Chapitre 3

BASES HILBERTIENNES

Version du 7 janvier 2005

3.1 Sommes hilbertiennes

Nous allons maintenant généraliser le théorème 15.18 du cours d'Analyse [9] sur les bases hilbertiennes.

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien, $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels complets deux à deux orthogonaux, P_j l'orthoprojecteur de F sur $\mathcal{H}_j$, $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par les $\mathcal{H}_j$ et $\xi \in F$.*

Alors

$$\mathcal{G} = \overline{\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j} \ ,$$

*la famille $(P_j\xi)_{j\in J}$ est absolument de carré sommable, i.e. $\left(\|P_j\xi\|^2\right)_{j\in J}$ est sommable, l'ensemble $\{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ est dénombrable et si $\sigma : I \longrightarrow \{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ en est une énumération, on a l'**inégalité de Bessel***

$$\sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 = \sum_{l=0}^{\sup I} \left\|P_{\sigma(l)}\xi\right\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ .$$

En outre les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\xi \in \mathcal{G}$.

(ii) ***Egalité de Parseval***

$$\sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 = \|\xi\|^2 \ .$$

(iii) La famille $(P_j\xi)_{j\in J}$ est sommable de somme $\xi = \sum_{j\in J} P_j\xi$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ satisfaisant à $L \supset K_\varepsilon$, on ait

$$\left\|\sum_{j\in L} P_j\xi - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

(iv) Pour toute énumération σ d'une partie dénombrable D de J contenant $\{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ la série $\sum_{l=0}^{\sup I} P_{\sigma(l)}\xi$ est convergente, et on a

$$\xi = \sum_{l=0}^{\sup I} P_{\sigma(l)}\xi \ .$$

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(J)$ soit $\mathcal{H}_K := \sum_{j\in K} \mathcal{H}_j$. Si $L \in \mathfrak{K}(J)$ est tel que $K \cap L = \emptyset$, alors $\mathcal{H}_K \perp \mathcal{H}_L$, donc en particulier $\mathcal{H}_K \cap \mathcal{H}_L = \{0\}$. Ceci montre que la somme des $\mathcal{H}_j$, i.e. le sous-espace vectoriel engendré par les $\mathcal{H}_j$, est directe. On a donc bien $\mathcal{G} = \overline{\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j}$. D'autre part le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_K = \boxplus_{j\in K} \mathcal{H}_j$ est complet par l'exercice 2.1.1.b, et en posant $P_K := P_{\mathcal{H}_K}$, on a

$$P_K\xi = \sum_{j\in K} P_j\xi \ .$$

Grâce à l'égalité de Pythagore, on obtient

$$\sum_{j\in K} \|P_j\xi\|^2 = \left\|\sum_{j\in K} P_j\xi\right\|^2 = \|P_K\xi\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ , \tag{$*$}$$

puisque $\|P_K\| \leqslant 1$ par le théorème de la projection 1.4.iv. On en déduit évidemment l'inégalité de Bessel et les premières assertions à l'aide du lemme 1.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si l'égalité de Parseval est satisfaite, i.e.

$$\sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \|P_j\xi\|^2 = \sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 = \|\xi\|^2 \ ,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, grâce la propriété d'approximation du supremum, il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que

$$\|P_L\xi\|^2 = \sum_{j\in L} \|P_j\xi\|^2 \geqslant \sum_{j\in K_\varepsilon} \|P_j\xi\|^2 \geqslant \|\xi\|^2 - \varepsilon^2$$

pour toute partie $L \in \mathfrak{K}(J)$, $L \supset K_\varepsilon$. Comme $P_L\xi \perp (P_L\xi - \xi)$, il vient alors

$$\|P_L\xi - \xi\|^2 = \|\xi\|^2 - \|P_L\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

par l'égalité de Pythagore, donc (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $k \geqslant N_\varepsilon := \max \overset{-1}{\sigma}(K_\varepsilon)$, on a $L_k := \sigma(\{0,\ldots,k\}) \supset K_\varepsilon \cap D$, donc $L_k \cup (K_\varepsilon \smallsetminus D) \supset K_\varepsilon$ et puisque $P_j\xi = 0$ si $j \in K_\varepsilon \smallsetminus D$, il vient

$$\left\|\sum_{l=0}^{k} P_{\sigma(l)}\xi - \xi\right\| = \left\|\sum_{j\in L_k} P_j\xi - \xi\right\| = \left\|\sum_{j\in L_k\cup(K_\varepsilon\smallsetminus D)} P_j\xi - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) C'est évident, puisque $\mathcal{G}$ est fermé et $\sum_{l=0}^{k} P_{\sigma(l)}\xi \in \mathcal{G}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Par définition de $\mathcal{G}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$, $(\eta_j)_{j\in K_\varepsilon}$ tels que $\eta_j \in \mathcal{H}_j$ et

$$\left\|\sum_{j\in K_\varepsilon} \eta_j - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Puisque $P_{K_\varepsilon}\xi$ est la meilleure approximation de ξ par un élément de $\mathcal{H}_{K_\varepsilon}$ par le théorème de la projection 1.4.i, on a

$$\|P_{K_\varepsilon}\xi - \xi\| \leqslant \left\|\sum_{j\in K_\varepsilon} \eta_j - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Utilisant à nouveau l'égalité de Pythagore et $(*)$, on obtient

$$\|\xi\|^2 = \|P_{K_\varepsilon}\xi - \xi\|^2 + \|P_{K_\varepsilon}\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \sum_{j\in K_\varepsilon} \|P_j\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 \ ,$$

d'où l'égalité de Parseval. □

DEFINITION Nous écrirons

$$\mathcal{G} = \boxplus_{j \in J} \mathcal{H}_j \ ,$$

et nous dirons que c'est une *décomposition hilbertienne* de $\mathcal{G}$, ou encore que $\mathcal{G}$ est la *somme hilbertienne* de $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$.

Nous utilisons le signe $\boxplus$ pour montrer que cette décomposition est orthogonale et que l'on a l'égalité de Parseval, généralisation de celle de Pythagore, mais aussi que cette décomposition est topologique puisqu'on utilise la notion de sommabilité, donc en particulier celle de série à la place des sommes finies.

PROPOSITION *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de $\mathcal{H}$. Alors toute famille $\left(\xi_j\right)_{j \in J}$, telle que $\xi_j \in \mathcal{H}_j$ pour tout $j \in J$ et $\sum_{j \in J} \left\|\xi_j\right\|^2 < \infty$, est sommable dans $\mathcal{H}$. Si $\xi := \sum_{j \in J} \xi_j$, on a $\xi_j = P_{\mathcal{H}_j} \xi$ pour tout $j \in J$.*

Etant donné une énumération σ de $\left\{ j \in J \mid \left\|\xi_j\right\| > 0 \right\}$, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \sum_{l=p}^{q} \xi_{\sigma(l)} \right\|^2 = \sum_{l=p}^{q} \left\|\xi_{\sigma(l)}\right\|^2 \ .$$

Le lemme 1.1 montre alors que la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}$ satisfait au critère de Cauchy (cf. cours d'Analyse [9], remarque 10.7). Posons $\xi := \sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}$. Pour tout $j \in J$, la continuité de $P_j := P_{\mathcal{H}_j}$ nous permet d'écrire

$$P_j \xi = P_j \left(\sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)} \right) = \sum_{l=0}^{\sup I} P_j \left(\xi_{\sigma(l)}\right) = \xi_j \ .$$

Le théorème montre alors que $\left(\xi_j\right)_{j \in J}$ est sommable, que

$$\xi = \sum_{j \in J} P_j \xi = \sum_{j \in J} \xi_j$$

et que ξ ne dépend pas de l'énumération choisie. $\square$

Le théorème et la proposition peuvent être résumés dans le

SCOLIE *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de $\mathcal{H}$.*

$$\xi \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j \in J} \|P_j \xi\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 < \infty$$

$$\xi \in \boxplus_{j \in J} \mathcal{H}_j \quad \Longrightarrow \quad \xi = \sum_{j \in J} P_j \xi \quad \text{et} \quad \|\xi\|^2 = \sum_{j \in J} \|P_j \xi\|^2$$

$$\begin{array}{c} \xi := \sum_{j \in J} \xi_j \in \boxplus_{j \in J} \mathcal{H}_j \\ \|\xi\|^2 = \sum_{j \in J} \left\|\xi_j\right\|^2 \\ \xi_j = P_j \xi \end{array} \quad \Longleftarrow \quad \xi_j \in \mathcal{H}_j \quad \text{et} \quad \sum_{j \in J} \left\|\xi_j\right\|^2 < \infty$$

EXERCICE Pour toute famille $(\xi_j)_{j \in J}$ sommable d'un espace de Hilbert, la famille

$$\left(\|\xi_j\|^2\right)_{j \in J}$$

est sommable dans $\mathbb{R}$.

3.2 Bases hilbertiennes

DEFINITION 1 Soit F un espace préhilbertien. Nous dirons qu'une famille $(\epsilon_j)_{j\in J} \subset F$ est un *système orthonormé* si l'on a

$$(\epsilon_k | \epsilon_l) = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout } k, l \in J \ .$$

On dit que c'est une *base hilbertienne* si en plus $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est total dans F .

Si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est un système orthonormé, alors $(\mathbb{K} \cdot \epsilon_j)_{j\in J}$ est évidemment une famille de sous-espaces vectoriels complets, et ils sont deux à deux orthogonaux. D'après l'exemple 2.1.2 , pour tout $\xi \in F$ et tout $j \in J$, on a

$$P_{\mathbb{K}\cdot\epsilon_j}\xi = (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j \quad \text{pour tout } j \in J \ .$$

Si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est une base hilbertienne, on obtient

$$F = \boxplus_{j\in J} \mathbb{K} \cdot \epsilon_j \ .$$

par le théorème 3.1. Plus généralement on retrouve le théorème 15.18 du cours d'Analyse [9] :

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien et $(\epsilon_j)_{j\in J}$ un système orthonormé dans F .*

On a l' ***inégalité de Bessel***

$$\sum_{j\in J} |(\epsilon_j | \xi)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ ,$$

et les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\xi \in \boxplus_{j\in J} \mathbb{K} \cdot \epsilon_j \ .$$

(ii) ***Egalité de Parseval***

$$\sum_{j\in J} |(\epsilon_j | \xi)|^2 = \|\xi\|^2 \ .$$

(iii) La famille $((\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j)_{j\in J}$ est sommable et

$$\xi = \sum_{j\in J} (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j \ .$$

D'autre part soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\epsilon_j)_{j\in J}$ un système orthonormé dans $\mathcal{H}$. Pour toute famille $(\alpha_j)_{j\in J} \subset \mathbb{K}$ telle que $\sum_{j\in J} |\alpha_j|^2 < \infty$, la famille $(\alpha_j \cdot \epsilon_j)_{j\in J}$ est sommable dans $\mathcal{H}$ et si $\xi := \sum_{j\in J} \alpha_j \cdot \epsilon_j$, on a $\alpha_j = (\epsilon_j | \xi)$ pour tout $j \in J$.

DEFINITION 2 Par analogie avec le second exemple qui va suivre, nous dirons que le nombre $(\epsilon_j | \xi)$ est le *j-ième coefficient de Fourier* de ξ dans le système orthonormé $(\epsilon_j)_{j\in J}$.

EXEMPLE 1 Soit X un ensemble. Pour tout $x \in X$ considérons la fonctions caractéristique $1_{\{x\}} \in \ell^2(X)$; on a

$$1_{\{x\}}(y) := \delta_{x,y} \quad \text{pour tout } y \in X \ .$$

La famille $\left(1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(X)$.

On vérifie immédiatement que cette famille est orthonormée. Il nous reste donc à prouver qu'elle est totale. Mais par le corollaire 2.2, il nous suffit de montrer que, pour tout $f \in \ell^2(X)$ tel que $f \perp 1_{\{x\}}$ pour tout $x \in X$, on a $f = 0$. Mais

$$0 = \left(1_{\{x\}} \middle| f\right) = \sum_{y\in X} \overline{1_{\{x\}}(y)} \cdot f(y) = f(x) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 Par ce qui précède, on en déduit que, pour tout $f \in \ell^2(X)$, la famille $\left(f(x) \cdot 1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ est sommable et

$$f = \sum_{x\in X} f(x) \cdot 1_{\{x\}} \ .$$

Si $(\epsilon_x)_{x\in X}$ est une base hilbertienne d'un espace préhilbertien F , alors l'application

$$F \longrightarrow \ell^2(X) : \xi \longmapsto ((\epsilon_x|\, \xi))_{x\in X}$$

est une isométrie, ceci n'étant qu'une reformulation de l'égalité de Parseval. Elle est surjective si, et seulement si, F est un espace de Hilbert.

EXEMPLE 2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ soit

$$e_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto e^{2\pi i k x} \ .$$

La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2([0,1])$.

Ceci a déjà été démontré dans le cours d'Analyse [9], exemple 15.17. Rappelons que la partie difficile est de prouver que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale dans $\mathbf{L}^2([0,1])$: on constate tout d'abord que l'ensemble des fonctions de la forme $1_{[0,a]}$ pour $0 < a \leqslant 1$ est total dans $\mathbf{L}^2([0,1])$, puis que

$$1_{[0,a]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(e_k \middle| 1_{[0,a]}\right) \cdot e_k$$

car

$$\left\|1_{[0,a]}\right\|_2^2 = a = a^2 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi k a}{k^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left(e_k \middle| 1_{[0,a]}\right)\right|^2$$

(cf. applications 9.16 et 10.9).

On peut aussi utiliser le théorème de Stone-Weierstraß formulé ci-dessous. On remarque tout d'abord que les applications

$$\mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2(]0,1[) : f \longmapsto f_{|]0,1[}$$

et

$$\mathbf{L}^2\left(\frac{1}{2\pi} \cdot \lambda_{\mathbb{U}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(]0,1[) : f \longmapsto f \circ \exp(2\pi i \cdot \diamond) \ ,$$

sont des isométries telles que

$$\mathrm{id}^k \circ \exp = e_{k|]0,1[} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

puisque $\{1\}$ est $\lambda_{\mathbb{U}}$-négligeable et

$$\exp\left(2\pi i \cdot \diamond\right) : x \longmapsto e^{2\pi i x} :]0,1[\longrightarrow \mathbb{U} \smallsetminus \{1\}$$

est bijective. Mais le sous-espace vectoriel engendré par $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une sous-algèbre unifère de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$. Elle est involutive, puisque

$$\overline{\mathrm{id}^k} = \mathrm{id}^{-k} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

et id sépare les points de $\mathbb{U}$. Elle est donc dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Comme $\|\cdot\|_{2,\frac{1}{2\pi}\cdot\lambda_{\mathbb{U}}} \leqslant \|\cdot\|_\infty$, ce sous-espace vectoriel est aussi dense dans $\mathbf{L}^2\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\lambda_{\mathbb{U}}\right)$, ce qui finit de prouver que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est total dans $\mathbf{L}^2([0,1])$.

THEOREME (de Stone-Weierstraß) *Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre involutive contenant 1 et séparant les points de X , i.e. telle que pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$ il existe $a \in \mathcal{A}$ satisfaisant à $a(x) \neq a(y)$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.*

3.3 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit F un espace préhilbertien et $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants de F . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{G}_n := \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{K} \cdot \xi_k \ .$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$. On démontre par récurrence qu'il est complet dans F et en définissant $\epsilon_0 := \xi_0 \in \mathcal{G}_0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon_{n+1} := \xi_{n+1} - P_{\mathcal{G}_n}\xi_{n+1} \ ,$$

on a

$$\epsilon_{n+1} \in \mathcal{G}_{n+1} \quad \text{et} \quad \epsilon_{n+1} \perp \mathcal{G}_n \ ,$$

donc $\left(\frac{\epsilon_k}{\|\epsilon_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé dans F et $\left(\frac{\epsilon_k}{\|\epsilon_k\|}\right)_{k=0,\ldots,n}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{G}_n$.

En effet $\mathbb{K} \cdot \xi_0 = \mathbb{K} \cdot \frac{\epsilon_0}{\|\epsilon_0\|}$ est complet et $P_{\mathcal{G}_0}\xi_1 = \frac{1}{\|\epsilon_0\|^2} \cdot (\epsilon_0 | \, \xi_1) \cdot \epsilon_0$ (cf. exemple 2.1.2). Si maintenant $\mathcal{G}_n$ est complet, alors

$$P_{\mathcal{G}_n}\xi_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\epsilon_j\|^2} \cdot \left(\epsilon_j | \, \xi_{n+1}\right) \cdot \epsilon_j \ ,$$

(vérification immédiate) et

$$\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n \boxplus \mathbb{K} \cdot \epsilon_{n+1}$$

est complet par l'exercice 2.1.1.b. La formule ci-dessus permet de calculer les ϵ_k et $\|\epsilon_k\|$ inductivement.

Cette construction s'appelle le *procédé d'orthogonalisation (ou d'orthonormalisation) de Gram-Schmidt* .

Sa mise en oeuvre pratique est fastidieuse, à moins d'avoir une méthode particulière liée au problème considéré, comme nous le verrons dans les paragraphes qui suivent.

DEFINITION Nous dirons qu'un espace normé est de *type dénombrable* ou *(séparable)* s'il contient une suite totale.

PROPOSITION *Un espace préhilbertien de type dénombrable possède une base hilbertienne (dénombrable).*

En effet, en extrayant d'une suite totale une suite linéairement indépendante et en lui appliquant le procédé d'orthogonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient un système orthonormé dénombrable et total, ce qu'il fallait démontrer. □

THEOREME *Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne. Plus généralement tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

Dans l'ensemble de tous les systèmes orthonormés $\mathcal{SON}$ de cet espace de Hilbert $\mathcal{H}$, ordonné par l'inclusion, il existe par le principe de maximalité de Hausdorff une chaîne maximale $\mathcal{C}$ contenant le système orthonormé donné. La réunion

$$B := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

est un système orthonormé. En effet si $\xi, \eta \in B$, il existe $C, D \in \mathcal{C}$ tels que $\xi \in C$ et $\eta \in D$ et, puisque $\mathcal{C}$ est une chaîne, on a $C \subset D$ ou $D \subset C$; mais ceci montre que ξ et η appartiennent à un système orthonormé, donc que $(\xi | \eta) = \delta_{\xi,\eta}$. Il nous suffit de montrer que B est total dans $\mathcal{H}$. Si le sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{G}$ engendré par B est $\neq \mathcal{H}$, en choisissant $\gamma \in \mathcal{G}^{\perp} \setminus \{0\}$, on obtient un système orthonormé $B \cup \{\gamma\}$ contenant tous les $C \in \mathcal{C}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{C}$. $\square$

3.4 Polynômes orthogonaux

DEFINITION 1 Nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et désignons par $\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ le cône convexe des intégrales de Radon μ telles que

$$\int^* |\mathrm{id}|^k \, d\mu < \infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \, .$$

On dit alors que

$$m_k(\mu) := \int \mathrm{id}^k \, d\mu$$

est le *moment* d'ordre k de μ .

Si $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$, alors μ est bornée, i.e. $\mu^*(X) < \infty$.

EXERCICE 1 Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$. L'application canonique

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : p \longmapsto \left[p_{|X}\right]$$

n'est pas injective si, et seulement si, μ est une combinaison linéaire finie (à coefficients strictement positifs) d'intégrales de Dirac (on dit que c'est une intégrale atomique à support fini). Dans ce cas l'image de $\mathcal{P}$ est égale à $\mathbf{L}^2(\mu)$ et c'est un espace vectoriel de dimension finie.

Utiliser le support de μ (cf. remarque 1.2.3).

Pour éviter le cas trivial de la dimension finie, nous supposerons $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ n'est pas une combinaison linéaire finie d'intégrales de Dirac, i.e. $\operatorname{supp} \mu$ est infini.

Dans ce cas on a $\mathcal{P} \subset \mathbf{L}^2(\mu)$. Le *problème des moments* consiste à étudier l'application

$$m : \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \mu \longmapsto m(\mu) := (m_k(\mu))_{k \in \mathbb{N}} \ ,$$

en particulier son injectivité, et à décrire son image. Dans le cas général il est très difficile de déterminer les intégrales de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ telles que $\mathcal{P}$ soit dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.

PROPOSITION *Si X est une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors*

$$\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X) = \mathcal{M}_+^{b}(X)$$

et, quel que soit $\mu \in \mathcal{M}_+^b(X)$, $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.

Remarquons, puisque X est bornée, que tout polynôme est borné sur X , d'où la première assertion. La fermeture $\overline{X}$ de X dans $\mathbb{R}$ étant compacte, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X \subset [a, b]$. Pour toute partie $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$1_K = \inf_k (1 - k \cdot d(\diamond, K))^+_{|X} \quad \text{et} \quad (1 - k \cdot d(\diamond, K))^+_{|[a,b]} \in \mathcal{C}([a, b]) \ ;$$

grâce au théorème de Lebesgue on a $1_K = \lim_k (1 - k \cdot d(\diamond, K))^+_{|X}$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, ce qui montre que $\mathcal{C}([a, b])_{|X}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ par le théorème de densité 15.15 du cours d'Analyse [9].

Mais $\mathcal{P}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\overline{X}}$, par le théorème de Stone-Weierstraß ou celui de Bernstein (voir l'exercice ci-dessous). Il suffit donc de remarquer que

$$\left\|f_{|X}\right\|_{2,\mu}^{2} \leqslant \mu(X) \cdot \|f\|_{\infty,[a,b]}^{2} \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}([a,b])$$

pour pouvoir conclure. $\square$

DEFINITION 2 Désignons par $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant k$ et posons $\mathcal{P}_{-1} := \{0\}$. On dit que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un *système de polynômes orthogonaux* par rapport à $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ si

(a) p_k est un polynôme de degré k , i.e. $p_k \in \mathcal{P}_k \setminus \mathcal{P}_{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) $p_k \perp p_l$, i.e. $\int_X \overline{p_k} \cdot p_l \, d\mu = 0$ pour tout $k,l \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq l$.

REMARQUE Il suffit d'exiger que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit un polynôme de degré au plus k , i.e. $p_k \in \mathcal{P}_k$, et que $p_k \perp \mathcal{P}_{k-1}$.

Un tel système est déterminé à une constante multiplicative près et s'obtient par exemple à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas tout ces polynômes sont réels. On peut normaliser les p_k de différentes manières :

(1) on fixe la valeur de la constante $\partial^k p_k$, par exemple $p_k \in \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$,

(2) on fixe la valeur de p_k en un point,

ou bien

(3) on normalise $\|p_k\|_{2,\mu} = 1 \quad , \quad p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1} \quad \text{et} \quad g_k > 0$.

Dans ce dernier cas, on dit que c'est le *système de polynômes orthonormés* associé à μ . On a

$$p_0 = \frac{1}{\mu(X)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad p_1 = \frac{\mathrm{id} - (p_0|\,\mathrm{id}) \cdot p_0}{\|\mathrm{id} - (p_0|\,\mathrm{id}) \cdot p_0\|_{2,\mu}} = \frac{\mu(X) \cdot \mathrm{id} - (1|\,\mathrm{id})_\mu \cdot 1}{\left\|\mu(X) \cdot \mathrm{id} - (1|\,\mathrm{id})_\mu \cdot 1\right\|_{2,\mu}} \quad , \quad \text{etc...!}$$

THEOREME *Il existe une* ***relation de récurrence*** *de la forme*

$$\mathrm{id} \cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k + c_k \cdot p_{k-1} \ ,$$

en ayant posé $p_{-1} = 0$. En outre si $p_0 = g_0 \cdot 1$, $\widetilde{g_0} = 0$ et

$$p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^{k-1} + \mathcal{P}_{k-2} \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \ ,$$

on a $g_k \neq 0$ et

$$a_k = \frac{g_k}{g_{k+1}} \quad , \quad b_k = \frac{\widetilde{g_k}}{g_k} - \frac{\widetilde{g_{k+1}}}{g_{k+1}} \quad , \quad c_k = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}} \cdot a_{k-1} \ .$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si le système est orthonormé, alors

$$c_k = a_{k-1} \ .$$

En effet, comme $\left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}}\right)_{j=0,\ldots,k+1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{P}_{k+1}$ et que $\mathrm{id}\cdot p_k \in \mathcal{P}_{k+1}$, on a

$$\mathrm{id}\cdot p_k = \sum_{j=0}^{k+1} \left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k\right) \cdot \frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \ .$$

Mais

$$\left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k\right) = \int \overline{\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}}} \cdot \mathrm{id}\cdot p_k \, d\mu = \left(\frac{\mathrm{id}\cdot p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| p_k\right) = 0$$

pour tout $j \leqslant k-2$, puisqu'alors $\mathrm{id}\cdot p_j \in \mathcal{P}_{k-1} \perp p_k$! On a donc bien la relation de récurrence indiquée. En calculant $\operatorname{mod} \mathcal{P}_{k-1}$, on peut écrire

$$g_k \cdot \mathrm{id}^{k+1} + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^k = \mathrm{id}\cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k =$$

$$= a_k \cdot \left(g_{k+1} \cdot \mathrm{id}^{k+1} + \widetilde{g_{k+1}} \cdot \mathrm{id}^k\right) + b_k \cdot g_k \cdot \mathrm{id}^k \ ,$$

donc

$$g_k = a_k \cdot g_{k+1} \quad \text{et} \quad \widetilde{g_k} = a_k \cdot \widetilde{g_{k+1}} + b_k \cdot g_k$$

et par suite les deux premières relations. Quant à la dernière on a

$$a_k = \left(\frac{p_{k+1}}{\|p_{k+1}\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k\right)$$

et

$$c_k = \left(\frac{p_{k-1}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k\right) = \left(\frac{\mathrm{id}\cdot p_{k-1}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \middle| p_k\right) =$$

$$= \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \cdot \left(\frac{p_k}{\|p_k\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_{k-1}\right) = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \cdot a_{k-1} \ .$$

□

EXERCICE 2 (Polynômes de Bernstein) Pour tout fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième *polynôme de Bernstein* $B_n f \in \mathcal{P}_n([0,1])$ de f par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \ .$$

(a) Montrer que si $f = 1$ ou $f = \mathrm{id}$ on a $B_n f = f$.

(b) Calculer pour $f = \mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})$ la suite $B_n f$ et montrer que l'on a

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{uniformément sur } [0,1] \ .$$

(c) Montrer que l'inégalité

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n} \quad \text{pour tout } x \in [0,1]$$

est vraie en introduisant un f convenable et en calculant $B_n f$.

(d) Pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > 0$ on considère les ensembles

$$A_n(\delta) = \left\{0 \leqslant k \leqslant n \ \middle| \ \left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \delta\right\}$$

et

$$B_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; \left| x - \frac{k}{n} \right| > \delta \right\} \ .$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C < \infty$ tel que

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leqslant \frac{2C}{\delta^2} \cdot \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \text{ et tout } k \in B_n(\delta) \ .$$

(e) En déduire que

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{uniformément sur } [0,1] \ .$$

(f) **Théorème de Weierstraß** Montrer finalement que, pour tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des polynômes $\mathcal{P}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$.

3.5 Caractérisation des polynômes classiques orthogonaux

On considère maintenant un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ et un *poids* , i.e. une fonction

$$\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

localement λ-intégrable telle que $\rho \cdot \lambda_J \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(J)$. Un poids est en particulier λ_J-intégrable.

Les *polynômes classiques orthogonaux* sont ceux de la tabelle suivante :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	Hermite H_k
J	$]-1,1[$	$]0,\infty[$	$]-\infty,\infty[$
ρ	$(1-\mathrm{id})^\alpha \cdot (1+\mathrm{id})^\beta$ $\alpha,\beta > -1$	$\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ $\alpha > -1$	$e^{-\mathrm{id}^2}$
Normalisation	$J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha+k}{k}$	$L_k^{(\alpha)}(0) = \binom{\alpha+k}{k}$	$H_k \in 2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$
g_k	$\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}$	$\frac{(-1)^k}{k!}$	2^k
$\Vert p_k\Vert_{2,\rho}^2$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1) \cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(\alpha+k)!}{k!}$	$\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!$
a_k	$\frac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$-(k+1)$	$\frac{1}{2}$
c_k	$\frac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)}$	$-(\alpha+k)$	k
$\widetilde{g}_k$	$-\frac{(\beta-\alpha)}{2^k \cdot (k-1)!} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}$	0
b_k	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$\alpha+2k+1$	0

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le *coefficient binomial généralisé* par

$$\binom{z}{k} = \prod_{l=1}^{k} \frac{z+1-l}{l} = \frac{z \cdot (z-1) \cdots (z+1-k)}{k!} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

En particulier $\binom{z}{0} = 1$ et $z \longmapsto \binom{z}{k}$ est un polynôme!

Nous avons aussi utilisé la notation

$$z! := \Gamma(z+1) \ .$$

Rappelons que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, que pour tout $\operatorname{Re} z > -1$, on a

$$z! = \int_0^\infty \mathrm{id}^z \cdot e^{-\mathrm{id}} \ ,$$

et que Γ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et n'a que des pôles simples en $-k$, pour $k \in \mathbb{N}$, de résidu $\frac{(-1)^k}{n!}$. En particulier

$$\binom{z}{k} = \frac{z!}{k! \cdot (z-k)!} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(z+1-k)} \ ,$$

cette formule étant vraie par continuité si $z+1 = -l$ pour un $l \in \mathbb{N}$, puisque

$$\binom{z}{k} = \binom{-l-1}{k} = \frac{(-l-1)(-l-2)\cdots(-l-k)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(l+k)!}{k! \cdot l!}$$

et

$$w \cdot \Gamma(-l+w) \to \frac{(-1)^l}{l!} \quad \text{et} \quad w \cdot \Gamma(-l-k+w) \to \frac{(-1)^{l+k}}{(l+k)!} \quad \text{lorsque } w \to 0 \ .$$

Dans la littérature on rencontre encore le *symbole de Pochhammer* défini par

$$(z)_k := \prod_{l=0}^{k-1} (z+l) = z \cdot (z+1) \cdots (z+k-1) = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)} = \frac{(z-1+k)!}{(z-1)!} \ .$$

En particulier $(z)_0 := 1$.

Finalement rappelons la formule de Stirling

$$\alpha! \sim \sqrt{2\pi \cdot \alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \quad \text{pour } \alpha \to \infty \ .$$

La mise en oeuvre du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt conduit à des calculs fastidieux. Mais heureusement à équivalence près, i.e. après une transformation affine et une renormalisation, les polynômes classiques sont caractérisés par une formule ou une équation différentielle, ce qui nous permettra de déterminer les constantes de la table ci-dessus.

THEOREME *Soient $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ un poids et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système de polynômes orthogonaux associé à ρ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est équivalent à un système classique de polynômes.*

(ii) ***Formule de Rodrigues***

Le poids ρ est indéfiniment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$p_k = \frac{1}{d_k \cdot \rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

(iii) ***Equation différentielle de type hypergéométrique***

Le poids ρ est continûment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J de degré $\leqslant 2$ sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$Lp_k := -\frac{1}{\rho} \cdot \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial p_k\right) = \lambda_k \cdot p_k$$

ou bien

$$p \cdot \partial^2 p_k + q \cdot \partial p_k + \lambda_k \cdot p_k = 0 \ ,$$

où

$$q := \frac{\partial\left(\rho \cdot p\right)}{\rho} \ .$$

Dans ce cas q est un polynôme de degré 1 et

$$\lambda_k = -k \cdot \left[\partial q + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right]$$

et les constantes sont données dans la table qui précède et la suivante :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	*Laguerre* $L_k^{(\alpha)}$	*Hermite* H_k
p	$1 - \mathrm{id}^2$	id	1
d_k	$(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!$	$k!$	$(-1)^k$
λ_k	$k \cdot (\alpha + \beta + k + 1)$	k	$2k$
q	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha + 1 - \mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) Il nous suffit de démontrer que la formule de Rodrigues définit un système de polynômes orthogonaux associé au poinds ρ . L'unicité à une constante multiplicative près montre alors qu'en choisissant d_k convenablement on obtient les polynômes classiques.

Remarquons tout d'abord que, étant donné $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leqslant k$, on a

$$\partial^j\left(\rho \cdot p^k\right) = \rho \cdot p^{k-j} \cdot P_{k,j} \quad \text{pour un } P_{k,j} \in \mathcal{P}_j \ .$$

Cette formule est trivialement vraie pour $j = 0$ avec $P_{k,0} = 1$. D'autre part $\deg p \leqslant 2$ et on vérifie explicitement que $q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} \in \mathcal{P}_1$ (voir la table ci-dessus et remarquer qu'une transformation affine ne modifie pas le degré). L'assertion en découle par récurrence sur j puisque, en supposant que $j + 1 \leqslant k$, on a

$$\partial^{j+1}\left(\rho \cdot p^k\right) = \partial\left(\rho \cdot p \cdot p^{k-j-1} \cdot P_{k,j}\right) =$$

$$= \partial\left(\rho \cdot p\right) \cdot p^{k-j-1} \cdot P_{k,j} + \rho \cdot p \cdot (k-j-1) \cdot p^{k-j-2} \cdot \partial p \cdot P_{k,j} + \rho \cdot p^{k-j} \cdot \partial P_{k,j} =$$

$$= \rho \cdot p^{k-j-1} \cdot \left(q \cdot P_{k,j} + (k-j-1) \cdot \partial p \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j}\right)$$

et par suite

$$P_{k,j+1} = \Big[q + (k-j-1) \cdot \partial p\Big] \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j} \in \mathcal{P}_{j+1} \ . \tag{$*$}$$

Il est alors clair que $p_k = \frac{1}{d_k} \cdot P_{k,k} \in \mathcal{P}_k$ et il nous reste à montrer que $p_k \perp \mathcal{P}_{k-1}$. Mais on constate dans chaque cas que

$$\rho \cdot p^j \cdot P \in \mathcal{C}^0(J) \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } P \in \mathcal{P} \ .$$

En intégrant successivement par parties, pour tout $f \in \mathcal{P}_{k-1}$, on obtient

$$d_k \cdot (p_k | f)_\rho = \int_J \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \cdot f = \left[\partial^{k-1}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot f\right]_J - \int_J \partial^{k-1}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot \partial f =$$

$$= \ldots = (-1)^k \cdot \int_J \rho \cdot p^k \cdot \partial^k f = 0 \ ,$$

puisque

$$\partial^{k-j}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot \partial^{j-1} f = \rho \cdot p^j \cdot P_{k,k-j} \cdot \partial^{j-1} f \in \mathcal{C}^0(J) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Montrons tout d'abord que l'on a nécessairement $\deg p \leqslant 2$. En effet

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = d_1 \cdot p_1$$

est un polynôme de degré 1 et

$$d_2 \cdot \rho \cdot p_2 = \partial^2\left(\rho \cdot p^2\right) = \partial\left[\partial(\rho \cdot p) \cdot p + \rho \cdot p \cdot \partial p\right] = \partial\left[\rho \cdot p \cdot (q + \partial p)\right] =$$

$$= \rho \cdot q \cdot (q + \partial p) + \rho \cdot p \cdot \partial(q + \partial p) \ ,$$

donc

$$= d_2 \cdot p_2 - q^2 - \partial(q \cdot p) \ .$$

Mais si $\deg p > 2$, alors

$$\deg\left(p \cdot \partial^2 p\right) = \deg p + \deg p - 2 > \deg p = \deg \partial(q \cdot p) =$$

$$= \deg\left(d_2 \cdot p_2 - q^2 - p \cdot \partial^2 p\right) = \deg\left(p \cdot \partial^2 p\right) \ ,$$

puisque $\deg\left(d_2 \cdot p_2 - q^2\right) \leqslant 2$ et $\deg\left(p \cdot \partial^2 p\right) > \deg p > 2$, ce qui est absurde.

Montrons maintenant que p_k satisfait à l'équation différentielle. Remarquons tout d'abord que

$$\rho \cdot q = \partial(\rho \cdot p) = \partial\rho \cdot p + \rho \cdot \partial p \ ,$$

donc

$$\frac{p \cdot \partial\rho}{\rho} = q - \partial p \ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a alors

$$-d_k \cdot \rho \cdot Lp_k =$$

$$= \partial(\rho \cdot p \cdot d_k \cdot \partial p_k) = \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial\left[\frac{1}{\rho} \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right)\right]\right) =$$

$$= \partial \left(-\frac{p \cdot \partial\rho}{\rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) + p \cdot \partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right) \right) =$$

$$= -\partial \left[q - \partial p\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) - \left[q - \partial p\right] \cdot \partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right)$$

$$+\partial p \cdot \partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right) + p \cdot \partial^{k+2}\left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= \left[\partial^2 p - \partial q\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) + \left[2\partial p - q\right] \cdot \partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right) + p \cdot \partial^{k+2}\left(\rho \cdot p^k\right) \ .$$

D'autre part comme

$$p \cdot \partial\left(\rho \cdot p^k\right) = p \cdot \partial\rho \cdot p^k + k \cdot \rho \cdot p^k \cdot \partial p = \left(p \cdot \partial\rho + k \cdot \rho \cdot \partial p\right) \cdot p^k =$$

$$= \left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \cdot \rho \cdot p^k \ ,$$

on peut appliquer la formule de Leibniz à chacun des membres de

$$\partial^{k+1}\left[p \cdot \partial\left(\rho \cdot p^k\right)\right] = \partial^{k+1}\left(\left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \cdot \rho \cdot p^k\right) \ .$$

Puisque $\deg p \leqslant 2$ et $\deg\left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \leqslant 1$, on obtient

$$p \cdot \partial^{k+2}\left(\rho \cdot p^k\right) + \binom{k+1}{1} \cdot \partial p \cdot \partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right) + \binom{k+1}{2} \cdot \partial^2 p \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= \left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \cdot \partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right) + \binom{k+1}{1} \cdot \left[q + (k-1) \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right) \ ,$$

c'est-à-dire

$$p \cdot \partial^{k+2}\left(\rho \cdot p^k\right) + \left[2\partial p - q\right] \cdot \partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= (k+1) \cdot \left[\partial q + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right) \ .$$

Ainsi

$$-d_k \cdot \rho \cdot Lp_k =$$

$$= \left[\partial^2 p - \partial q\right] \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right) + (k+1) \cdot \left[\partial q + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= \left[k \cdot \partial q + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right)$$

et finalement

$$Lp_k = -k \cdot \left[\partial q + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right] \cdot p_k \ .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) A l'aide d'un changement affine de variable on peut supposer, en modifiant les

λ_k si nécessaire, que J et p sont comme dans la situation classique :

$\deg p$	2	1	0
J	$]-1,1[$	$]0,\infty[$	$]-\infty,\infty[$
p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1

Puisque $\deg p_1 = 1$, l'équation différentielle pour $k = 1$ montre que

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = -\frac{\lambda_1 \cdot p_1}{\partial p_1}$$

est un polynôme de degré 1 et que

$$\frac{\partial\rho}{\rho} = \frac{1}{p}\cdot(q-\partial p) = \frac{a\cdot\mathrm{id}+b}{p} \ .$$

On obtient

p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1
$\frac{\partial\rho}{\rho}$	$\frac{\frac{a+b}{2}}{1-\mathrm{id}}+\frac{\frac{b-a}{2}}{1+\mathrm{id}}$	$\frac{b}{\mathrm{id}}+a$	$a\cdot\mathrm{id}+b$
ρ	$(1-\mathrm{id})^{\frac{a+b}{2}}\cdot(1+\mathrm{id})^{\frac{b-a}{2}}$	$\mathrm{id}^b\cdot e^{a\cdot\mathrm{id}}$	$e^{\frac{a}{2}\cdot\mathrm{id}^2+b\cdot\mathrm{id}}$

la constante d'intégration e^c disparaissant en renormalisant, i.e. en multipliant ρ par une constante >0 .

Rappelons que ρ est λ_J-intégrable. Dans le premier cas on a nécessairement

$$\alpha := \frac{a+b}{2} > -1 \quad \text{et} \quad \beta := \frac{b-a}{2} > -1 \ .$$

Dans le deuxième cas $a < 0$ et en faisant une homothétie, on peut supposer que $a = -1$. Il suffit donc de poser $\alpha := b > -1$. Dans le troisième cas, on nécessairement $a > 0$ et à l'aide d'une transformation affine on se ramène au cas $\rho = e^{-\mathrm{id}^2}$, ce qui finit la démonstration des équivalences.

Détermination des constantes Elles dépendent évidemment de la normalisation choisie. Nous utiliserons évidemment la formule de Rodrigues et celle de Leibniz.

Comme dans la démonstration (i)⇒(ii) en intégrant k fois par parties on obtient

$$\|p_k\|_{2,\rho}^2 = (p_k|\, p_k)_\rho = \left(g_k\cdot\mathrm{id}^k\middle|\, p_k\right)_\rho = \frac{g_k}{d_k}\cdot\int_J \mathrm{id}^k\cdot\partial^k\left(\rho\cdot p^k\right) =$$

$$= \ldots = (-1)^k\cdot\frac{g_k}{d_k}\cdot k!\cdot\int_J \rho\cdot p^k \ .$$

D'autre part soit

$$P_{k,j} \in g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^j + \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + \mathcal{P}_{j-2} \ .$$

Rappelons que $P_{k,0} = 1$, donc $g_{k,0} = 1$ et $\widetilde{g_{k,0}} = 0$.

On a $q = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = \frac{\partial \rho}{\rho} \cdot p + \partial p$ et soit $\widetilde{q} := \frac{\partial \rho}{\rho} \cdot p \in \mathcal{P}_1$. La relation de récurrence $(*)$ s'écrit alors

$$P_{k,j+1} = \left[\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial p\right] \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j} \in \mathcal{P}_{j+1} \ .$$

et montre que

$$\begin{aligned} P_{k,j+1} \in & \left[\widetilde{q}\,(0) + \partial\widetilde{q} \cdot \mathrm{id} + (k-j) \cdot \left(\partial p\,(0) + \partial^2 p \cdot \mathrm{id}\right)\right] \\ & \qquad \cdot \left[g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^j + \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + \mathcal{P}_{j-2}\right] \\ & + \left(p\,(0) + \partial p\,(0) \cdot \mathrm{id} + \frac{\partial^2 p}{2} \cdot \mathrm{id}^2\right) \cdot \left[j \cdot g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + (j-1) \cdot \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-2} + \mathcal{P}_{j-3}\right] = \\ = & \left[\partial\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial^2 p + j \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^{j+1} \\ & + \left\{ \left[\widetilde{q}\,(0) + (k-j) \cdot \partial p\,(0) + j \cdot \partial p\,(0)\right] \cdot g_{k,j} \right. \\ & \left. + \left[\partial\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial^2 p + (j-1) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot \widetilde{g_{k,j}} \right\} \cdot \mathrm{id}^j + \mathcal{P}_{j-1} \ , \end{aligned}$$

donc que $g_{k,j}$ et $\widetilde{g_{k,j}}$ satisfont aux relations de récurrence suivantes :

$$g_{k,0} = 1 \quad \text{et} \quad \widetilde{g_{k,0}} = 0$$

$$g_{k,j+1} = \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \qquad (**)$$

et

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = \left[\widetilde{q}\,(0) + k \cdot \partial p\,(0)\right] \cdot g_{k,j} + \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j-1) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ . \qquad (***)$$

On a alors

$$g_k = \frac{1}{d_k} \cdot g_{k,k} \quad \text{et} \quad \widetilde{g_k} = \frac{1}{d_k} \cdot \widetilde{g_{k,k}} \ ,$$

ainsi que la table

p	$1 - \mathrm{id}^2$	id	1
$\widetilde{q} = \frac{\partial\rho}{\rho} \cdot p$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha - \mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

Polynômes de Jacobi

On a

$$\binom{\alpha+k}{k} = J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(1-\mathrm{id})^{-\alpha}(1+\mathrm{id})^{-\beta}}{d_k} \cdot \partial^k \left[(1-\mathrm{id})^{\alpha+k}(1+\mathrm{id})^{\beta+k}\right](1) =$$

$$= \frac{(1-\mathrm{id})^{-\alpha}(1+\mathrm{id})^{-\beta}}{d_k} \cdot \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j (1-\mathrm{id})^{\alpha+k} \cdot \partial^{k-j}(1+\mathrm{id})^{\beta+k}\right](1) =$$

$$= \frac{1}{d_k} \cdot (\alpha+k)\cdots(\alpha+1)\cdot(-1)^k \cdot 2^k \ ,$$

donc

$$d_k = (-1)^k \cdot \frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha+1)}{\frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha+1)}{k!}} \cdot 2^k = (-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \ .$$

D'autre part si $j+1 \leqslant k$, on a

$$g_{k,j+1} = -(\alpha+\beta+2k-j)\cdot g_{k,j} \ ,$$

donc

$$g_{k,j} = (-1)^j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

par récurrence, et par suite

$$g_k = \frac{1}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot (-1)^k \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+k)!} =$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \ .$$

Ainsi

$$\left\| J_k^{(\alpha,\beta)} \right\|^2_{2,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta} = (-1)^k \cdot \frac{\frac{1}{2^k}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot k! \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+k} \cdot (1+x)^{\beta+k} \, dx =$$

$$= \frac{\binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \int_0^1 (2t)^{\alpha+k} \cdot (2-2t)^{\beta+k} \cdot 2 \, dt =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \cdot B(\alpha+k+1, \beta+k+1) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\cdot\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2k+2)} =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{k! \cdot (\alpha+\beta+k)!} \cdot \frac{(\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1)!} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1)\cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!} \ ,$$

en ayant fait le changement de variable $x = 1 - 2 \cdot t$ et utilisé la fonction béta d'Euler :

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1} \cdot (1-t)^{w-1} \, dt = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad \text{pour tout } z, w > -1 \ .$$

Il vient alors

$$a_k = \frac{\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{\frac{1}{2^{k+1}} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k+2}{k+1}} = \frac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$$

et

$$c_k = \frac{\frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1) \cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k-1)! \cdot (\beta+k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-1) \cdot (k-1)! \cdot (\alpha+\beta+k-1)!}} \cdot \frac{2k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k+1)\, k\, (\alpha+\beta+k)} \cdot \frac{2k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)} =$$

$$= \frac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)} \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (\beta-\alpha) \cdot g_{k,j} + [-(\alpha+\beta) - (2k-j-1)] \cdot \widetilde{g_{k,j}} =$$

$$= (\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} - (\alpha+\beta+2k-j-1) \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_{k,j}} = (-1)^{j-1} \cdot (\beta-\alpha) \cdot j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

par récurrence, puisque

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

$$- (\alpha+\beta+2k-j-1) \cdot (-1)^{j-1} \cdot (\beta-\alpha) \cdot j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot (\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} \cdot [(\alpha+\beta+2k) + (\alpha+\beta+2k-j-1) \cdot j] =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot (\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} \cdot (j+1) \cdot (\alpha+\beta+2k-j) =$$

$$= (-1)^j \cdot (\beta-\alpha) \cdot (j+1) \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j-1)!} \ .$$

Ainsi

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (\beta-\alpha) \cdot k \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!} =$$

$$= -\frac{(\beta-\alpha)}{2^k \cdot (k-1)!} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!} \ ,$$

et par suite

$$b_k = \frac{-\frac{(\beta-\alpha)}{2^k\cdot(k-1)!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}}{\frac{1}{2^k}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k}{k}} - \frac{-\frac{(\beta-\alpha)}{2^{k+1}\cdot k!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k+1)!}{(\alpha+\beta+k+1)!}}{\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k+2}{k+1}} =$$

$$= (\beta-\alpha)\cdot\left(\frac{(k+1)}{\alpha+\beta+2k+2} - \frac{k}{\alpha+\beta+2k}\right) =$$

$$= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+2)} .$$

Les 5 premiers polynômes de Jacobi :

$$J_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$$

$$J_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$J_2^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{8}(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)\,x^2 + \frac{1}{4}(\alpha+\beta+3)(\alpha-\beta)\,x + \frac{1}{8}(\alpha-\beta)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}$$

$$J_3^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{48}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)\,x^3 + \frac{1}{16}(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)(\alpha-\beta)\,x^2$$

$$+\frac{1}{16}(\alpha+\beta+4)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-6\right)x + \frac{1}{48}(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-16\right)$$

$$J_4^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{384}(\alpha+\beta+8)(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\,x^4$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\,x^3$$

$$+\frac{1}{64}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-8\right)x^2$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-22\right)x$$

$$+\frac{1}{384}(\alpha-\beta)^4 - \frac{1}{64}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 - \frac{37}{384}(\alpha-\beta)^2 + 6\alpha\beta + \frac{7}{64}(\alpha+\beta) + \frac{3}{8}$$

Polynômes de Laguerre

Ici on a

$$\binom{\alpha+k}{k} = L_k^{(\alpha)}(0) = \frac{\mathrm{id}^{-\alpha}\cdot e^{\mathrm{id}}}{d_k}\cdot\partial^k\left[\mathrm{id}^{\alpha+k}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right](0) =$$

$$= \frac{\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}}}{d_k} \cdot \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot \partial^{k-j} e^{-\mathrm{id}}\right](0) = \frac{1}{d_k} \cdot (\alpha+k) \cdots (\alpha) \ ,$$

donc

$$d_k = \frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha)}{\frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha)}{k!}} = k! \ .$$

D'autre part

$$g_{k,j+1} = (-1) \cdot g_{k,j} \ ,$$

donc

$$g_k = \frac{(-1)^k}{k!} \ ,$$

puis

$$\left\|L_k^{(\alpha)}\right\|^2_{2,\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}} = (-1)^k \cdot \frac{\frac{(-1)^k}{k!}}{k!} \cdot k! \cdot \int_0^\infty \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}} = \frac{(\alpha+k)!}{k!} \ ,$$

$$a_k = \frac{\frac{(-1)^k}{k!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}} = -(k+1)$$

et

$$c_k = \frac{\frac{(\alpha+k)!}{k!}}{\frac{(\alpha+k-1)!}{(k-1)!}} \cdot (-k) = -(\alpha+k) \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (-1)^j \cdot (\alpha+k) - \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_{k,j}} = (-1)^{j-1} \cdot j \cdot (\alpha+k)$$

par récurrence, puisque

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (-1)^j \cdot (\alpha+k) - (-1)^{j-1} \cdot j \cdot (\alpha+k) = (-1)^j \cdot (j+1) \cdot (\alpha+k) \ .$$

Ainsi

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{k!} \cdot (-1)^{k-1} \cdot k \cdot (\alpha+k) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}$$

et par suite

$$b_k = \frac{\frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}}{\frac{(-1)^k}{k!}} - \frac{\frac{(-1)^k \cdot (\alpha+k+1)}{(k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}} = -k \cdot (\alpha+k) + (k+1) \cdot (\alpha+k+1) =$$

$$= \alpha + 2k + 1 \ .$$

Les 5 premiers polynômes de Laguerre :

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\alpha+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L_3^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}(\alpha+3)\,x^2 - \frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)\,x + \frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L_4^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}(\alpha+4)\,x^3 + \frac{1}{4}(\alpha+4)(\alpha+3)\,x^2$$

$$-\frac{1}{6}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)\,x + \frac{1}{24}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

Polynômes d'Hermite

Finalement on a

$$2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1} \ni H_k = \frac{e^{\mathrm{id}^2}}{d_k} \cdot \partial^k \left(e^{-\mathrm{id}^2}\right) \in \frac{1}{d_k} \cdot (-2\cdot \mathrm{id})^k + \mathcal{P}_{k-1} \ ,$$

donc

$$d_k = (-1)^k \quad \text{et} \quad g_k = 2^k \ ,$$

puis

$$\|H_k\|^2_{2,e^{-\mathrm{id}^2}} = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{(-1)^k} \cdot k! \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{id}^2} = \sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k! \ ,$$

$$a_k = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

et

$$c_k = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{k-1} \cdot (k-1)!} \cdot \frac{1}{2} = k \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = -2 \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{(-1)^k} \cdot \widetilde{g_{k,k}} = 0 \ ,$$

et par suite

$$b_k = 0 \ .$$

Les 5 premiers polynômes d'Hermite :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Le théorème est enfin complètement démontré. $\square$

Polynômes de Jacobi spéciaux

Legendre :

$$P_k := J_k^{(0,0)} \ .$$

Les 5 premiers polynômes de Legendre :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

Tchebycheff :

1^e^ espèce

$$T_k := \frac{1}{\binom{-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \ .$$

2^e^ espèce

$$U_k := \frac{k+1}{\binom{\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \ .$$

On a les relations

$$T_k(\cos t) = \cos(k \cdot t) \quad \text{et} \quad U_k(\cos t) = \frac{\sin\left[(k+1)\cdot t\right]}{\sin t} \ .$$

En effet, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, soit $t := \arccos x \in \left]0,\pi\right[$; puisque $\sin t > 0$, il vient $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, donc

$$\cos(k \cdot \arccos x) = \operatorname{Re}\left(e^{ki\cdot\arccos x}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\cdot\arccos x}\right)^k =$$

$$= \operatorname{Re}\Big(\cos(\arccos x) + i \cdot \sin(\arccos x)\Big)^k = \operatorname{Re}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} \cdot x^{k-l} \cdot i^l \cdot \left(1-x^2\right)^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}\binom{k}{2l} \cdot x^{k-2l} \cdot (-1)^l \cdot \left(1-x^2\right)^l \in \mathcal{P}_k \ .$$

Mais comme

$$\int_{-1}^{1} \cos(k \cdot \arccos x) \cdot \cos(l \cdot \arccos x) \ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos(k \cdot t) \cdot \cos(l \cdot t) \ dt =$$

$$= \begin{cases} \pi & & k = l = 0 \\ \left[\frac{1}{2k}\cos kt \sin kt + \frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} & \text{si} & k = l \neq 0 \\ \left[\frac{k \cdot \sin(k \cdot t) \cdot \cos(l \cdot t) - l \cdot \cos(k \cdot t) \cdot \sin(l \cdot t)}{k^2 - l^2}\right]_0^\pi = 0 & & k \neq l \end{cases} ,$$

grâce au changement de variable $t = \arccos x$, et puisque $\cos(k \cdot \arccos 1) = 1$, l'unicité montre que $T_k = \cos(k \cdot \arccos)$, ce qu'il fallait démontrer.

Un calcul analogue montre que

$$\frac{\sin\left[(k+1) \cdot \arccos x\right]}{\sin(\arccos x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{Im}\left(e^{(k+1)i \cdot \arccos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{k}{2l} \cdot x^{k-2l-1} \cdot (-1)^l \cdot \left(1-x^2\right)^{l+\frac{1}{2}} \in \mathcal{P}_k ,$$

puis que

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\left[(k+1) \cdot \arccos x\right] \cdot \sin\left[(l+1) \cdot \arccos x\right]}{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^\pi \sin\left[(k+1) \cdot t\right] \cdot \sin\left[(l+1) \cdot t\right] \ dt =$$

$$= \begin{cases} \left[-\frac{1}{2}\frac{\cos[(k+1)t] \cdot \sin[(k+1)t] - (k+1)t}{k+1}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} & & k = l \\ & \text{si} & \\ \left[\frac{(k+1)\cos[(k+1) \cdot t] \cdot \sin[(l+1) \cdot t] - (l+1)\sin[(k+1) \cdot t]\cos[(l+1) \cdot t]}{-(k+1)^2 + (l+1)^2}\right]_0^\pi = 0 & & k \neq l \end{cases} ,$$

et finalement que

$$\frac{\sin\left[(k+1) \cdot \arccos\right]}{\sin(\arccos)}(1) = (k+1) \cdot \lim_{t \to 0+} \frac{\sin\left[(k+1) \cdot t\right]}{(k+1) \cdot t} \cdot \frac{t}{\sin t} = k+1 .$$

Grâce à l'unicité on obtient $U_k = \frac{\sin[(k+1) \cdot \arccos]}{\sin(\arccos)}$. □

Les 5 premiers polynômes de Tchebycheff de 1^e^ espèce et 2^e^ espèce :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

Gegenbauer (ou ultrasphériques) :

$$G_k^{(\gamma)} = \frac{\binom{2\gamma+k-1}{k}}{\binom{\gamma-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}\right)} \quad \text{pour } 0 \neq \gamma > -\frac{1}{2} .$$

et

$$G_k^{(0)} := \lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{\gamma} \cdot G_k^{(\gamma)} .$$

Les 5 premiers polynômes de Gegenbauer lorsque $\gamma \neq 0$:

$$G_0^{(\gamma)}(x) = 1$$

$$G_1^{(\gamma)}(x) = 2\gamma x$$

$$G_2^{(\gamma)}(x) = 2\gamma(\gamma+1)x^2 - \gamma$$

$$G_3^{(\gamma)}(x) = \frac{4}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^3 - 2\gamma(\gamma+1)x$$

$$G_4^{(\gamma)}(x) = \frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^4 - 2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^2 + 2(\gamma+1)\gamma$$

et si $\gamma = 0$

$$G_0^{(0)}(x) = 1$$

$$G_1^{(0)}(x) = 2x$$

$$G_2^{(0)}(x) = 2x^2 - 1$$

$$G_3^{(0)}(x) = \frac{8}{3}x^3 - 2x$$

$$G_4^{(0)}(x) = 4x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

Les valeurs des différentes constantes sont données dans la table suivante :

	P_k	T_k	U_k	$G_k^{(\gamma)}$
ρ	1	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}$
Normalisation en 1	1	1	$k+1$	$\binom{2\gamma+k-1}{k}$
$\left\Vert p_k\right\Vert_{2,\rho}^2$	$\frac{2}{2k+1}$	π si $k=0$; $\frac{\pi}{2}$ si $k>0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi 2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma+k)}{(\gamma+k)\cdot k!\cdot\Gamma(\gamma)^2}$ si $\gamma\neq 0$; 2 si $k=0$, $\frac{2\pi}{k^2}$ sinon, si $\gamma=0$
a_k	$\frac{k+1}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{k+1}{2(\gamma+k)}$
c_k	$\frac{k}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\gamma+k-1}{2(\gamma+k)}$
b_k	0	0	0	0
d_k	$(-1)^k 2^k\cdot k!$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^k\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^{k+1}\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)\cdot\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^k\cdot k!\cdot\Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+k)\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}$
λ_k	$k\cdot(k+1)$	k^2	$k\,(k+2)$	$k\,(2\gamma+k)$

3.6 Les équations différentielles associées aux polynômes classiques

Voici tout d'abord un théorème de transformation d'une équation différentielle du second ordre sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Si $\rho : J \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction λ_J-mesurable, nous désignerons par $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho)$ l'ensemble des classes de fonction λ_J-mesurables f telles que $\rho \cdot f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$. Attention si ρ n'appartient pas à $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, on ne peut pas définir une intégrale de Radon $\rho \cdot \lambda_J$!

THEOREME *Considérons des fonctions $\rho : J \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ λ_J-mesurable, $p : J \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\rho \cdot p \in \mathcal{AC}(J)$ et $q : J \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\rho \cdot q \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, l'application linéaire*

$$L : \mathcal{AC}^{(2)}(J) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho) : f \longmapsto -\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) + q \cdot f$$

(on dit que c'est un opérateur) et I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\omega, \varkappa \in \mathcal{AC}^{(2)}(I)$ tels que $\omega > 0$ sur I et $\varkappa : I \longrightarrow J$ soit une bijection.

La transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \omega \cdot f \circ \varkappa : \mathbb{K}^J \longrightarrow \mathbb{K}^I$$

est bijective et l'application réciproque est donnée par

$$\overset{-1}{\Phi} g = \frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \ ;$$

elle induit une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ sur $\mathbf{L}^2(J, \widetilde{\rho})$ et transforme l'opérateur L en l'opérateur

$$\widetilde{L} : \mathcal{AC}^{(2)}(I) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I, \widetilde{\rho}) : g \longmapsto -\frac{1}{\widetilde{\rho}} \cdot \partial(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial g) + \widetilde{q} \cdot g \ ,$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AC}^{(2)}(J) & \xrightarrow{L} & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho) \\ \overset{-1}{\Phi} \uparrow & & \downarrow \Phi \\ \mathcal{AC}^{(2)}(I) & \xrightarrow[\widetilde{L}]{} & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I, \widetilde{\rho}) \end{array}$$

où

$$\widetilde{\rho} = \frac{\rho \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa|}{\omega^2} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{p \circ \varkappa}{|\partial \varkappa|^2} \quad , \quad \widetilde{q} = \frac{\partial(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa \ .$$

Vérifions que Φ est une bijection entre les espaces considérés : Si $f \in \mathcal{AC}^{(2)}(J)$, alors $\Phi f = \omega \cdot f \circ \varkappa \in \mathcal{AC}^{(2)}(I)$ grâce à la proposition 1.5, (i) et (iii) ; de même si $g \in \mathcal{AC}^{(2)}(I)$, alors $\overset{-1}{\Phi} g = \frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \in \mathcal{AC}^{(2)}(J)$ en ayant utilisé l'exemple 1.5.3 à la place de (i). D'autre part

$\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} = \frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot |\partial \varkappa|} \in \mathcal{AC}(I)$ et

$$\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{q} = \widetilde{\rho} \cdot \left(\frac{\partial (\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa \right) = \frac{\partial (\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega)}{\omega} + \frac{(\rho \cdot q) \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa|}{\omega^2} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$$

grâce à la proposition 1.5.ii. De même si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho)$, on a $\widetilde{\rho} \cdot \Phi f = \frac{(\rho \cdot f) \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa|}{\omega} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$, ainsi que

$$\rho \cdot \overset{-1}{\Phi} g = \rho \cdot \frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} = \left(\frac{\omega \cdot (\widetilde{\rho} \cdot g)}{|\partial \varkappa|} \right) \circ \overset{-1}{\varkappa} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$$

si $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I, \widetilde{\rho})$.

C'est une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ sur $\mathbf{L}^2(J, \widetilde{\rho})$ car

$$\int |f|^2 \cdot \rho \, d\lambda_J = \int |f \circ \varkappa|^2 \cdot \rho \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa| \, d\lambda_I = \int |\omega \cdot f \circ \varkappa|^2 \cdot \frac{|\partial \varkappa| \cdot \rho \circ \varkappa}{\omega^2} d\lambda_I =$$

$$= \int |\Phi f|^2 \cdot \widetilde{\rho} \, d\lambda_I \; .$$

D'autre part

$$\widetilde{L} g = \omega \cdot L \left(\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \right) \circ \varkappa = -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial \left(\rho \cdot p \cdot \partial \left[\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \right] \right) \circ \varkappa + q \circ \varkappa \cdot g \; ,$$

mais

$$\rho \cdot p \cdot \partial \left[\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \right] = \rho \cdot p \cdot \left[\partial \left(\frac{g}{\omega} \right) \cdot \frac{1}{\partial \varkappa} \right] \circ \overset{-1}{\varkappa} =$$

$$= \left[\frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g - \frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial \omega \cdot g \right] \circ \overset{-1}{\varkappa}$$

donc

$$\widetilde{L} g = -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial \left(\left[\frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g - \frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot g \right] \circ \overset{-1}{\varkappa} \right) \circ \varkappa + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial \left[\frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g \cdot \omega - \frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot g \cdot \partial \omega \right] \cdot \frac{1}{\partial \varkappa} + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\partial \varkappa \cdot \rho \circ \varkappa} \cdot \left[\partial \left(\frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g \right) - \frac{1}{\omega} \cdot \partial \left(\frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial \omega \right) \cdot g \right] + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{1}{\widetilde{\rho}} \cdot \partial (\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial g) + \left[\frac{\partial (\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa \right] \cdot g \; .$$

$\square$

EXEMPLE Si l'on veut éliminer la densité ρ , il suffit de considérer la transformation

$$\Phi : f \longmapsto \sqrt{\rho} \cdot f$$

qui induit une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ sur $\mathbf{L}^2(J)$ et transforme L en

$$\widetilde{L} : g \longmapsto -\partial (p \cdot \partial g) + \left[\frac{\partial \left(p \cdot \partial \sqrt{\rho} \right)}{\sqrt{\rho}} + q \right] \cdot g \; .$$

REMARQUE 1 Rappelons que si l'on connait une solution de l'équation différentielle $Lf = 0$, on peut déterminer une seconde solution linéairement indépendante de la première en utilisant la méthode de réduction de d'Alembert (cf. cours d'Analyse [9], proposition 12.13).

L'équation différentielle de Jacobi

Le polynôme de Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$ satisfait sur $]-1,1[$ à l'équation différentielle

$$(1-\mathrm{id})^{-\alpha}\cdot(1+\mathrm{id})^{-\beta}\cdot\partial\left[(1-\mathrm{id})^{\alpha+1}\cdot(1+\mathrm{id})^{\beta+1}\cdot\partial f\right]+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot f=0\ ,$$

c'est-à-dire à

$$\left(1-\mathrm{id}^2\right)\cdot\partial^2 f+\left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\cdot\mathrm{id}\right]\cdot\partial f+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot f=0\ .$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f\longmapsto g:=2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}\cdot f\,(1-2\cdot\mathrm{id}) : \mathbb{K}^{]-1,1[}\longrightarrow\mathbb{K}^{]0,1[}\,;$$

puisque

$$\rho=(1-\mathrm{id})^{\alpha}\cdot(1+\mathrm{id})^{\beta}\quad,\quad p=1-\mathrm{id}^2\quad\text{et}\quad q=-k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho}=\frac{2\cdot(2\cdot\mathrm{id})^{\alpha}\cdot(2-2\cdot\mathrm{id})^{\beta}}{2^{\alpha+\beta+1}}=\mathrm{id}^{\alpha}\cdot(1-\mathrm{id})^{\beta}\quad,\quad\widetilde{p}=\frac{1-(1-2\cdot\mathrm{id})^2}{2^2}=\mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})$$

et

$$\widetilde{q}=-k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\ .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{-\alpha}\cdot(1-\mathrm{id})^{-\beta}\cdot\partial\left[\mathrm{id}^{\alpha+1}\cdot(1-\mathrm{id})^{\beta+1}\cdot\partial g\right]+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot g=0$$

ou bien

$$\mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})\cdot\partial^2 g+\left[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)\cdot\mathrm{id}\right]\cdot\partial g+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot g=0\ .$$

Mise sous la forme

$$\mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})\cdot\partial^2 g+\left[c-(a+b+1)\cdot\mathrm{id}\right]\cdot\partial g-ab\cdot g=0\ ,$$

en posant $a:=-k$, $b:=\alpha+\beta+k+1$ et $c:=\alpha+1$, on dit que c'est l'*équation différentielle hypergéométrique* . Une solution de cette équation est donnée par la *série hypergéométrique* ou de *Gauß*

$$F\,(a,b;c;z):={}_2F_1\,(a,b,c;z):=$$

$$:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\cdot(b)_k}{(c)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}=\frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(a)\cdot\Gamma\,(b)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\,(a+k)\cdot\Gamma\,(b+k)}{\Gamma\,(c+k)}\cdot\frac{z^k}{k!}\ ,$$

dont le rayon de convergence est 1 pour tout $a,b\in\mathbb{C}$ et $c\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}_-$. Cette fonction peut être prolongée analytiquement dans $\mathbb{C}\smallsetminus[1,\infty[$ grâce à la représentatrion intégrale

$$F\,(a,b;c;z):=\frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(a)\cdot\Gamma\,(c-b)}\cdot\int_0^1\mathrm{id}^{b-1}\cdot(1-\mathrm{id})^{c-b-1}\cdot(1-z\cdot\mathrm{id})^{-a}\ ,$$

pour autant que l'on ait $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$. Si $c,c-a-b,a-b\notin\mathbb{Z}$, une seconde solution linéairement indépendante est

$$\mathrm{id}^{1-c}\cdot F\,(a-c+1,b-c+1;2-c;\mathrm{id})\ .$$

Les polynômes de Jacobi sont donnés par

$$J_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{\alpha+k}{k} \cdot F\left(-k, \alpha+\beta+k+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) \ .$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $0 < q < p+1$. Les *polynômes hypergéométriques* $G_k^{(p,q)}$ sont ceux qui sont orthogonaux sur l'intervalle $]0,1[$ par rapport au poids $\mathrm{id}^{q-1} \cdot (1-\mathrm{id})^{p-q}$ et tels que $G_k^{(p,q)}(1) = 1$.

Grâce à la transformation ci-dessus ils correspondent aux polynômes de Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$ pour $\alpha, \beta \in \left]-1, \infty\right[$ tels que $q = \alpha + 1$ et $p = \alpha + \beta + 1$. Il vient

$$G_k^{(p,q)} = \frac{1}{\binom{q-1+k}{k}} \cdot J_k^{(q-1,p-q)}(1 - 2\cdot\mathrm{id}) = F(-k, p+k; q; \mathrm{id}) \ .$$

Citons en plus quelques formules remarquables :

$$\ln(1-z) = -z \cdot F(1,1;2;z)$$

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = 2z \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

$$\arctan z = z \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right)$$

$$\arcsin z = z \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = z \cdot \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot F\left(1, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

L'équation différentielle de Laguerre

Le polynôme de Laguerre $L_k^{(\alpha)}$ satisfait sur $]0,\infty[$ à l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id}^{\alpha+1} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f\right] + k \cdot f = 0 \ ,$$

c'est-à-dire à

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + [\alpha + 1 - \mathrm{id}] \cdot \partial f + k \cdot f = 0 \ .$$

Mise sous la forme

$$\mathrm{id}^{1-b} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id}^{b} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f\right] - a \cdot f = 0 \ ,$$

en posant $a := -k$ et $b := \alpha + 1$, ou bien

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + [b - \mathrm{id}] \cdot \partial f - a \cdot f = 0$$

on dit que c'est l'*équation différentielle hypergéométrique confluente* . Une solution de cette équation est donnée par la *série hypergéométrique confluente de Kummer*

$$M(a,b;z) := {}_1F_1(a;b;z) :=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \cdot \frac{z^k}{k!} \ ,$$

dont le rayon de convergence est ∞ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Cette fonction peut être mise sous forme intégrale

$$M(a,b;z) := \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b-a)} \cdot \int_0^1 \mathrm{id}^{a-1} \cdot (1-\mathrm{id})^{b-a-1} \cdot e^{z\cdot\mathrm{id}} \ ,$$

pour autant que l'on ait $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a > 0$. Une seconde solution linéairement indépendante est

$$U(a,b;\mathrm{id}) := \frac{\pi}{\sin(\pi\,\mathrm{id})} \cdot \left[\frac{M(a,b,\mathrm{id})}{\Gamma(a-b+1)\cdot\Gamma(b)} - \mathrm{id}^{1-b} \cdot \frac{M(a-b+1,2-b,\mathrm{id})}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(2-b)}\right] .$$

Les polynômes de Laguerre sont donnés par

$$L_k^{(\alpha)}(t) = \binom{\alpha+k}{k} \cdot M(-k,\alpha+1;t) .$$

Citons en plus quelques formules remarquables :

$$e^z = M(a,a;z)$$

$$\sin z = z \cdot e^{i\cdot z} \cdot M(1,2;-2i\cdot z)$$

$$\sinh z = z \cdot e^{-z} \cdot M(1,2;2z)$$

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \cdot M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};-t^2\right)$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot f : \mathbb{K}^{]0,\infty[} \longrightarrow \mathbb{K}^{]0,\infty[} ;$$

puisque

$$\rho = \mathrm{id}^{b-1} \quad , \quad p = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad q = a ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{1}{\mathrm{id}} \quad , \quad \widetilde{p} = \mathrm{id}$$

et, utilisant la formule de Leibniz,

$$\widetilde{q} = \mathrm{id}^{-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \mathrm{id} \cdot \partial\left[\frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id} \cdot \partial\left(\mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}}\right)\right] + a = \mathrm{id}^{1-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \partial^2\left(\mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}}\right) + a =$$

$$= \mathrm{id}^{1-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \left[\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}-1\right)\mathrm{id}^{\frac{b}{2}-2} + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{id}^{\frac{b}{2}-1} + \frac{1}{4}\,\mathrm{id}^{\frac{b}{2}}\right] \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} + a =$$

$$= -\left[\frac{\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}{\mathrm{id}} + \frac{b}{2} - a - \frac{\mathrm{id}}{4}\right] .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 g + \left[\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2}\right)^2}{\mathrm{id}} + \frac{b}{2} - a - \frac{\mathrm{id}}{4}\right] \cdot g = 0 .$$

Mise sous la forme

$$\partial^2 g + \left[\frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\mathrm{id}^2} + \frac{\kappa}{\mathrm{id}} - \frac{1}{4}\right] \cdot g = 0 ,$$

en posant $\kappa := \frac{b}{2} - a$ et $\mu := \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$, on dit que c'est l'*équation différentielle de Whittaker* dont un système fondamental de solutions est formé par les *fonctions de Whittaker*

$$M_{\kappa,\mu} := \mathrm{id}^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot M\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, \mathrm{id}\right)$$

et de

$$W_{\kappa,\mu} := \mathrm{id}^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot U\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}, 2\mu+1, \mathrm{id}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\kappa-\mu\right)} \cdot M_{\kappa,\mu} + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\kappa+\mu\right)} \cdot M_{\kappa,-\mu} \ .$$

La fonction de Kummer est aussi liée aux fonctions de Bessel par la transformation

$$f \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i\cdot\mathrm{id}} \cdot f(2i\cdot\mathrm{id}) : \mathbb{C}^{\mathbb{C}\smallsetminus i\cdot\mathbb{R}_+} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}_-} \ .$$

Mais attention cette transformation n'est pas du type décrit dans le théorème puisque le changement de variable se fait dans le domaine complexe :

$$]0,\infty[\longrightarrow i\cdot]0,\infty[: s \longmapsto 2i\cdot s \ .$$

Son image n'est pas l'ensemble de définition $]0,\infty[$ de l'équation différentielle de Kummer, mais $i\cdot]0,\infty[$ surlequel on peut considérer une nouvelle équation différentielle obtenue par restriction de l'équation différentielle de Kummer considérée dans le domaine complexe. Considérons tout d'abord la transformation

$$f \longmapsto h := f(2i\cdot\mathrm{id}) : \mathcal{O}(\mathbb{C}\smallsetminus i\cdot\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}_-) \ ,$$

on obtient

$$(2i\cdot\mathrm{id})^{1-b} \cdot e^{2i\cdot\mathrm{id}} \cdot \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \cdot \partial\left[(2i\cdot\mathrm{id})^b \cdot e^{-2i\cdot\mathrm{id}} \cdot \partial h\right] - a\cdot h = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^{1-b} \cdot e^{2i\cdot\mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id}^b \cdot e^{-2i\cdot\mathrm{id}} \cdot \partial h\right] - 2i\cdot a\cdot h = 0 \ .$$

Remarquons que le poids n'est plus réel ; on ne peut donc pas lui associer un espace de Hilbert. Faisons maintenant la transformation

$$h \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i\cdot\mathrm{id}} \cdot h : \mathbb{C}^{]0,\infty[} \longrightarrow \mathbb{C}^{]0,\infty[} \ .$$

Puisque

$$\rho = \mathrm{id}^{b-1} \cdot e^{-2i\cdot\mathrm{id}} \quad , \quad p = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad q = 2i\cdot a \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = \mathrm{id}$$

et

$$\widetilde{q} = \mathrm{id}^{\frac{1-b}{2}} \cdot e^{i\cdot\mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id}\cdot\partial\left(\mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i\cdot\mathrm{id}}\right)\right] + 2i\cdot a =$$

$$= \mathrm{id}^{\frac{1-b}{2}} \cdot e^{i\cdot\mathrm{id}} \cdot \partial\left[\left(\frac{b-1}{2} - i\cdot\mathrm{id}\right) \cdot \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i\cdot\mathrm{id}}\right] + 2i\cdot a =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[-i\cdot\mathrm{id} + \frac{b-1}{2} \cdot \left(\frac{b-1}{2} - i\cdot\mathrm{id}\right) - i\cdot\mathrm{id} \cdot \left(\frac{b-1}{2} - i\cdot\mathrm{id}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[\left(\frac{b-1}{2} - i\cdot\mathrm{id}\right)^2 - i\cdot\mathrm{id} + 2i\cdot a\cdot\mathrm{id}\right] \ .$$

En choisissant $a := \nu + \frac{1}{2}$ et $b := 2\nu + 1$, on obtient l'équation différentielle

$$\partial\left(\mathrm{id}\cdot\partial g\right) - \frac{1}{\mathrm{id}}\cdot\left[\left(\nu - i\cdot\mathrm{id}\right)^2 + 2i\cdot\nu\cdot\mathrm{id}\right]\cdot g = 0\ ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^2\cdot\partial^2 g + \mathrm{id}\cdot\partial g + \left(\mathrm{id}^2 - \nu^2\right)\cdot g = 0\ .$$

C'est l'*équation différentielle de Bessel* . La *fonction de Bessel* (ou *fonction cylindrique*) d'ordre $\nu \in \mathbb{C}$ est définie par

$$J_\nu\left(s\right) := \frac{1}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\cdot\left(\frac{s}{2}\right)^\nu\cdot e^{-i\cdot s}\cdot M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu+1, 2i\cdot s\right)$$

en est une solution. Les fonctions J_ν et $J_{-\nu}$ forment un système fondamental de solutions.si $\nu \notin \mathbb{Z}$. Quel que soit $\nu \in \mathbb{C}$ il en est de même de la fonction de Bessel J_ν et de la fonction de *Weber*

$$Y_\nu := \frac{1}{\sin\left(\pi\nu\right)}\cdot\left(\cos\left(\pi\nu\right)\cdot J_\nu - J_{-\nu}\right)\ .$$

L'équation différentielle d'Hermite

Le polynôme de d'Hermite H_k satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle

$$e^{\mathrm{id}^2}\cdot\partial\left[e^{-\mathrm{id}^2}\cdot\partial f\right] + 2k\cdot f = 0\ ,$$

c'est-à-dire à

$$\partial^2 f - 2\,\mathrm{id}\cdot\partial f + 2k\cdot f = 0\ .$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\cdot f\left(\frac{\diamond}{\sqrt{2}}\right) : \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{R}}\ .$$

Puisque

$$\rho = e^{-\mathrm{id}^2} \quad , \quad p = 1 \quad \text{et} \quad q = -2k\ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\left(\frac{\mathrm{id}}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}}} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = 2$$

et

$$\widetilde{q} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\cdot\partial\left(2\cdot\partial\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\right) - 2k = 2\cdot e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\cdot\partial^2 e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} - 2k =$$

$$= -e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\cdot\partial\left(\mathrm{id}\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\right) - 2k = -1 + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{id}^2 - 2k\ .$$

Ainsi Φ est une isométrie de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ sur $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}\right)$ et on obtient l'équation différentielle

$$\partial^2 g - \left(\frac{\mathrm{id}^2}{4} + a\right)\cdot g = 0$$

en ayant posé $a := -k - \frac{1}{2}$. Un système fondamental de solutions de cette équation sont les fonctions dites *paraboliques cylindriques* :

$$e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{id}^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{id}^2}{2}\right) \ .$$

On peut aussi considérer la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot f : \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \ .$$

Dans ce cas il vient évidemment

$$\widetilde{\rho} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = 1$$

et

$$\widetilde{q} = e^{\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot \partial^2 e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}} - 2k = -e^{\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot \partial\left(\mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}}\right) - 2k =$$

$$= -1 + \mathrm{id}^2 - 2k \ .$$

Ainsi Φ est aussi une isométrie de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ et on obtient l'équation différentielle

$$\partial^2 g - \mathrm{id}^2 \cdot g + (2k+1) \cdot g = 0 \ .$$

Puisque les polynômes d'Hermite $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ (théorème 1.15 ci-dessous), il en est de même de l'ensemble des *fonctions d'Hermite*

$$h_k := (-1)^k \cdot \left(\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot \mathrm{id}^2} \cdot H_k$$

dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Nous verrons plus tard que l'opérateur auto-adjoint non-borné

$$\widetilde{L} : g \longmapsto -\partial^2 g + \mathrm{id}^2 \cdot g \ ,$$

décrivant l'*oscillateur harmonique*, est diagonalisable dans cette base. Les valeurs propres sont évidemment $2k+1$. Remarquons que

$$h_k = \left(\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{id}^2} \cdot \partial^k \left(e^{-\mathrm{id}^2}\right)$$

par la formule de Rodrigues. On peut montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} - \partial)\, h_k = \sqrt{k+1} \cdot h_{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} + \partial)\, h_k = \sqrt{k} \cdot h_{k-1}$$

et on dit que $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} - \partial)$ est l'*opérateur de création* et $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} + \partial)$ l'*opérateur d'annihilation* .

3.7 Les bases hilbertiennes de polynômes classiques

Voici maintenant le résultat fondamental pour les applications :

THEOREME *Chaque système de polynômes orthonormés classiques est une base hilbertienne de l'espace* $\mathbf{L}^2$ *correspondant. Plus précisément :*

$$\left(\frac{J_k^{(\alpha,\beta)}}{\left\|J_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_{2,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad , \quad \left(\frac{L_k^{(\alpha)}}{\left\|L_k^{(\alpha)}\right\|_{2,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad et \quad \left(\frac{H_k}{\|H_k\|_{2,e^{-\mathrm{id}^2}}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

sont respectivement des bases hilbertiennes de

$$\mathbf{L}^2\left(\left]-1,1\right[,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta\right) \quad , \quad \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right) \quad et \quad \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right) \; .$$

Démonstration de (i) Cela découle de la proposition 1.11.

Démonstration de (ii) La démonstration détailée est laissée en exercice. Il suffit de remarquer tout d'abord que la transformation

$$x\longmapsto e^{-x}:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow \left]0,1\right[$$

définit une isométrie surjective

$$\mathbf{L}^2\left(\left]0,1\right[,(-\ln)^\alpha\right)\longrightarrow\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right):g\longmapsto g\left(e^{-\mathrm{id}}\right) \; .$$

Par suite l'image $\left(e^{-k\cdot\mathrm{id}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite totale des monômes $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{L}^2\left(\left]0,1\right[,(-\ln)^\alpha\right)$ (proposition 1.11) est totale dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$. Utilisant le théorème 1.9, on montre que

$$e^{-n\cdot\mathrm{id}}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\widetilde{L}_k^{(\alpha)}\middle| e^{-n\cdot\mathrm{id}}\right)\cdot\widetilde{L}_k^{(\alpha)} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$$

grâce à l'égalité de Parseval, qui est une conséquence de la formule du binôme! Ceci finit de prouver que $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale.

Démonstration de (iii) En désignant par $\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ et $\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ les sous-espaces vectoriels fermés de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ formés des fonctions paires et respectivement impaires, on a

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)=\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)\boxplus\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right) \; .$$

La transformation

$$x\longmapsto x^2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$$

définit, en posant $\widetilde{g}(x)=g\left(x^2\right)$, des isométries surjectives

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\longrightarrow\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right):g\longmapsto\widetilde{g}$$

et

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\longrightarrow\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right):g\longmapsto\mathrm{id}\cdot\widetilde{g} \; .$$

On en déduit que les images des polynômes de Laguerre $L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ et $L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, qui sont des polynômes de degré $2k$ et $2k+1$ respectivement, forment un système de polynômes orthogonaux total dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$. On a donc

$$H_{2k} \sim L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \quad \text{et} \quad H_{2k+1} \sim \mathrm{id} \cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \ .$$

La totalité des polynômes d'Hermite découle alors de celle de polynômes de Laguerre. – □

En comparant les coefficients de la plus haute puissance, on voit que

$$H_{2k} = (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot k! \cdot L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \quad \text{et} \quad H_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot k! \cdot \mathrm{id} \cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \ .$$

On peut aussi prouver la totalité des polynômes de Laguerre en considérant

Les fonctions génératrices

Il est souvent utile de connaître la *fonction génératrice* associée à un système de polynômes orthogonaux $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convenable, que l'on introduit pour renormaliser les polynômes. Elle est définie par

$$\Phi(x, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cdot p_k(x) \cdot z^k$$

pour tout $x \in J$ et $|z| < R$.

Le calcul de Φ se fait en utilisant la théorie des fonctions. Si γ est un lacet dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$ n'entourant qu'une fois le point $x \in \mathbb{R}_+^*$, la formule de Rodrigues et celle de Cauchy montrent que

$$p_k(x) = \frac{1}{d_k \cdot \rho(x)} \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right)(x) = \frac{1}{d_k \cdot \rho(x)} \cdot \frac{k!}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{\rho(\zeta) \cdot p(\zeta)^k}{(\zeta - x)^{k+1}}\, d\zeta \ ,$$

donc

$$\Phi(x, z) := \frac{1}{\rho(x)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \cdot \rho_k}{2\pi i \cdot d_k} \cdot \int_\gamma \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - x} \cdot \left(\frac{z \cdot p(\zeta)}{\zeta - x}\right)^k d\zeta \ .$$

Faisons le calcul dans le cas des polynômes de Laguerre. Si ln désigne la branche principale du logarithme définie dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$, on a

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} \cdot e^x}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{e^{\alpha \cdot \ln \zeta - \zeta} \cdot \zeta^k}{(\zeta - x)^{k+1}}\, d\zeta \ ,$$

donc

$$\sum_{k\geqslant 0} L_k^{(\alpha)}(x) \cdot z_k = \frac{x^{-\alpha} \cdot e^x}{2\pi i} \cdot \sum_{k\geqslant 0} \int_\gamma e^{\alpha \cdot \ln \zeta - \zeta} \cdot \left(\frac{z \cdot \zeta}{\zeta - x}\right)^k \frac{d\zeta}{\zeta - x} \ .$$

Si $|z| < 1$, en prenant pour γ le cercle d'équation

$$\sqrt{|z|} \cdot |\zeta| = |\zeta - x| \ ,$$

dont le centre est $\frac{x}{1-|z|}$ et le rayon $\frac{x^2}{(1-|z|)^2} - \frac{x}{1-|z|}$, pour tout $\zeta \in \gamma$, on a

$$\left|\frac{z \cdot \zeta}{\zeta - x}\right| = \sqrt{|z|} < 1 \ ,$$

ce qui montre que la série $\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}\right)^k$ converge uniformément sur γ . Par permutation de la somme et de l'intégrale, on obtient

$$\sum_{k\geqslant 0} L_k^{(\alpha)}(x)\cdot z_k = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}\cdot\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}\right)^k\frac{d\zeta}{\zeta-x}=$$

$$=\frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{1-\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}}\frac{d\zeta}{\zeta-x}=\frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{(1-z)\cdot\zeta-x}\,d\zeta=$$

$$=x^{-\alpha}\cdot e^x\cdot Res_{\zeta=\frac{x}{1-z}}\frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{(1-z)\cdot\zeta-x}=\frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{1-z}\cdot\exp\left(\alpha\cdot\ln\frac{x}{1-z}-\frac{x}{1-z}\right)=$$

$$=\frac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{\alpha+1}}\ ,$$

grâce au théorème des résidus, car $\frac{x}{1-z}$ est à l'intérieur du cercle γ .

Ceci fournit, par exemple, une autre manière de prouver la totalité de $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, car pour $z=\frac{n}{n+1}$, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}L_k^{(\alpha)}(x)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^k=\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\frac{\exp\left(\frac{xn}{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}\right)}{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}}=e^{-n\cdot x}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. Mais comme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|L_k^{(\alpha)}\|^2_{2,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+k)!}{k!}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k}<\infty$$

par le critère du quotient, le théorème 1.9 montre que

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot L_k^{(\alpha)}$$

converge dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$ vers ξ . Puisqu'une sous-suite des sommes partielles converge ponctuellement presque partout vers ξ , la formule $(*)$ montre que $\xi=e^{-n\cdot\mathrm{id}}$ $\lambda_{]0,\infty[}$-p.p. . Ainsi

$$e^{-n\cdot\mathrm{id}}=\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot L_k^{(\alpha)}\quad\text{dans }\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\ ,$$

comme nous l'avons démontré dans le théorème ci-dessus.

On a la table suivante :

	ρ_k	$\Phi(x,z)$	R
Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	$2^{-(\alpha+\beta)}$	$\frac{\left(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\alpha}\cdot\left(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	1	$\dfrac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{a+1}}$	1
Hermite H_k	$\dfrac{1}{k!}$	e^{2xz-z^2}	∞
Legendre P_k	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Tchebycheff T_k	1	$\dfrac{(1-xz)}{1-2xz+z^2}$	1
Tchebycheff U_k	1	$\dfrac{1}{1-2xz+z^2}$	1
Gegenbauer $G_k^{(\gamma)}$	1	$\dfrac{1}{(1-2xz+z^2)^{\alpha}}$ si $\gamma \neq 0$ $-\ln(1-2xz+z^2)$ si $\gamma = 0$	1