Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Mathematik

für

Humanbiologen und Biologen

Prof. Dr. C. Portenier

unter Mitarbeit von

Martin Ehler

Marburg,

Wintersemester 2005 / 2006

Fassung vom 5. Februar 2006

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 1

Abgabe : Am Freitag, den 4. 11. 2005, 8.00 Uhr vor der Vorlesung

Beim Lösen der Übungsaufgaben ist zu beachten:

- Aufschreiben des benutzten Rechenganges in *für Dritte verständlicher Form.* Dazu gehören knappe Sätze, die dem besseren Verständnis der Lösung dienen.
- Auch die äussere Form ist wichtig: der Lösungstext muß gut lesbar sein, die Buchstaben -besonders in Formeln- dürfen keine Veranlassung zur Verwechslung geben.

Aufgabe 1 Um wieviel % nimmt die Oberfläche einer kugelförmigen Zelle ab, wenn ihr Volumen um 20% abnimmt ? Führen Sie dieselbe Rechnung für eine würfelförmige Zelle durch und vergleichen Sie. Erklären Sie das überraschende Ergebnis. (3)

Aufgabe 2 Gewisse Ameisenarten ermitteln die Wohnfläche A ihrer Behausung nach der Regel (3)

$$A = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{\#S}$$

(d.h. A ist proportional zur Weglänge L_1 , proportional zur Weglänge L_2 und antiproportional zur Anzahl der Kreuzungspunkte $\#S$). Um wieviel % unterscheidet sich eine Wohnfläche A_2 von einer Wohnfläche A_1 , wenn bei der Vermessung L_1 um 8% abnimmt, L_2 um 5% zunimmt und $\#S$ um $\frac{1}{5}$ steigt ?

Aufgabe 3 Ein Ernteertrag wächst in einem Jahr im Vergleich zum Vorjahr um 30% , im zweiten Jahr sinkt der Ertrag aber wieder um 20% gegenüber der letzten Ernte ab. (3)

(a) Ist der Ertrag im zweiten Jahr größer oder kleiner als der ursprüngliche Ertrag? Um wieviel % ist er gewachsen/gefallen?

(b) Wie sieht das Ergebnis aus, wenn man erst eine Einbuße von 20% und dann ein Anwachsen von 30% hat ?

Aufgabe 4 Bei einer Stichprobe von mehreren Erbsen ergibt sich für den mittleren Durchmesser D_m der Erbsen $D_m = (7.71 \pm 0.09)$ mm . (3)

(a) Wie groß ist der absolute und relative Fehler bei dieser Messung?

(b) Angenommen, Erbsen seien mathematisch korrekte Kugeln. Mit welchen Fehlern (absolut und relativ) sind dann ihre Volumina behaftet?

Vergessen Sie nicht, bei der Zettelabgabe Ihren Namen und den Namen des Tutors auf ihren Zettel zu schreiben.

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 2

Abgabe : Am Freitag, den 11. 11. 2005, 8.00 Uhr vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Der MwSt erhöht sich womöglich von 16% auf 18% . Um welchen Prozentsatz werden dann die Waren teurer? (3)

Aufgabe 2 Man denke sich ein Seil um den 40 000km langen Erdäquator gelegt, wobei die Erde als kugelförmiges Gebilde angesehen werde, und das Seil überall am Äquator eng anliege. Man verlängere nun das Seil um $10^{-5}\%$ und hebe es anschließend an, so daß es überall den gleichen Abstand zur Erdoberfläche hat. Kann dann ein Mensch unter dem Seil durchkriechen? (4)

Aufgabe 3 Aus 25%-igem Alkohol und 15%-igem Alkohol sollen 5 Liter 19%-iger Alkohol gemischt werden. (4)

(a) Wieviele Liter muß man jeweils nehmen?

(b) Welchen Prozentsatz p erhält man, wenn man 20 ml des 25%-igen Alkohols mit $q = 5$ ml des 15%-igen Alkohols mischt?

(c) Stellen Sie p als Funktion von q und q als Funktion von p dar.

Aufgabe 4 Ein Lebewesen nimmt täglich die gleiche Menge M eines Giftes auf und scheidet anschließend p Prozent der gesamten im Körper angesammelten Giftmenge wieder aus. Es sei M_n die nach n Tagen (vor der täglichen Ausscheidung) aufgenommenen Menge. (5)

(a) Man gebe eine Formel für M_n an, wobei $M_0 = 0$ vorgegeben ist.

(b) Man berechne (unabhängig von (a)) die Giftmenge $\overline{M}$, die sich im Körper befinden muss, damit die tägliche Aufnahme und Ausscheidung übereinstimmen.

(c) Man vergleiche die Zahlenwerte von M_{20} und $\overline{M}$ für $p = 20\%$ und $M = 1$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 3

Abgabe : Am Freitag, den 18. 11. 2005, 8.00 Uhr vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Natürlicher Kohlenstoff besteht aus den Isotopen ^{12}C und ^{13}C . (3)

^{12}C hat die Atommasse 12 u ,
^{13}C hat die Atommasse 13.003 u .
Das Atomgewicht des Kohlenstoffs ist 12.012 u .
Mit welchen prozentualen Anteilen kommen die Isotope im Kohlenstoff vor?

Aufgabe 2 In einer Studie A wird aus n Personen eine Gruppe von 9 Personen ausgewählt. In einer zweiten Studie B wird aus n Personen eine Gruppe von 10 Personen ausgewählt. (3)

(a) Wieviele unterschiedliche Auswahlmöglichkeiten gibt es jeweils in den Studien A und B?

(b) Wieviel Prozent der Auswahlmöglichkeiten gibt es in Studie A bezüglich denen in Studie B bei $n = 1000$?

Aufgabe 3 Bei diploiden Organismen entsteht ein Genotyp durch Kombination zweier, nicht notwendigerweise verschiedener Allele an einem bestimmten Genort. Die Reihenfolge der Allele spielt dabei keine Rolle. Nehmen wir an, dass an einem bestimmten Genort n verschiedene Allele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ möglich sind. (4)

(a) Wieviele Genotypen werden durch diesen bestimmten Genort möglich?

(b) Wieviele Genotypen gibt es, in denen das Allel A_1 oder A_2 an diesem bestimmten Genort vorkommt?

Aufgabe 4 Wir betrachten eine Mutterzelle, die zum Zeitpunkt $n = 0$ entsteht. Nach einer Zeiteinheit ($n = 1$) teilt sich die Mutterzelle in zwei Tochterzellen, von denen eine bestrahlt wird. Diese teilen sich zu den Zeitpunkten $n = 2, 3, \ldots$ wieder in je zwei Zellen. Von je zwei Tochterzellen derselben Mutterzelle wird jeweils eine bestrahlt und eine nicht. Die Bestrahlung vererbe sich auf die Nachkommen. (4)

(a) Tragen Sie für $n, l = 0, 1, 2, 3, 4$ die Anzahl der l-fach bestrahlten Zellen in der n-ten Generation in eine Tabelle ein, wobei n die Zeilen- und l die Spaltennummerierung sei.

(b) Finden Sie für allgemeine n eine Gesetzmäßigkeit für die Anzahl der l-fach bestrahlten Zellen in der n-ten Generation in Abhängigkeit zur $n-1$-ten Generation.

BEMERKUNG Die Anzahl der Zellen in der n-ten Generation ist 2^n . In der Vorlesung ist oder wird Ihnen begegnen (siehe Binomialformel, Pascalsches Dreieck):

$$(1+1)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}.$$

Vergleichen Sie mit den Zeilen Ihrer Tabelle in (a).

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 4

Abgabe : Am Freitag, den 25. 11. 2005, 8:00 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 In einem Lebensraum befinden sich zu Beginn des Sommers 2000 Insekten einer bestimmten Art. Die Population verliert während der Sommermonate in jeder Woche 20% des zu Beginn der Woche vorhandenen Bestandes. In jeder Woche kommen aber 7000 Insekten neu hinzu. (4)

(a) Stellen Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl der Insekten nach n Wochen auf.

(b) Wieviele Insekten müßten pro Woche hinzukommen, wenn der Bestand nach 12 Wochen doppelt so groß sein soll?

Aufgabe 2 Puppen einer Schmetterlingsart werden in einen Brutschrank gebracht. Man erhält folgende Meßergebnisse: (5)

Temperatur in °C	20	22	25
Dauer des Puppenstadiums in Tagen	30	26.4	22.5

.

(a) Berechnen Sie das quadratische Polynom $f_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$, welches die Daten interpoliert, d.h. $f_1(20) = 30$, $f_1(22) = 26.4$ und $f_1(25) = 22.5$.

(b) Angenommen, das Ergebnis des Versuchs bei 22 °C stünde nicht zur Verfügung, und Sie würden die beiden restlichen Ergebnisse durch eine Gerade $f_2 = a_2x + b_2$ interpolieren. Wie würde diese lauten?

(c) Wie lange dauert das Puppenstadium nach beiden Interpolationsarten bei 23 °C ?

Aufgabe 3 Zwischen den Temperaturwerten auf der Fahrenheit-Skala T_F , und den Temperaturwerten der Celsius-Skala T_C , besteht ein Zusammenhang der Form (3)

$$T_F = m \cdot T_C + b$$

mit gewissen Konstanten m und b . Für $T_C = 50\,°\mathrm{C}$ ist $T_F = 122\,°\mathrm{F}$ und für $T_C = -25\,°\mathrm{C}$ ist $T_F = -13\,°\mathrm{F}$.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten m und b.

(b) Drücken Sie T_C in Abhängigkeit von T_F aus.

Aufgabe 4 Der prozentuale Anteil A der keimenden Tomaten einer Anpflanzung, läßt sich in erster Näherung als quadratische Funktion der Temperatur t °C darstellen: (4)

$$A(t) = \frac{5}{9}t^2 - 5t + 20 \qquad , 4 \leqslant t \leqslant 17 \; .$$

(a) Bei welchen Temperaturen keimen 85% der Tomaten?

(b) Gibt es nach diesem Modell eine Temperatur, bei der 5% der Tomaten keimen?
Am Freitag, den 2. 12. 2005, 8:00 vor der Vorlesung

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 5

Abgabe : Am Freitag, den 2. 12. 2005, 8:00 vor der Vorlesung

(4)

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Umkehrfunktion sowie deren Definitionsbereich der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1+ax^2} \ ,$$

wobei $a > 0$ eine Konstante ist. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion und ihrer Umkehrfunktion.

(4)

Aufgabe 2 Bei einer Enzymreaktion wird zwischen der Reaktionsgeschwindigkeit v und der Substratkonzentration x der folgende Zusammenhang angenommen:

$$v = v(x) = \frac{Ax}{k+x} \quad , A > 0 \ , \ k > 0 \ .$$

Die Konstanten A und k sollen aus Meßdaten bestimmt werden.

(a) Zeigen Sie, daß die Funktion v durch geeignete Substitution in eine affine Funktion der Form $y = a \cdot u + b$ mit Konstanten a und b übergeht.

(b) Bei einer Meßreihe erhält man die folgenden Daten:

x	0	0.66	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0	9.0	11.0	15.0
v	0	1.65	1.95	2.55	3.00	3.35	3.10	3.50	3.70	3.65	3.85

.

Rechnen Sie die Werte mittels der Substitution aus (a) um und tragen Sie sie in einem Diagramm auf. Legen Sie eine Ausgleichsgerade (mit "Augenmaß") durch die Meßpunkte und bestimmen Sie damit Schätzwerte für A und k .

Aufgabe 3 Nach dem allometrischen Gesetz wachsen zwei Organe A und B ein und desselben Individuums gemäß (3)

$$A(t) = c \cdot (B(t))^m$$

mit gewissen Konstanten c und m . In der Zeitspanne Δt wachse A um 5% und B um 7.5% . Bestimmen Sie m .

Aufgabe 4 Der Kohlendioxidanteil A der Atmosphäre zeigt in den letzten 140 Jahren ein exponentielles Wachstum, das sich annähernd durch die Funktion (4)

$$A\,(t) = A_0 + A_1 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

beschreiben lässt, wobei der Summand A_0 den natürlichen CO_2-Anteil bezeichnet und der Summand $A_1 e^{\lambda t}$ den durch menschliche Emissionen verursachten Anteil darstellt. Es sei $A_0 := 291.5\,\text{ppm}$ (ppm = parts per million). Das Jahr 1860 stehe für den Zeitpunkt $t = 0$.

Im Jahr 1860 betrug der CO_2-Anteil $293\,\text{ppm}$, im Jahr 1972 betrug er $322\,\text{ppm}$. Ermitteln Sie aus diesen Angaben A_1 und λ . Zeichnen Sie den Verlauf von A bis zum Jahr 2000 in ein Diagramm. Wagen Sie eine Prognose für das Jahr 2020 . Wann würde nach diesem Modell der Wert $2A_0$ erreicht werden, wenn sich am Wachstumsverhalten nichts ändert ?

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 6

Abgabe : Am Freitag, den 9.12.2005, 8:00 Uhr vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Bei der Röntgenbestrahlung von Viren beobachtet man häufig eine exponentielle Abnahme der Viren: Für die Anzahl $N(D)$ der Viren nach einer Bestrahlung mit der Dosis D gelte der Zusammenhang (5)

$$N(D) = N_0 \cdot e^{-\frac{D}{D_0}} \ ,$$

wobei N_0 die Anzahl der Viren vor der Bestrahlung und D_0 eine charakteristische Strahlendosis für die spezielle Virenart sei.

(a) Wieviel Prozent Viren überleben nach der Anwendung der Strahlendosis D_0 ? Wieviel nach der Anwendung von $n \cdot D_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$?

(b) In welchem Verhältnis steht D_0 zur Dosis D_h , die benötigt wird, um die Hälfte der Viren abzutöten?

(c) Bei einer bestimmten Virenart wird eine Strahlendosis von 400 rem benötigt, um 60% der Viren abzutöten. Wie groß ist in diesem Fall D_0 ? Welche Strahlendosis wird dann benötigt, um 95% der Viren abzutöten ?

Aufgabe 2 Wir gehen von einer Uran-Probe aus, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ der Erstarrung der Erde gebildet hat. Diese Probe enthalte zur Zeit $t \geqslant 0$ (5)

$$N(t) \text{ Atome des Isotops } {}^{235}U \quad \text{und} \quad n(t) \text{ Atome des Isotops } {}^{238}U \ .$$

Nach dem Gesetz des radioaktiven Zerfalls gilt

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\Lambda \cdot t} \quad \text{und} \quad n(t) = n(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

wobei

$$\Lambda = \frac{\ln 2}{0.713 \cdot 10^9} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{4.5 \cdot 10^9} \ .$$

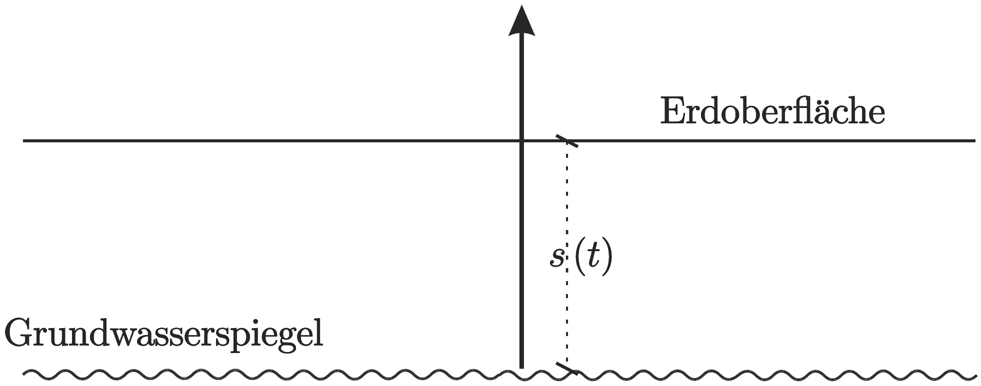
Im Jahr 2000 stellt man – etwa durch Massenspektroskopie – fest, dass der Quotient $\frac{\text{Anzahl } {}^{238}U\text{-Atome}}{\text{Anzahl } {}^{235}U\text{-Atome}}$ der Probe gleich 117.3 ist.

(a) Wie alt ist die Probe unter der Annahme $N(0) = n(0)$?

(b) Stellen Sie den Verlauf von $\frac{N(t)}{N(0)}$ bzw. $\frac{n(t)}{n(0)}$ in einem geeigneten Koordinatensystem dar, so dass Sie nur Geraden einzeichnen müssen.

Aufgabe 3 Mit Ebbe und Flut senkt und hebt sich der Grundwasserspiegel im küstennahen Bereich ungefähr gemäß (3)

$$s(t) = m + A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \ .$$



Die Erdoberfläche wird auf Null skaliert und $s(t) \leqslant 0$. Der Unterschied zwischen Höchst- und Tiefstand sei 38 cm , zur Zeit $t = 0$ sei der Tiefststand von -3 m gerade erreicht. Eine Ebbe folgt auf die nächste nach etwa 12.42 h . Bestimmen Sie die Funktion s , das heißt die Konstante m , die Amplitude A , die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und die Phasendifferenz φ .

Aufgabe 4 Berechnen Sie (ohne elektronische Hilfsmittel) die Ausdrücke: (3)

$$\log_9(3^7) \ , \quad 2^{\log_2(8)} \ , \quad \log_5(\sqrt[3]{25^2}) \ , \quad \log_3(\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}) \ , \quad \log_2(\frac{1}{16}) \ , \quad 3^{2+\log_{10}(0.01)} \ .$$

Die Klausur findet am 21. Februar 2006 um 14:15 Uhr in Hörsaal A des Chemie-Hörsaalgebäudes statt.

Mehr Informationen zur Klausur finden sich unter:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/~port/Biologen.html

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 7

Abgabe : Am Freitag, den 16. 12. 2005, 8:00 vor der Vorlesung

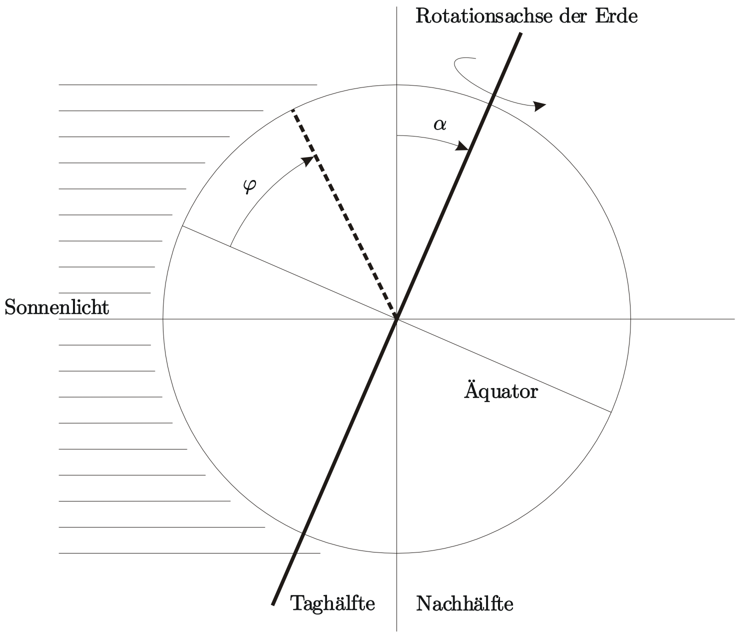
Aufgabe 1 Die Rotationsachse der Erde ist gegenüber der Senkrechten zur Ebene der Erdbahn geneigt, was die jahreszeitlichen Schwankungen bedingt. Im Laufe eines Jahres variiert dieser Winkel α zwischen $\pm 23.5^\circ$. Die Tageslänge T (d.h. die Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang) hängt vom Breitengrad φ und dem Neigungswinkel α gemäß der Formel (4)

$$T = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\left(\tan\varphi \cdot \tan\alpha\right) \right) \cdot T_0 \ , \qquad \text{für } -\frac{\pi}{2} + |\alpha| < \varphi < \frac{\pi}{2} - |\alpha|$$

ab, wobei $T_0 = 24\,\mathrm{h}$.

(a) Zeichnen Sie den Verlauf von T als Funktion von φ bei festem $\alpha = 23.5^\circ$ (entspricht auf der Nordhalbkugel dem kürzesten Tag des Jahres, dem 22. Dezember) in ein Diagramm und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

(b) Ein Patient benötigt aufgrund einer rätselhaften Erkrankung mindestens 10 h natürliches Tageslicht um zu überleben. Bis zu welchem Breitengrad φ muß dieser Patient mindestens nach Süden gebracht werden, damit er den Winter überlebt ?



Aufgabe 2 Zur Auswertung eines Experiments über Orientierung haben Sie zwei Computerprogramme zur Verfügung. Für eines müssen Sie kartesische Koordinaten eingeben, das andere benutzt jedoch Polarkoordinaten. Aus Ihren Unterlagen bestimmen Sie den ersten Punkt in Polarkoordinaten: 80 km Entfernung vom Ursprung und der Winkel zwischen x-Achse und dem zu bestimmenden Ort entgegen dem Uhrzeigersinn beträgt 150°. Der zweite Ort befindet sich 20 km westlich und 70 km nördlich des Ursprungs.

(a) Erstellen Sie eine Zeichnung, und bestimmen Sie die jeweils andere Koordinatendarstellung der beiden Orte graphisch.

(b) Bestimmen Sie die jeweils andere Koordinatendarstellung rechnerisch, um beide Programme benutzen zu können.

(4)

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{11+2x-3x^4+7x^5}{13-4x^3+4x^4-8x^5} \ ,$$

(b)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \ ,$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\left(1+x^4\right)e^{-2x}\right) \ ,$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} x^x \ .$$

Aufgabe 4 Eine radioaktive Substanz zerfalle mit einer Halbwertszeit von $10,5$ Stunden. Wenn N_0 die ursprüngliche Anzahl Atome bezeichnet, wieviele Stunden dauert es, bis nur noch $\frac{N_0}{1024}$ Atome übrig sind.

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 8

Abgabe : Am Freitag, den 13. 1. 2006, 8:00 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Die geschätzten Reserven R eines nicht erneuerbaren Rohstoffes betragen weltweit das 30-fache des augenblicklichen Jahresverbrauches J_0. (5)

(a) Wie lange reicht der Rohstoff, wenn der Verbrauch jährlich um $p = 2\%$ gegenüber des Verbrauchs des Vorjahres reduziert wird.

(b) Wie klein kann p gewählt werden, so dass der Rohstoff niemals ausgeht?

Aufgabe 2 Berechnen Sie den Grenzwert (5)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{5^{n-1}} \right) - \frac{1}{n^4} \left(1 + 2 + ... + n\right)^2 \right) .$$

Aufgabe 3 Differenzieren Sie folgende Funktionen: (5)

(a) $f_1(x) = 3\cos x + e^x \sin x + \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$,

(b) $f_2(x) = \sin(x \cdot \sin x) + \arcsin(x^2)$,

(c) $f_3(x) = \ln(2x) + \sqrt{1+x^2}$.

Aufgabe 4 Die n-fache Wiederholung eines Experiments liefere die Messwerte $x_1, \ldots, x_n$. (5)
Minimieren Sie das "Mittel m der quadratischen Abweichungen":

$$x \longmapsto m(x) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x - x_k)^2 .$$

Aufgabe 5 Wird ein gewisses Dopingmittel zum Zeitpunkt $t = 0$ in einen Muskel injiziert und gelangt anschließend in die Blutbahn, so wird die Konzentration $f(t)$ im Blut für $t \geqslant 0$ (wobei t in Tagen angegeben werde) annähernd durch (5)

$$f(t) = c \cdot \left(e^{-a\cdot t} - e^{-b\cdot t}\right)$$

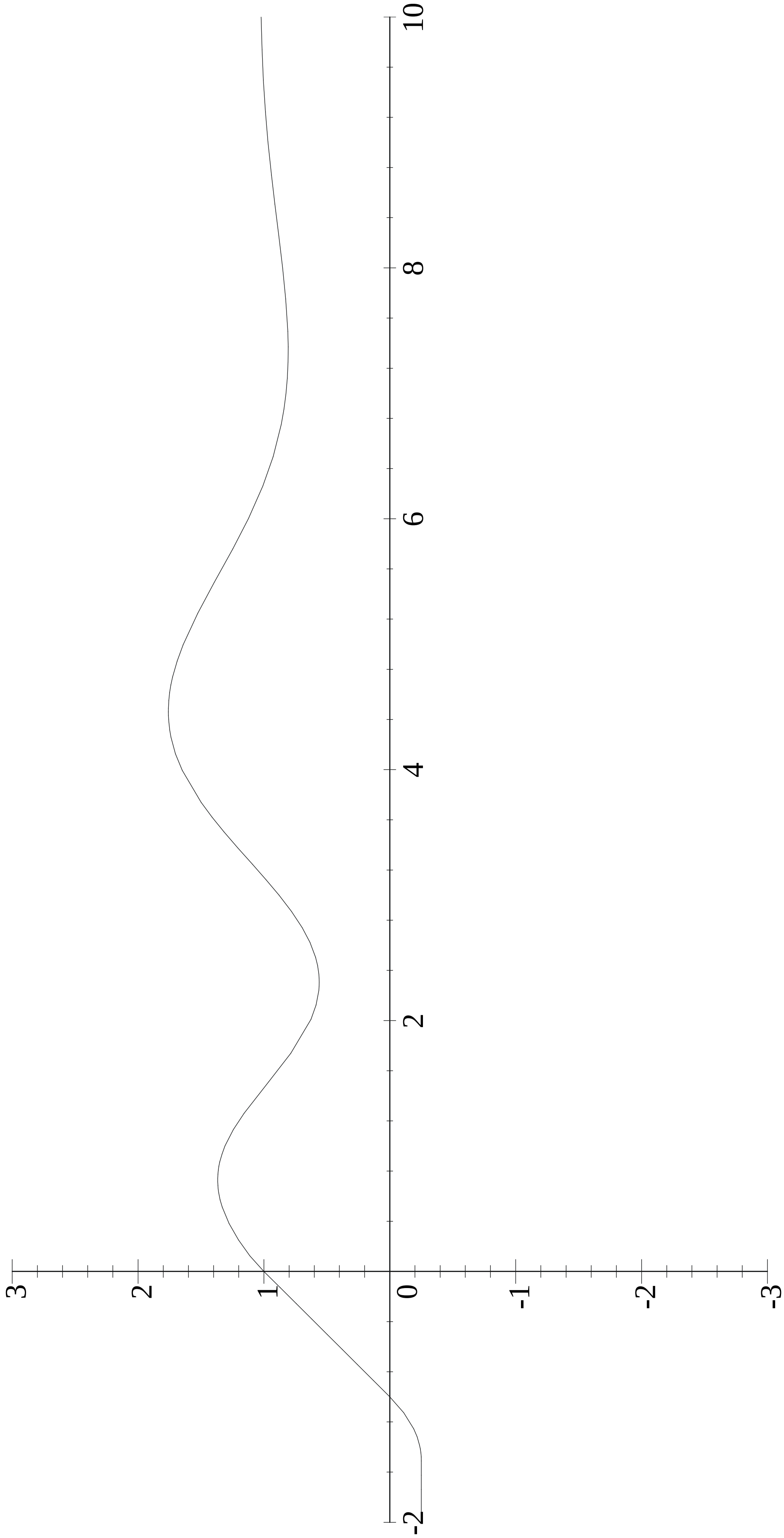
beschrieben, wobei die Konstanten $b > a > 0$ und $c > 0$ vom verwendeten Mittel abhängen.

(a) Bestimmen Sie die lokalen und absoluten Extremstellen der Funktion f . (Betrachten Sie also auch $t = 0$ und $t \to \infty$).

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f für ein Dopingmittel, das zu den Konstanten $c = 1$, $a = 1$ und $b = 2$ gehört. Der Grenzwert bei einer Dopingkontrolle betrage 0.05 für dieses Mittel. Wieviele Tage vor der Tour de France muss das Mittel einem Fahrer mindestens gespritzt werden, damit er, falls er am ersten Tag der Tour kontrolliert wird, nicht positiv ist ?

Aufgabe 6 Wenn Sie das Zusatzblatt quer halten, ist der Graph einer Funktion $y = f(x)$ gegeben. Skizzieren Sie im selben Koordinatensystem den Graphen der Ableitung. (Tip: Erst Nullstellen und lokale Extrema der Ableitung einzeichnen.) (5)

Frohe Weihnachten und ein gutes Jahr 2006


10
8
6
4
2
-2
3
2
1
0
-1
-2
-3

Fachbereich Mathematik und Informatik **C. Portenier, M. Ehler**
Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2005 / 2006**

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 9

Abgabe : Am Freitag, den 20. 1. 2006, 8:00 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Experimentelle Messungen haben gezeigt, daß der Energieverbrauch E eines Wellensittichs beim Fliegen in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit v näherungsweise durch die Formel (4)

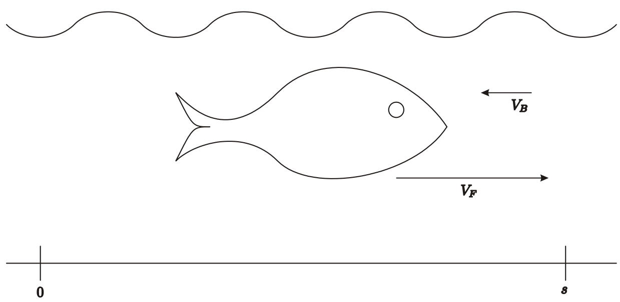
$$E(v) = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{1}{100} (v-20)^2 + 21 \right)$$

gegeben ist. Dabei wird E in Kalorien pro g Körpergewicht pro km Flugstrecke gemessen und die Geschwindigkeit v in $\mathrm{km\,h^{-1}}$. Man geht davon aus, daß $v > 0$ ist, da der Wellensittich sonst abstürzt. Bei welcher Geschwindigkeit ist der Energieverbrauch minimal ?

Aufgabe 2 Schwimmt ein Fisch eine Strecke s gegen die Strömung eines Baches, der mit der Geschwindigkeit V_B fließt und hat der Fisch die zur Strömung relative Geschwindigkeit V_F , so ist sein Energiebedarf (4)

$$E_s(V_F) = c \cdot \frac{V_F^k \cdot s}{V_F - V_B}$$

mit Konstanten $c > 0$, $k > 2$. Die Konstante c rührt von der Reibung des Wassers her, k von der Form des Fisches.



(a) Für welche Geschwindigkeit V_F verbraucht der Fisch die wenigste Energie, unter der Voraussetzung, daß er gegen den Strom vorwärts kommt, d.h. was ist die optimale Schwimmgeschwindigkeit.

(b) Stellen Sie E_s als Funktion von V_F graphisch dar, d.h. skizzieren Sie das prinzipielle Aussehen der Funktion mit Begründung (kleine Kurvendiskussion).

Aufgabe 3 Die Leistung L ist definiert als die Abgabe von Energie pro Zeiteinheit, also: (5)

$$L = L(t) = \lim_{h\to 0} \frac{E\,(t+h) - E\,(t)}{h} = E'\,(t) \ ,$$

wenn $E(t)$ die gesamte bis zur Zeit t abgegebene Energie darstellt.

Nehmen wir an, daß die Leistung eines Menschen, der mit dem Fahrrad die Lahnberge erklimmt, gemäß der Formel

$$L\,(t) = L_0 \cdot \frac{1}{1+\lambda t}$$

abnimmt, wobei

$$L_0 = 100\,\mathrm{W} = 1433\,\mathrm{cal\,mn}^{-1} \quad , \quad \lambda = 0.02\,\mathrm{mn}^{-1} \ .$$

Die Zeit t werde in der Einheit Minuten (mn) benutzt und $E(0) = 0$. Wie groß ist dann die gesamte Energie, die er nach 30 Minuten abgegeben hat?

Aufgabe 4 Berechnen Sie die folgenden Integrale: (3)

(a)

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2} \cdot |x| \ dx \ .$$

(b) Für $a > 0$:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{a}} \sin\,(ax) \ dx \ .$$

(c)

$$\int_{2}^{3} \sqrt[3]{1+x}\, dx \ .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 10

Abgabe : Am Freitag, den 27. 1. 2006, 8:00 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden Integrale: (3)

(a)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx$$

Hinweis: Ermitteln sie die beiden Nullstellen x_1, x_2 des Nenners und führen Sie eine Partialbruchzerlegung $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten A, B durch.

(b) Für $x \geqslant 0$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^4}\, dt\ .$$

Hinweis: Substitution $t^2 = u$.

(c)

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^4}\, dt\ .$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie nun diese Integrale: (4)

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^3 x\, dx$$

(b)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(1+x)\ dx$$

(c)

$$\int_0^\infty \sqrt{t} \cdot e^{-\sqrt{t}}\, dt\ .$$

Hinweis: Erst Substitution, dann partielle Integration.

Aufgabe 3 Berechnen Sie den Inhalt derjenigen Fläche im rechtwinkligen (x, y) - Koordinatensystem, die nach unten von der Parabel $y = x^2$ und nach oben von der Parabel $y = 1 + \frac{1}{2}x^2$ begrenzt wird. (4)

Aufgabe 4 Eine Droge wird zur Zeit $t = 0$ in einen Muskel injiziert. Wir nehmen an, dass der Muskel die Droge mit der konstanten Rate m in das Blut abgibt und dass das Blut die Droge mit der konstanten Rate $b \neq m$ abbaut. Es lässt sich dann zeigen, dass die zur Zeit t im Blut enthaltene Drogenmenge durch (5)

$$u(t) = \frac{c \cdot m}{b - m} \cdot \left(e^{-m \cdot t} - e^{-b \cdot t}\right)$$

gegeben ist. Sei $V_B(t)$ die bis zum Zeitpunkt t vom Blut abgebaute Drogenmenge. Für die Abbaugeschwindigkeit $V_B'(t)$ der Droge im Blut gelte

$$V_B'(t) = b \cdot u(t) \ .$$

(a) Berechnen Sie $V_B(t)$ und zeigen Sie

$$\lim_{t \to \infty} V_B(t) = c \ .$$

(b) Sei $V_M(t)$ die bis zum Zeitpunkt t vom Muskel abgegebene Drogenmenge. Für die Abbaugeschwindigkeit $V_M'(t)$ der Droge im Muskel gelte

$$V_M'(t) = c \cdot m \cdot e^{-m \cdot t} \ .$$

Wie groß ist die gesamte vom Muskel abgegebene Drogenmenge, also $\lim_{t \to \infty} V_M(t)$?

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 11

Abgabe : Am Freitag, den 3. 2. 2006, 8:00 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Tritt Licht in eine Flüssigkeit ein, so beobachtet man eine Abnahme der Lichtintensität I mit zunehmender Eindringtiefe x . Experimentell stellt man fest, dass die auf eine Streckeneinheit bezogene Intensitätsabnahme $-I'(x)$ proportional zu der in der Tiefe x noch vorhandenen Intensität $I(x)$ ist. (5)

(a) Der Proportionalitätsfaktor sei $\lambda > 0$. Drücken Sie den Sachverhalt mittels einer Differentialgleichung für I aus und lösen Sie diese Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$.

(b) Ist die Flüssigkeit nicht homogen, so hängt auch die Abnahmerate λ von der Tiefe x ab: $\lambda = \lambda(x)$. Welche Differentialgleichung ergibt sich jetzt für I ? Bestimmen Sie $I(x)$, wenn

$$\lambda(x) = 1 + \sin x \ .$$

Aufgabe 2 Eine Population vermehrt sich nach dem logistischen Gesetz (5)

$$f'(t) = a \cdot f(t) - b \cdot f^2(t) \ ,$$

$f(t)$ = Populationsumfang zur Zeit t . Die Konstanten a und b sollen geschätzt werden.

(a) Man stellt fest, dass in der Anfangsphase der Populationsumfang sehr gering ist (gegenüber dem Sättigungswert $f_\infty = \lim_{t\to\infty} f(t)$, gegen den der Umfang nach einigen Tagen konvergiert). In dieser Phase vermehrt sich die Population stündlich mit einer annähernd konstanten Rate von 10% . Schätzen Sie daraus a ab.

Hinweis: Wenn der Populationsumfang $f(t)$ sehr klein ist, spielt der $f^2(t)$-Term in der Differentialgleichung fast keine Rolle und das Wachstumsverhalten wird näherungsweise durch $f'(t) = a \cdot f(t)$ beschrieben.

(b) Nach einigen Tagen vermehrt sich die Population immer langsamer und der Umfang tendiert schließlich gegen den Wert $f_\infty = 1000$. Schätzen Sie daraus b .

(c) Zu Beginn der Beobachtung bestand die Population aus $f(0) = 5$ Individuen. Nach welcher Zeit wird nach diesem Modell der Umfang 500 erreicht ?

Aufgabe 3 In einer menschlichen Population sind 54 von der Blutgruppe A , 16 von der Blutgruppe B , 4 von der Blutgruppe AB und 49 von der Blutgruppe 0 . Ein Individuum wird zufällig aus der Gruppe ausgewählt. (3)

(a) Geben Sie zu dem Ergebnisraum $\Omega = \{A, B, AB, 0\}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion P zur Beschreibung des Sachverhalts an.

(b) Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse:

(a) *Das Individuum hat die Blutgruppe* A *oder* B *.*
(b) *Das Individuum hat nicht die Blutgruppe* 0 *.*

Aufgabe 4 In einer menschlichen Population seien p, q, r die Wahrscheinlichkeiten der Allele a, b, o , wobei $p+q+r = 1$. Nehmen Sie Zufallspaarungen an. Welche Wahrscheinlichkeiten haben dann die folgenden Genotypen eines Kindes: oo , aa , bb , ab ($= ba$), ao ($= oa$), bo ($= ob$) ? (5)

Bei den Blutgruppen sind a, b dominant zu o . Daher gibt es nur die vier Phänotypen

(1) Blutgruppe 0 (Genotyp oo)

(2) Blutgruppe AB (Genotyp ab)

(3) Blutgruppe A (Genotyp aa oder ao)

(4) Blutgruppe B (Genotyp bb oder bo).

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Blutgruppen an, wenn $p = 29\%$, $q = 7\%$ und $r = 64\%$ sind.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

C. Portenier, M. Ehler
Wintersemester 2005 / 2006

Übungen zur Mathematik für Humanbiologen und Biologen

Blatt 12

Abgabe : Am Freitag, den 10. 2. 2006, 8:00 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 In einem Experiment kreuzte Gregor Mendel Erbsen, die sich in der Form (rund (R) oder runzelig (r)) und der Farbe (gelb (G) oder grün (g)) unterscheiden. Der Genotyp einer Erbse ist dann durch zwei Genpaare bestimmt (z.B. $RRGg$, wenn auf beiden Formgenen das Allel R vorliegt und auf den Farbgenen je ein Allel G und g). Dabei ist R dominant zu r und G dominant zu g . Kreuzt man reinerbig runde und gelbe Eltern (Genotyp $RRGG$) mit reinerbig runzligen und grünen (Genotyp $rrgg$), so ergeben sich für die Tochtergeneration die folgenden Wahrscheinlichkeiten: (6)

Genotyp	$RRGG$	$RRGg$	$RRgg$	$RrGG$	$RrGg$	$Rrgg$	$rrGG$	$rrGg$	$rrgg$
Wahrsch.	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Ereignisse A, B in (a), (b) und (c) unabhängig voneinander sind:

(a) "Die Erbse ist reinerbig in der Form (d.h. es kommt nur RR oder rr vor)"
"Die Erbse ist reinerbig in der Farbe (d.h. es kommt nur GG oder gg vor)"

(b) "Die Erbse ist reinerbig in der Form"
"Die Erbse ist reinerbig in Form und Farbe"

(c) "Die Erbse ist rund (d.h. R kommt vor)"
"Die Erbse ist grün (d.h. G kommt nicht vor)"

Aufgabe 2 In einem vereinfachten Modell wächst ein Baum in einem Jahr je nach Wetterlage $40\,\text{cm}$, $50\,\text{cm}$ oder $60\,\text{cm}$, mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Man geht davon aus, dass das Wachstum in einem Jahr unabhängig von dem Wachstum in einem anderen Jahr ist. (4)

(a) Welche Höhen kann der Baum nach 3 Jahren bei einer Anfangshöhe von $3\,\text{m}$ erreichen? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erreicht er diese Höhen?

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standartabweichung der Höhe.

Aufgabe 3 Die Samen einer Pflanze keimen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% . Es seien 15 Samen zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit keimen (4)

(a) alle Samen ?

(b) mindestens zwei Samen ?

Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen, die die Anzahl der keimenden Samen angibt, und geben Sie einen kurze Interpretation des Erwartungswertes.

Aufgabe 4 Auf einem Objektträger mit eingeritztem Quadratgitter von 100 Quadraten wird eine Flüssigkeit, die einzelne Zellen enthält, gleichmäßig verteilt. (4)

(a) Die mittlere Anzahl der Zellen pro Quadrat sei 2 . Berechnen Sie, unter Annahme einer geeigneten Verteilung, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Quadrat keine oder eine Zelle enthält, also $P(X \leqslant 1)$, sowie $P(X = 2)$ und $P(X > 2)$.

(b) Die mittlere Anzahl der Zellen pro Quadrat sei Ihnen nun unbekannt. Sie sehen aber, dass 5 Quadrate ohne Zellen sind. Geben Sie eine Schätzung für die zugehörige Poissonverteilung.