

Fachbereich Mathematik und Informatik  
Philipps-Universität Marburg



**METHODES**  
**HILBERTIENNES**  
**ET**  
**APPLICATIONS**

**Claude Portenier**

Semestre d'hiver 2004/2005

Version du 18 février 2005



# TABLE DES MATIÈRES

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>iii</b>
<b>INDEX</b>	<b>vii</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>xv</b>
<b>1 ESPACES DE HILBERT</b>	<b>1</b>
1.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires . . . . .	2
1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert . . . . .	7
1.3 Formules de polarisation . . . . .	10
1.4 La notion d'espace-test . . . . .	12
1.5 Les fonctions localement absolument continues . . . . .	15
1.6 Les espaces de Sobolev sur un intervalle . . . . .	20
<b>2 LE THÉORÈME DE LA PROJECTION</b>	<b>25</b>
2.1 Théorème de la projection . . . . .	26
2.2 Théorème de représentation de Riesz . . . . .	31
2.3 Densité et appartenance à un espace $L^2$ . . . . .	34
2.4 Les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram . . . . .	36

# TABLE DES MATIÈRES

2.5	Problèmes aux limites sur un intervalle . . . . .	39
<b>3</b>	<b>BASES HILBERTIENNES</b>	<b>43</b>
3.1	Sommes hilbertiennes . . . . .	44
3.2	Bases hilbertiennes . . . . .	48
3.3	Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	51
3.4	Polynômes orthogonaux . . . . .	53
3.5	Caractérisation des polynômes classiques orthogonaux . . . . .	57
	Polynômes de Jacobi . . . . .	64
	Polynômes de Laguerre . . . . .	66
	Polynômes d'Hermite . . . . .	68
	Polynômes de Jacobi spéciaux . . . . .	69
3.6	Les équations différentielles associées aux polynômes classiques . . . . .	73
	L'équation différentielle de Jacobi . . . . .	75
	L'équation différentielle de Laguerre . . . . .	76
	L'équation différentielle d'Hermite . . . . .	79
3.7	Les bases hilbertiennes de polynômes classiques . . . . .	81
	Les fonctions génératrices . . . . .	82
<b>4</b>	<b>THÉORIE DES DISTRIBUTIONS</b>	<b>85</b>
4.1	La notion de distribution . . . . .	86
4.2	Dérivation . . . . .	89
4.3	Multiplication, translation et dilatation . . . . .	92
4.4	Primitives . . . . .	94
4.5	Quelques exemples multi-dimensionnels . . . . .	96
4.6	Le support d'une distribution . . . . .	99
4.7	Convergence d'une suite de distributions . . . . .	101

<b>5</b>	<b>TRANSFORMATION DE FOURIER</b>	<b>103</b>
5.1	Intégrales de Fourier . . . . .	104
5.2	Formule d'inversion . . . . .	108
5.3	Distributions tempérées . . . . .	111
5.4	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ . . . . .	114
5.5	Espaces de Sobolev . . . . .	118
5.6	Espaces de Sobolev locaux . . . . .	122
5.7	Espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	125
<b>6</b>	<b>LE PROBLÈME DE DIRICHLET</b>	<b>131</b>
6.1	Le théorème de prolongement . . . . .	132
6.2	Le théorème de trace . . . . .	137
6.3	Formulation variationnelle du problème de Dirichlet . . . . .	140
6.4	L'équation des ondes . . . . .	142



# INDEX

Version du 18 février 2005

- $1_{a,b}$  : fonction caractéristique signée, 15
- $A^\perp$  : ensemble orthogonal, 26
- $\mathcal{AC}(J)$  : fonctions absolument continues, 16
- $\mathcal{AC}^{(m)}(J)$  : fonctions absolument continues d'ordre  $m$ , 18
- $\binom{z}{k}$  : coefficient binomial, 58
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  : "bracket" de semi-dualité, 31
- $\Delta$  : opérateur de Laplace modifié, 105
- $\partial_j$  : dérivées partielles modifiées, 105
- $\mathcal{F}$  : transformation de Fourier, 114
- ${}_1F_1(a; b; z)$  : fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 76
- $f_0$  : prolongement par 0 d'une fonction, 125
- $F(a, b; c; z)$  ,  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  : fonction hypergéométrique ou de Gauß, 75
- $G_k^{(\gamma)}$  : polynômes de Gegenbauer, 71
- $G_k^{(p,q)}$  : polynômes hypergéométriques, 76
- $H_k$  : polynômes d'Hermite, 57
- $\mathcal{H}^{(1),0}(J)$  : espace de Sobolev, 23
- $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$  : espace de Sobolev sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 125
- $\mathcal{H}^{(m)}(J)$  : espace de Sobolev d'ordre  $m$  sur un intervalle, 20
- $\mathcal{H}^{(m)}(X)$  : espace de Sobolev sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 125
- $\mathcal{H}^{(s)}(X)$  : espace de Sobolev d'ordre  $s \in \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , 119
- $\mathcal{H}_{\text{loc}}^{(s)}(X)$  : espace de Sobolev local d'ordre  $s \in \mathbb{R}$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 122
- $h_k$  : fonctions d'Hermite, 80
- $\square$  : sous-espace vectoriel fermé, 9
- $J_\nu(s)$  : fonctions de Bessel ou cylindriques, 79
- $J_k^{(\alpha,\beta)}$  : polynômes de Jacobi, 57
- $\mathcal{K}^{(1)}(J)$  : espace des fonctions continûment dérivables à support compact, 39
- $|\cdot\rangle$  : vecteur ket, forme semi-linéaire sur un espace préhilbertien, 32
- $|\cdot\rangle$  : vecteur ket, forme semi-linéaire, 31
- $L(F, G)$  ,  $\mathcal{L}(F, G)$  : espaces d'applications linéaires, 26
- $L_k^{(\alpha)}$  : polynômes de Laguerre, 57
- $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$  : espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la densité  $\rho$ , 8
- $\mathbf{L}_{\text{mod}}^2(\mathbb{R}^n)$  : espace des fonctions à croissance quadratique modérée, 118
- $M(a, b; z)$  : fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 76
- $M_{\kappa,\mu}$  : fonction de Whittaker, 77
- $\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$  : ensemble des intégrales de Radon dont tous les moments sont finis, 53
- $\|\cdot\|$  : norme d'un opérateur, 26
- $\|\cdot\|$  : norme d'une forme (semi-) linéaire, 31
- $\|\cdot\|$  : norme d'une forme sesquilinéaire, 31
- $\|\cdot\|_{2,\mu,\rho}$  : norme de  $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ , 8
- $\|\cdot\|_{2,\mu}$  : norme de  $\mathbf{L}^2(\mu)$ , 5
- $\perp$  : relation d'orthogonalité, 26
- $(\cdot|\cdot)_\mu$  : produit scalaire de  $\mathbf{L}^2(\mu)$ , 5
- $P_{\mathcal{G}}\xi$  : projection de  $\xi$  sur  $\mathcal{G}$ , 27
- $P_k$  : polynômes de Legendre , 69
- $(z)_k$  : symbole de Pochhammer, 58
- $\mathcal{P}$  : espace des polynômes, 53
- $\boxplus$  : somme directe orthogonale ou hilbertienne, 29, 46
- $\text{supp } \mu$  : support d'une intégrale, 8
- $T_k$  ,  $U_k$  : polynômes de Tchebycheff, 69
- $W_{\kappa,\mu}$  : fonction de Whittaker, 77
- $\mathcal{W}^{(m),p}(X)$  : espace de Sobolev sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 135
- $\mathcal{W}^{(s),p}(X)$  : espace de Sobolev fractionnaire sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 136
- absolu
  - fonction localement —ment continue, 16
  - fonctionnelle —ment homogène, 3
- algébrique
  - distribution —, 86



- annihilation
  - opérateur d'—, 80
- application
  - linéaire bornée, 26
  - linéaire, bilinéaire, sesquilinéaire, 2
  - sesquilinéaire bornée, 31
- base
  - hilbertienne, 48
- Bernstein
  - polynômes de —, 55
- Bessel
  - équation différentielle de —, 79
  - inégalité de —, 44, 48
- bilinéaire, 2
- binomial
  - coefficient — généralisé, 58
- borné
  - application linéaire —e, 26
  - application sesquilinéaire —e, 31
- caractéristique
  - fonction — signée, 15
- Cauchy
  - partie principale de —, 97
- central
  - symétrie —e, 93
- classique
  - solution —, 39, 140
  - solution semi- —, 39
- coefficient
  - binomial généralisé, 58
- coercitif
  - forme sesquilinéaire —ve, 36
- commençante
  - section —, 5
- confluente
  - équation différentielle, série hypergéométrique —, 76
- continu
  - fonction localement absolument —e, 16
- convexe
  - uniformément —, 29
- corde
  - vibrante, 146
- création
  - opérateur de —, 80
- croissance
  - fonction à — modérée, 111
  - fonction à — quadratique modérée, 118
- cylindrique
  - fonction —, 79
  - ouvert —, 132
- décomposition
  - hilbertienne, 46
- décroissance
  - fonction à — rapide, 105
- dénombrable
  - espace localement convexe de type —, 51
- dérivée
  - partielle d'une distribution, 89
  - partielle modifiée, 105
- dilaté
  - fonction, distribution —e, 93
- Dirac
  - suite de —, 102
- distribution
  - algébrique, 86
  - de Dirac, 87
  - dérivée partielle d'une —, 89
  - dilatée, 93
  - produit par une fonction, 92
  - support d'une —, 99
  - tempérée, 111
  - translatée, 93
- divergence
  - théorème de la —, 138
- dual
  - fort, 31
- égalité
  - de Parseval, 44, 48
  - du parallélogramme, 10
- ensemble
  - orthogonal, 26
- énumération
  - d'un ensemble, 5
- équation différentielle
  - d'Hermite, 79
  - de Bessel, 79
  - de Jacobi, 75
  - de Laguerre, 76
  - de type hypergéométrique, 59
  - de Whittaker, 77
  - hypergéométrique confluente, 76

## INDEX

- espace
  - préhilbertien, de Hilbert, 7
- faible
  - limite —, 101
  - solution —, 39, 140
- fonction
  - s d’Hermite, 80
  - s de Whittaker, 77
  - à croissance modérée, 111
  - caractéristique signée, 15
  - de Bessel, 79
  - de Heaviside, 87
  - dilatée, 93
  - localement absolument continue, 16
  - témodérée, 111
  - translatée, 92
- forme
  - bilinéaire, sesquilinéaire, 2
- formule
  - s de polarisation, 10
  - d’inversion, 108
  - de Rodrigues, 58
- fort
  - semi-dual —, 31
- Fourier
  - intégrale, transformation de —, 104
  - transformée de — d’une distribution tempérée, 114
- Gauß
  - série (hypergéométrique) de —, 75
- Gegenbauer
  - polynômes de —, 71
- Gram-Schmidt
  - procédé d’orthogonalisation de —, 51
- harmonique
  - oscillateur —, 80
- Heaviside
  - fonction de —, 87
- Hermite
  - équation différentielle, fonctions d’—, 79
  - polynômes de —, 57, 68
- hermitien
  - forme sesquilinéaire —ne, 2
- Hilbert
  - espace de —, 7
- hilbertien
  - base —ne, 48
  - décomposition, somme —ne, 46
- Hölder
  - inégalité de — abstraite, 31
- homogène
  - fonctionnelle positivement, absolument —, 3
  - problème aux limites —s, 39
- hypergéométrique
  - équation différentielle de type —, 59
  - série —, 75
  - équation différentielle, série — confluyente, 76
  - polynômes —s, 76
- impair
  - prolongement —, 132
- inégalité
  - de Bessel, 44, 48
  - de Hölder abstraite, 31
  - de Poincaré, 23, 127
  - de Sobolev, 20
  - de trace, 137
- inhomogène
  - problème aux limites —s, 41
- intégrale
  - de Fourier, 104
- intégration
  - par parties, 17, 18, 138
- inversion
  - formule d’—, 108
- Jacobi
  - équation différentielle de —, 75
  - polynômes de —, 57, 64
- ket
  - vecteur —, 31
- Kummer
  - série (hypergéométrique confluyente) de —, 76
- Laguerre
  - équation différentielle de —, 76
  - polynômes de —, 57, 66
- Laplace
  - opérateur de — modifié, 105
- Lax-Milgram
  - théorème de —, 37
- Lebesgue

- lemme de Riemann- —, 106
- Legendre
  - polynômes de —, 69
- lemme
  - de Riemann-Lebesgue, 106
  - de Sobolev, 120
  - de Sobolev local, 122
  - de Weyl, 123
- limite
  - faible, 101
- linéaire
  - application (semi-)—, 2
- local
  - fonction —ment absolument continue, 16
- modéré
  - fonction à croissance —e, 111
  - fonction à croissance quadratique —e, 118
- moment, 53
- non-dégénéré
  - forme sesquilinéaire —e, 2
- norme, 3
  - semi- —, 3
- opérateur
  - de création et d'annihilation, 80
  - de Laplace modifié, 105
- orthogonal
  - éléments —aux, 26
  - ensemble —, 26
  - procédé d'—isation de Gram-Schmidt, 51
  - projection —e, 29
  - système de polynômes —aux, 54
- orthonormé
  - système —, 48
  - système de polynômes —s, 54
- orthoprojecteur, 29
- oscillateur
  - harmonique, 80
- ouvert
  - cylindrique, 132
- pair
  - prolongement —, 132
- Paley
  - théorème de — -Wiener, 110
- théorème de — -Wiener-Schwartz, 116
- parallélogramme
  - égalité, 10
- Parseval
  - égalité de —, 44, 48
- partie
  - intégration par —s, 138
  - principale de Cauchy, 97
- partiel
  - dérivée —le d'une distribution, 89
  - dérivée —le modifiée, 105
- pivot
  - intégrale —, 12
- Plancherel
  - théorème de —, 118
- Pochhammer
  - symbole de —, 58
- Poincaré
  - inégalité de —, 23, 127
- polarisation
  - formules de —, 10
- polynômes
  - d'Hermite, 68
  - de Bernstein, 55
  - de Gegenbauer, 71
  - de Jacobi, 64
  - de Jacobi, Laguerre, Hermite, 57
  - de Laguerre, 66
  - de Legendre, 69
  - de Tchebycheff, 69
  - hypergéométriques, 76
  - système de —, 54
- positif
  - forme sesquilinéaire —ve, 2
  - forme sesquilinéaire strictement —ve, 36
  - matrice —ve, 5
- positivement
  - fonctionnelle — homogène, 3
- préhilbertien
  - espace —, 7
- principale
  - partie — de Cauchy, 97
- problème
  - aux limites homogènes, 39
  - aux limites inhomogènes, 41
  - des moments, 53
- produit
  - d'une distribution par une fonction, 92

## INDEX

- règle du —, 92, 137
- scalaire, 2
- projection
  - orthogonale, 29
  - théorème de la —, 27
- prolongement
  - pair, impair, 132
- Pythagore
  - théorème de —, 26
- rapide
  - fonction à décroissance —, 105
- règle
  - de substitution, 17
  - du produit, 92, 137
- régularité
  - théorème de —, 135
- Riemann
  - lemme de — -Lebesgue, 106
- Riesz
  - théorème de représentation de —, 32
- Rodrigues
  - formule de —, 58
- Schwartz
  - théorème de Paley-Wiener- —, 116
- section
  - commençante, 5
- semi
  - norme, 3
  - solution — -classique, 39
- semi-
  - dual
    - fort, 31
    - linéaire, 2
- séparable
  - espace localement convexe —, 51
- séparant
  - fonctionnelle —e, 3
- série
  - hypergéométrique confluyente ou de Kummer, 76
  - hypergéométrique ou de Gauß, 75
- sesquilinéaire
  - application — à gauche, à droite, 2
  - forme — strictement positive, coercitive, 36
- signé
  - fonction caractéristique —, 15
- Sobolev
  - espace de —, 20, 119
  - espace de — fractionnaire sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 136
  - espace de — local, 122
  - espace de — sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 125, 135
  - inégalité de —, 20
  - lemme de —, 120
  - lemme de — local, 122
- solution
  - classique, faible, 39, 140
- somme
  - hilbertienne, 46
- sous-additive
  - fonctionnelle —, 3
- Stampacchia
  - théorème de —, 36
- Stone
  - théorème de — -Weierstraß, 50
- strict
  - forme sesquilinéaire —ement positive, 36
  - matrice —ement positive, 5
- substitution
  - règle de —, 17
- suite
  - de Dirac, 102
- support
  - d'une distribution, 99
  - d'une intégrale de Radon, 8
- symbole
  - de Pochhammer, 58
- symétrie
  - centrale, 93
- système
  - de polynômes, 54
  - orthonormé, 48
- Tchebycheff
  - polynômes de —, 69
- tempéré
  - distribution —e, 111
  - fonction —e, 111
- test
  - espace —, 12
- théorème
  - de la divergence, 138
  - de la projection, 27
  - de Lax-Milgram, 37

- de Paley-Wiener, 110
- de Paley-Wiener-Schwartz, 116
- de Plancherel, 118
- de Pythagore, 26
- de régularité, 135
- de représentation de Riesz, 32
- de Stampacchia, 36
- de Stone-Weierstraß, 50
- de trace, 138
- de Weierstraß, 56
- intégration par parties, 17, 18
- règle de substitution, 17
- trace
  - inégalité de —, 137
  - théorème de —, 138
- transformation
  - de Fourier, 104
- translaté
  - fonction, distribution —e, 92
- type
  - espace localement convexe de — dénombrable, 51
- ultrasphérique
  - polynômes —s, 71
- uniforme
  - ément convexe, 29
- vecteur
  - ket, 31
- vibrante
  - corde —, 146
- Weierstraß
  - théorème de —, 56
  - théorème de Stone- —, 50
- Weyl
  - Lemme de —, 123
- Whittaker
  - équation différentielle, fonctions de —, 77
- Wiener
  - théorème de Paley- —, 110
  - théorème de Paley- — -Schwartz, 116



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 1992.
- [2] Jean Pierre Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tomes 1 et 2, Presses Universitaires de France, 1987
- [3] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [4] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [5] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 2*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [6] Jürgen Heine, *Topologie und Funktionalanalysis*, Oldenbourg, 2002.
- [7] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [8] Friedrich Hirzebruch und Winfried Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, BI-Hochschultaschenbücher, Band 296, Mannheim, 1971.
- [9] Claude Portenier, *Cours d'Analyse*, Marburg, 2004.
- [10] Claude Portenier, *Cours d'Analyse fonctionnelle*, Marburg, 2004.
- [11] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics, I : Functional analysis, II : Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New-York, 1972/1975.
- [12] Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970
- [13] Michel Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003.