treten bei der Beschreibung additiver Prozesse auf, z.B. bei der Gesamtaufnahme von Chemikalien, radioaktiver oder Röntgen-Strahlungen, bei der Berechnung der Masse eines Körpers aus seiner Dichte, der Absobtion aus der optischen Dichte, der Arbeit aus der Kraft längs eines geraden Weges oder auch bei der Berechnung des Mittelwertes M einer Funktion f auf $[a,b]$:

$$M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\, dt \ .$$

Unmittelbar aus der Definition erhält man den

SATZ (Elementare Integrationsregeln) *Sind I ein Intervall in $\mathbb{R}$,*

$$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stückweise stetige Funktionen, $a, b, c \in I$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt

(i) ***Faktorregel***

$$\int_a^b \alpha \cdot f(t)\, dt = \alpha \cdot \int_a^b f(t)\, dt \ .$$

(ii) ***Summenregel***

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt \ .$$

(iii) ***Zerlegungsregel***

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt \ .$$

BEMERKUNG 4 Um die Zerlegungsregel für eine beliebige Lage der Punkte a, b und c zu erhalten, setzt man

$$\int_a^a f(t)\,dt := 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt \ .$$

7.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die obige Definition des Integrals ermöglicht die numerische approximative Berechnung von Integralen. Für eine genaue und praktikabele Berechnung benötigen wir eine andere Charakterisierung. Dazu zunächst die

DEFINITION Gegeben sei eine Funktion f . Eine differenzierbare Funktion F heißt *Stammfunktion* von f , wenn

$$F'(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in D_f$$

gilt.

BEMERKUNG Die Ableitungstabelle 6.2 ist also zugleich eine Tabelle für Stammfunktionen. Man braucht nur von rechts nach links zu lesen ! Z.B. ist die Funktion

$$F :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln x$$

eine Stammfunktion von

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x} \ .$$

Weitere Stammfunktion kann man durch Raten und Nachprüfen mittels Differentiation erhalten, andere Methoden werden im Folgenden behandelt. Im Gegensatz zur Differentiation existieren jedoch keine Regeln, die ein systematisches Aufsuchen von Stammfunktionen ermöglichen. Überdies gibt es Funktionen, z.B.

$$x \longmapsto e^{-x^2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

deren Stammfunktionen nicht in einem geschlossenen Ausdruck darstellbar sind.

Ist F eine Stammfunktion von f , so auch $F + c$ für $c \in \mathbb{R}$. Präziser gilt der

SATZ *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist jede weitere Stammfunktion von f von der Form $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.*

Der Zusammenhang mit der Integration ergibt sich aus folgender Überlegung. Sind

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion bzw. ihre Stammfunktion, so gilt nach dem Mittelwertsatz

$$F(t_{k+1}) - F(t_k) = F'(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = f(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$$

mit einem $\tau_k \in]t_k, t_{k+1}[$. Da ferner

$$\sum_{k=0}^{n-1} [F(t_{k+1}) - F(t_k)] =$$

$$= F(t_n) - F(t_{n-1}) + F(t_{n-1}) - F(t_{n-2}) + \ldots + F(t_1) - F(t_0) =$$

$$= F(b) - F(a) \ ,$$

also

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) \simeq S_n \ ,$$

kann man zeigen, daß

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} S_n = F(b) - F(a) \ .$$

Dies ist der erste Teil des folgenden zentralen Resultats :

HAUPTSATZ (der Differential- und Integralrechnung) *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in I$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

(i) Ist F eine Stammfunktion von f , so ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: \Big[F\Big]_a^b = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^b \ .$$

(ii) Die Funktion

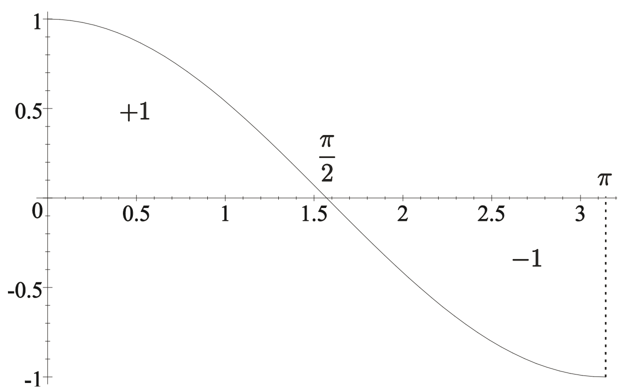
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

ist eine Stammfunktion von f .

BEISPIEL 1 Da $\sin' = \cos$, ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \Big[\sin\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1 \ ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t dt = \Big[\sin\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$



und

$$\int_0^{\pi} \cos t dt = \Big[\sin\Big]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0 \ .$$

BEISPIEL 2 Falls $a \neq -1$ ist

$$\left(\frac{1}{a+1} \cdot t^{a+1}\right)' = t^a \ ,$$

also gilt

$$\int_0^b \sqrt{t} dt = \int_0^b t^{\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^b = \frac{2}{3} \cdot b^{\frac{3}{2}} \ .$$

BEISPIEL 3 Der momentane Nährstoffverbrauch einer exponentiell wachsenden Bakterienkultur ist proportional zur Anzahl, also durch eine Funktion der Form

$$u(t) = c \cdot e^{a \cdot t}$$

gegeben. Der Gesamtverbrauch im Zeitintervall $[0, T]$ ist dann

$$\int_0^T u(t)\, dt = c \cdot \int_0^T e^{a \cdot t} dt = \left[\frac{c}{a} \cdot e^{a \cdot t}\right]_{t=0}^T = \frac{c}{a} \cdot \left(e^{a \cdot T} - 1\right) \ .$$

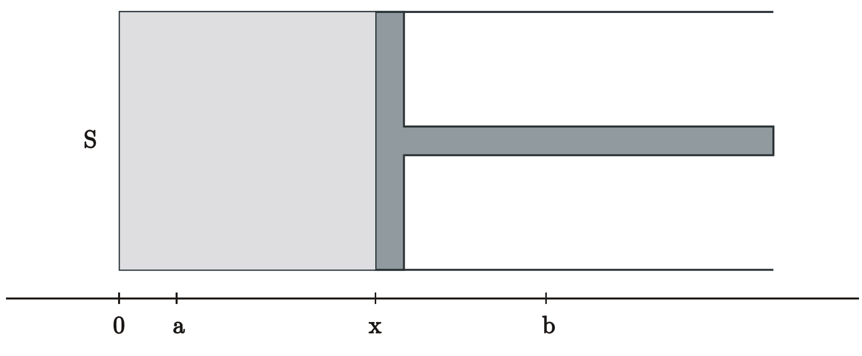
BEISPIEL 4 Wird ein Körper auf einer Strecke (von a nach b) mit eine konstante Kraft K verschoben, so ist die Verichtete Arbeit A (oder abgegebene Energie) gegeben durch

$$A = K \cdot (b - a) \ .$$

Hängt K vom Ort x ab, so "addiert" sich die Arbeit zu

$$A = \int_a^b K(x)\, dx \ .$$

Ein ideales Gas werde bei konstanter Temperatur durch einen Kolben mit Querschnitt S zusammengedrückt.



Dann ist

$$K(x) = -S \cdot p(x) \ ,$$

und nach der allgemeinen Gasgleichung gilt für den Zusammenhang von Druck p , Volumen V und absoluter Temperatur :

$$p \cdot V = R \cdot T \ ,$$

wobei R die Gaskonstante ist. Da $V(x) = S \cdot x$ erhalten wir

$$p(x) = \frac{R \cdot T}{V(x)} = \frac{R \cdot T}{S \cdot x} \ ,$$

also

$$K(x) = -S \cdot \frac{R \cdot T}{S \cdot x} = -\frac{R \cdot T}{x} \; .$$

Die geleistete Arbeit bei der Verschiebung des Kolbens von b nach a ist somit durch

$$A = \int_b^a \left(-\frac{R \cdot T}{x} \right) dx = R \cdot T \cdot \int_a^b \frac{1}{x} dx = \Big[R \cdot T \cdot \ln x \Big]_{x=a}^{b} = R \cdot T \cdot \ln \frac{b}{a}$$

gegeben.

7.3 Partielle Integration

In diesem Abschnitt und den folgenden werden Methoden zur Umformung von Integralen behandelt. Ziel dieser Unformung ist eine Zurückführung auf direkt lösbare (durch Angabe einer Stammfunktion) oder in Tabellen nachschlagbare Integrale.

Wir beginnen mit der Interpretation der Produktregel als Integrationsregel.

HAUPTSATZ *Sind f, g stetige Funktionen und F, G Stammfunktionen von f bzw. g , so gilt*

$$\int_a^b f(t) \cdot G(t)\, dt = \Big[F \cdot G\Big]_a^b - \int_a^b F(t) \cdot g(t)\, dt \ .$$

Da

$$(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G' = f \cdot G + F \cdot g$$

oder

$$f \cdot G = (F \cdot G)' - F \cdot g$$

folgt aus der Summenregel Satz 7.1.ii

$$\int_a^b f(t) \cdot G(t)\, dt = \int_a^b (F \cdot G)'(t)\, dt - \int_a^b F(t) \cdot g(t)\, dt = \Big[F \cdot G\Big]_a^b - \int_a^b F(t) \cdot g(t)\, dt \ .$$

BEISPIEL 1 Die Zellen einer sich exponentiell vermehrenden Population mögen in der Zeit $T > 0$ einen Zellzyklus durchlaufen. Nach Alberghina u.a. (1980) gilt für den mittleren RNA-Gehalt im Zeitintervall $[0, T]$:

$$R = \frac{c}{T} \cdot \int_0^T (t + T) \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt \ ,$$

wobei $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ und $c > 0$ ist.

Nach der Summenregel Satz 7.1.ii ist also

$$R = \frac{c}{T} \cdot \int_0^T t \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt + c \cdot \int_0^T e^{-\lambda \cdot t} dt \ .$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\int_0^T e^{-\lambda \cdot t} dt = \left[\frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t}\right]_{t=0}^T = -\frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{-\lambda \cdot T} - 1\right) = \frac{T}{\ln 2} \cdot \left(1 - e^{-\ln 2}\right) =$$

$$= \frac{T}{\ln 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right) = \frac{T}{\ln 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{T}{2 \ln 2} \ .$$

Das erste formen wir durch partielle Integration um : Wir setzen $f(t) := e^{-\lambda \cdot t}$ und $G(t) = t$. Als Stammfunktion von f können wir $F(t) = \frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ wählen und es ist $g(t) = G'(t) = 1$. Daraus ergibt sich

$$\int_0^T t \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \left[\frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot t\right]_{t=0}^T - \int_0^T \frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot 1 dt =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \cdot \left(T \cdot e^{-\lambda \cdot T} - 0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0}\right) + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^T e^{-\lambda \cdot t} dt = -\frac{T^2}{\ln 2} \cdot e^{-\ln 2} + \frac{T}{\ln 2} \cdot \frac{T}{2 \ln 2} =$$

$$= \frac{T^2}{2 \ln 2} \cdot \left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right) \ .$$

Insgesamt erhalten wir

$$R = \frac{c}{T} \cdot \frac{T^2}{2 \ln 2} \cdot \left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right) + \frac{c \cdot T}{2 \ln 2} = \frac{c \cdot T}{2 \ln 2} \cdot \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 + 1\right) = \frac{c \cdot T}{2 \left(\ln 2\right)^2} \ .$$

Dies zeigt, daß R proportional zu T ist.

BEISPIEL 2 Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_0^x \sin^2 t dt = \int_0^x \sin t \cdot \sin t dt = \Big[-\cos t \cdot \sin t \Big]_0^x - \int_0^x (-\cos t) \cdot \cos t dt =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int_0^x \cos^2 t dt = -\cos x \cdot \sin x + \int_0^x \left(1 - \sin^2 t\right) dt =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \Big[t\Big]_0^x - \int_0^x \sin^2 t dt = x - \cos x \cdot \sin x - \int_0^x \sin^2 t dt \ ,$$

also folgt

$$2 \cdot \int_0^x \sin^2 t dt = x - \cos x \cdot \sin x \ ,$$

d.h.

$$\int_0^x \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \cdot (x - \cos x \cdot \sin x) \ .$$

Der Hauptsatz 7.2.ii ermöglicht die Probe. In anderen Worten muß

$$x \longmapsto \frac{1}{2} \cdot (x - \cos x \cdot \sin x)$$

eine Stammfunktion von $\sin^2$ sein. In der Tat ist

$$\left[\frac{1}{2} \cdot (x - \cos x \cdot \sin x)\right]' = \frac{1}{2} \cdot (1 - [-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x]) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos^2 x + \sin^2 x\right) = \sin^2 x \ .$$

Prof. Dr. C. Portenier
Prof. Dr. W. Gromes

7.4 Substitutionsregel

Die zweite wichtige Methode zur Umformung von Integralen erhält man aus der Kettenregel.

HAUPTSATZ *Seien f eine stetige Funktion und h eine Funktion mit stetige Ableitung, so daß $f \circ h$ definiert ist. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(h(t)) \cdot h'(t)\,dt \ ,$$

falls α, β so gewählt sind, daß $a = h(\alpha)$ und $b = h(\beta)$ gilt.

Man sieht sofort : Ist F eine Stammfunktion von f , so folgt aus der Kettenregel

$$\int_\alpha^\beta f(h(t)) \cdot h'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(h(t)) \cdot h'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (F \circ h)'(t)\,dt = F \circ h|_\alpha^\beta =$$

$$= F(h(\beta)) - F(h(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Merkregel Man spricht von der Substitution (oder Variablenänderung) $x = h(t)$ und merkt sich, daß

$$dx = d(h(t)) = h'(t)\,dt \ .$$

Dabei darf man natürlich nicht vergessen, daß sich die Integrationsgrenzen ändern.

BEISPIEL 1 Wir berechnen

$$\int_0^b \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx \ .$$

Zur Vereinfachung setzt man $x+1 = t$, d.h. $x = t-1$ ($= h(t)$). Damit ergibt sich $dx = dt$ und

$$x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 1$$

sowie

$$x = b \quad \Longleftrightarrow \quad t = b+1 \ .$$

Es folgt

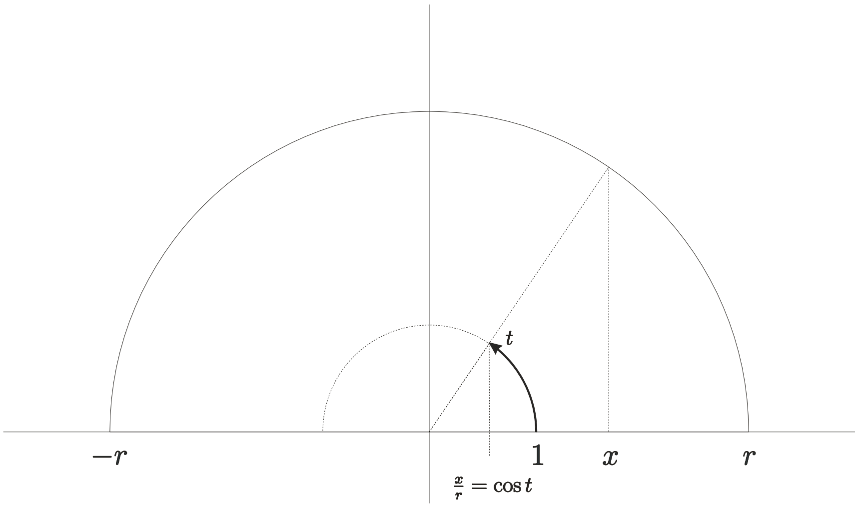
$$\int_0^b \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^{b+1} \frac{t-2}{\sqrt{t}} dt = \int_1^{b+1} \left(t^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right) dt =$$

$$= \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{b+1} - \left[2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} \right]_1^{b+1} = \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot t^{\frac{1}{2}} \right]_1^{b+1} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (b+1)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot (b+1)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{3} - 4 \right) = \frac{2}{3} \cdot (b+1)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot (b+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{10}{3} \ .$$

BEISPIEL 2 Wir berechnen die Fläche des Halbkreis mit Radius r . Für $y \geqslant 0$ ist $y^2+x^2 = r^2$ äquivalent zu $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, also ist diese Fläche gegeben durch

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx \ .$$



Setze $x = r \cdot \cos t$, also ist $dx = -r \cdot \sin t \ dt$ und es gilt

$$r = r \cdot \cos 0 \quad , \quad -r = r \cdot \cos \pi \ .$$

Da $t \in [0, \pi]$ folgt $\sin t \geqslant 0$ und somit

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \cos^2 t} = \sqrt{r^2 \cdot (1 - \cos^2 t)} = r \cdot \sqrt{\sin^2 t} = r \cdot \sin t \ .$$

Mit der Substitutionsregel und Beispiel 2 erhalten wir

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{\pi}^{0} r \cdot \sin t \cdot (-r \cdot \sin t) \, dt =$$

$$= r^2 \cdot \int_{0}^{\pi} \sin^2 t dt = r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\pi - \sin \pi \cdot \cos \pi) = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \ .$$

7.5 Partialbruchzerlegung

Eine weitere Integrationstechnik besteht in der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen. Dazu

BEISPIEL Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ und $0, c \notin [a, x]$ wollen wir

$$\int_a^b \frac{1}{t \cdot (t-c)} dt$$

berechnen. Wir machen folgenden Ansatz :

$$\frac{1}{t \cdot (t-c)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-c} \ .$$

Daraus erhält man

$$\frac{1}{t \cdot (t-c)} = \frac{A \cdot (t-c) + B \cdot t}{t \cdot (t-c)} = \frac{(A+B) \cdot t - A \cdot c}{t \cdot (t-c)}$$

und diese Gleichung gilt, falls $A + B = 0$ und $-A \cdot c = 1$, also für

$$A = -\frac{1}{c} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{c} \ .$$

Damit folgt

$$\int_a^b \frac{1}{t \cdot (t-c)} dt = \frac{1}{c} \cdot \int_a^b \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-c} \right) dt = \frac{1}{c} \cdot \Big[\left(-\ln|t| + \ln|t-c| \right) \Big]_a^b =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \left(-\ln\left|\frac{b}{a}\right| + \ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right| \right) = \frac{1}{c} \cdot \ln \frac{a \cdot (b-c)}{b \cdot (a-c)} \ .$$

7.6 Uneigentliche Integrale

Wir berechnen hier einige Integrale über unbeschränkte Integrationsintervalle I , z.B. $I = [0, \infty[$ oder $I = \mathbb{R}$.

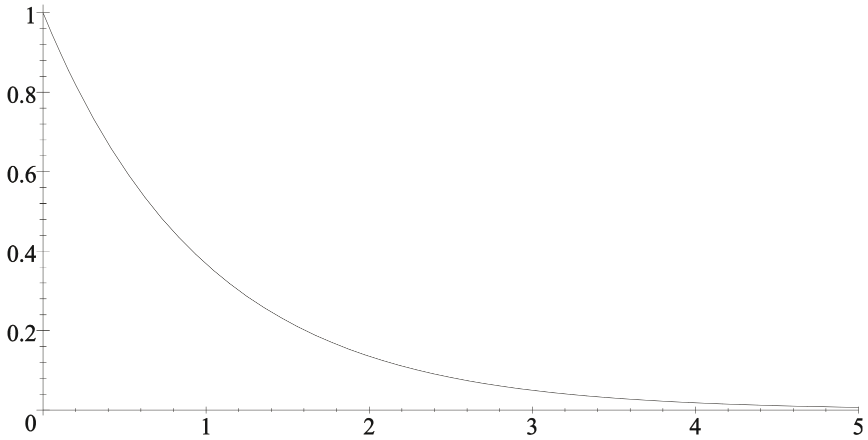
BEISPIEL 1 Es ist

$$\int_0^b e^{-t} dt = \Big[-e^{-t} \Big]_0^b = 1 - e^{-b} \ ,$$

also

$$\int_0^\infty e^{-t} dt := \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1 \ .$$

Trotz der "unbegrenzten Länge" ist die Gesamtfläche also endlich.



BEISPIEL 2 Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{t} dt = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln t \Big]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty \ .$$

BEISPIEL 3 Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{t^s} \, dt = \lim_{a\to 0} \int_a^1 t^{-s} \, dt = \lim_{a\to 0} \left[\frac{1}{-s+1} \cdot t^{-s+1} \right]_a^1 = \frac{1}{1-s} \left(1 - \lim_{a\to 0} \frac{1}{a^{s-1}} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} \infty & & s > 1 \\ & \text{falls} & \\ \frac{1}{1-s} & & s < 1 \end{array} \right. \ .$$

BEISPIEL 4 Zuerst ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{b\to\infty} \left[\overset{-1}{\tan}\right]_{-b}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left[\overset{-1}{\tan}(b) - \overset{-1}{\tan}(-b)\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \overset{-1}{\tan}(b) - \lim_{b\to-\infty} \overset{-1}{\tan}(b)$$

und da

$$\lim_{a\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan a = \pm\infty$$

folgt mit der Variablenänderung $b = \tan a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \overset{-1}{\tan}(\tan a) - \lim_{a\to-\frac{\pi}{2}} \overset{-1}{\tan}(\tan a) =$$

$$= \lim_{a\to\frac{\pi}{2}} a - \lim_{a\to-\frac{\pi}{2}} a = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \ .$$

BEISPIEL 5 Ohne Begründung sei noch ein Resultat angegeben, das für die Statistik (vgl. Kapitel 11) von Bedeutung ist :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \ .$$