Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungen der Übungen

zur Vorlesung

HILBERTRAUM-METHODEN

UND ANWENDUNGEN

Prof. Dr. C. Portenier

Wintersemester 2004/2005

Fassung vom 6. Januar 2005

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 5

Aufgabe 1

(a) Da φ und ψ orthogonormiert sind, folgt mit dem Satz von Pythagoras

$$\|\varphi \pm \psi\|^2 = 2$$

und

$$(\varphi + \psi | \varphi - \psi) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0\ !$$

Da

$$\mathbb{K} \cdot \varphi \oplus \mathbb{K} \cdot \psi = \mathbb{K} \cdot \frac{\varphi + \psi}{\sqrt{2}} \oplus \mathbb{K} \cdot \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{2}}$$

folgt die Behauptung.

(b) Nach Blatt 4, Aufgabe 3 sind alle Abbildungen im folgenden Diagramm surjektive Isometrien :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbf{L}^2_g([-1,1]) & \longrightarrow & \mathbf{L}^2([0,1]) \\ \mathbf{L}^2([0,1]) & \longrightarrow & \mathbf{L}^2([-1,1]) & \longrightarrow & \boxplus & & \\ & & & & \mathbf{L}^2_u([-1,1]) & \longrightarrow & \mathbf{L}^2([0,1]) \\ & & & & & & \\ \xi & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \xi \circ \left(\frac{\mathrm{id}+1}{2}\right) & & \gamma & \longmapsto & \sqrt{2} \cdot \gamma_{|[0,1]} \end{array}$$

Da nach Analysis III

$$(e_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\exp(2\pi i k\, \mathrm{id}))_{k \in \mathbb{Z}}$$

eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2([0,1])$ ist, ist dann

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{2\pi i k \cdot \frac{\mathrm{id}+1}{2}}\right)_{k \in \mathbb{Z}}\ , \text{ also auch } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pi i k \cdot \mathrm{id}}\right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2([-1,1])$. Nach (a) ist

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pi i k \cdot \mathrm{id}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi i k \cdot \mathrm{id}}}{\sqrt{2}} = (\cos(\pi k\, \mathrm{id}), \sin(\pi k\, \mathrm{id}))$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$ ein orthonormiertes Paar und

$$\mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pi i k \cdot \mathrm{id}} \boxplus \mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi i k \cdot \mathrm{id}} = \mathbb{C} \cdot \cos(\pi k\, \mathrm{id}) \boxplus \mathbb{C} \cdot \sin(\pi k\, \mathrm{id})\ .$$

Damit gilt

$$\mathbf{L}^2([-1,1]) = \boxplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pi i k \cdot \mathrm{id}} = \mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \boxplus \left(\boxplus_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pi i k \cdot \mathrm{id}} \boxplus \mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi i k \cdot \mathrm{id}}\right]\right) =$$

$$= \mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \boxplus \left(\boxplus_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\mathbb{C} \cdot \cos(\pi k \, \mathrm{id}) \boxplus \mathbb{C} \cdot \sin(\pi k \, \mathrm{id}) \right] \right) =$$

$$= \mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \boxplus \left(\boxplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C} \cdot \cos(\pi k \, \mathrm{id}) \right) \boxplus \left(\boxplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C} \cdot \sin(\pi k \, \mathrm{id}) \right) \ ,$$

also

$$\mathbf{L}_g^2([-1,1]) = \mathbb{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \boxplus \left(\boxplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C} \cdot \cos(\pi k \, \mathrm{id}) \right)$$

und

$$\mathbf{L}_u^2([-1,1]) = \boxplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C} \cdot \sin(\pi k \, \mathrm{id}) \ .$$

Schließlich sind

$$\left(\sqrt{2} \cdot \cos(\pi k \, \mathrm{id}) \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{bzw.} \quad \left(\sqrt{2} \cdot \sin(\pi k \, \mathrm{id}) \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$$

hilbertsche Basen in $\mathbf{L}^2([0,1])$.

(c) Zunächst beachte man, daß, da 0 glatt ist, jede Lösung $f \in \mathcal{AC}^{(2)}([0,1])$ automatisch in $\mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ liegt.

Falls $\lambda > 0$, liefert Analysis, 12.14 folgendes Fundamentalsystem von Lösungen:

$$\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot \mathrm{id}\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot \mathrm{id}\right) \ .$$

Die allgemeine Lösung f ist in diesem Fall also gegeben durch

$$f(t) = a \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\lambda} t\right)$$

mit

$$a = f(0) = 0 = f(1) = b \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) \ .$$

Es folgt für $b \neq 0$, daß $\sqrt{\lambda} = \pi k$ mit $k \in \mathbb{N}^*$. Das heißt, die allgemeine Lösung des Randwertproblems ist $\alpha \cdot \sin(\pi k \, \mathrm{id})$, wobei $\sqrt{\lambda} = \pi k$. Ansonsten gibt es keine nicht-triviale Lösung. Hauptsatz 2.5 ist hier nicht anwendbar, da $q = -\lambda < 0$ wäre.

Ist nun $\lambda = 0$, so ist trivialerweise

$$1 \quad \text{und} \quad \mathrm{id}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen. Falls nun eine Lösung f durch

$$f(t) = a + bt$$

gegeben ist, folgt

$$a = f(0) = 0 = f(1) = b \ ,$$

also ist $f = 0$ die einzige Lösung.

Ist schließlich $\lambda < 0$, so ist

$$e^{\pm \sqrt{|\lambda|} \cdot \mathrm{id}}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen. Falls nun eine Lösung f durch

$$f(t) = ae^{\sqrt{|\lambda|}\cdot \mathrm{id}} + be^{-\sqrt{|\lambda|}\cdot \mathrm{id}}$$

gegeben ist, folgt

$$a + b = f(0) = 0 = f(1) = ae^{\sqrt{|\lambda|}} + be^{-\sqrt{|\lambda|}} \ ,$$

also $b = -a$ und somit $0 = a \cdot \left(e^{\sqrt{|\lambda|}} - e^{-\sqrt{|\lambda|}}\right)$; daraus folgt $a = 0 = b$, Die einzige Lösung ist $f = 0$.

Man hätte auch wenn $\lambda \leqslant 0$ auch Hauptsatz 2.5 mit $p = \rho = 1$, $g = 0$ und $q = -\lambda \geqslant 0$ anwenden. Das Randwertproblem ist somit eindeutig lösbar und die einzige Lösung ist $f = 0$!

Man kann nun sagen, daß man den auf $\mathcal{H}_0^{(2)}(]0,1[) \subset \mathbf{L}^2([0,1])$ definierten Operator ∂^2 in der in $\mathcal{H}_0^{(2)}(]0,1[)$ enthaltenen hilbertschen Basis $(\sin(\pi k \,\mathrm{id}))_{k\geqslant 1}$von $\mathbf{L}^2([0,1])$ diagonalisiert hat. Der Eigenwert des Eigenvektors $\sin(\pi k \,\mathrm{id})$ ist $\pi^2 k^2$.

Aufgabe 2

(a) Es gilt

$$B_n 1(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1 \ .$$

Weiterhin

$$B_n \,\mathrm{id}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n!}{n \cdot (n-k)! \cdot k!} \cdot x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} = x(x+1-x)^{n-1} = x \ .$$

(b) Es gilt

$$B_n [\mathrm{id}(1-\mathrm{id})](x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \cdot (n-k) \cdot n!}{n^2 \cdot (n-k)! \cdot k!} \cdot x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{n \cdot (n-k-1)! \, (k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \cdot x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x(1-x) \ .$$

Insbesondere gilt

$$|f(x) - B_n f(x)| = \frac{1}{n} \cdot |x(1-x)| \leqslant \frac{1}{4n} \longrightarrow 0 \ ,$$

also die Behauptung.

(c) Da B_n linear ist, folgt mit

$$f_y(x) = (y-x)^2 = y^2 - 2yx + x^2 = y^2 - 2yx + x - x(1-x) \ ,$$

daß

$$B_n f_y(x) = y^2 - 2yB_n \operatorname{id}(x) + B_n \operatorname{id}(x) - B_n \operatorname{id}(1-\operatorname{id})(x) =$$

$$= y^2 - 2yx + x - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x(1-x) \ ,$$

also

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} = B_n f_x(x) =$$

$$= x^2 - 2x^2 + x - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x(1-x) = \frac{1}{n} \cdot x(x-1) \leqslant \frac{1}{4n} \ .$$

Aufgabe 3

(a) Sei $C = \|f\|_\infty$. Dann gilt

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant 2C \leqslant \frac{2C}{\delta^2} \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{für alle} \quad k \in B_n(\delta) \ .$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ derart, daß

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{wann immer} \quad |u - v| \leqslant \delta \ .$$

Dies ist möglich, da f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist. Sei $n_0 \in \mathbb{N}^*$, so daß

$$\frac{C}{2\delta^2} \cdot \frac{1}{n_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Nehme $x \in [0,1]$. Es gilt für alle $n \geqslant n_0$, wobei $A_n(\delta)$ und $B_n(\delta)$ für x wie in der Aufgabe definiert sind,

$$|f(x) - B_n f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{k \in A_n(\delta)} \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2C}{\delta^2} \cdot \sum_{k \in B_n(\delta)} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} B_n 1(x) + \frac{C}{2\delta^2 n} \leqslant \varepsilon \ .$$

Da $x \in [0,1]$ beliebig war, folgt die Behauptung.

(c) Die Abbildung

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow [0,1] : x \longmapsto \frac{x-a}{b-a} \ .$$

ist offenbar eine affine Bijektion, also ein Homöomorphismus. Damit ist

$$\mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b]) : f \longmapsto f \circ \gamma$$

auch eine Bijektion und

$$\|f \circ \gamma\|_{\infty,[a,b]} = \|f\|_{\infty,[0,1]} \ .$$

Da

$$\mathcal{P}\left([0,1]\right) \circ \gamma = \mathcal{P}\left([a,b]\right)$$

und $\mathcal{P}\left([0,1]\right)$ dicht in $\mathcal{C}\left([0,1]\right)$, ist $\mathcal{P}\left([a,b]\right)$ dicht in $\mathcal{C}\left([a,b]\right)$.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 6

Aufgabe 1

(a) Das Polynom

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = d_1 \cdot p_1$$

hat Grad 1 und

$$d_2 \cdot \rho \cdot p_2 = \partial^2 \left(\rho \cdot p^2\right) = \partial \left[\partial(\rho \cdot p) \cdot p + \rho \cdot p \cdot \partial p\right] = \partial \left[\rho \cdot p \cdot (q + \partial p)\right] =$$

$$= \rho \cdot q \cdot (q + \partial p) + \rho \cdot p \cdot \partial(q + \partial p) \ ,$$

also

$$p \cdot \partial^2 p = d_2 \cdot p_2 - q^2 - \partial(q \cdot p) \ .$$

(b) Ist aber $\deg p > 2$, so folgt

$$\deg\left(p \cdot \partial^2 p\right) = \deg p + \deg p - 2 > \deg p = \deg \partial(q \cdot p) =$$

$$= \deg\left(d_2 \cdot p_2 - q^2 - p \cdot \partial^2 p\right) = \deg\left(p \cdot \partial^2 p\right) \ ,$$

da $\deg\left(d_2 \cdot p_2 - q^2\right) \leqslant 2$. Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe 2

(a) Es gilt

$$\partial^{k+1}\left(\rho p^k\right) = \partial\left(\rho \cdot \frac{1}{\rho}\partial^k\left(\rho p^k\right)\right) = \frac{\partial\rho}{\rho} \cdot \partial^k\left(\rho p^k\right) + \rho \cdot d_k \partial p_k$$

und wegen

$$\frac{p\partial\rho}{\rho} = d_1 p_1 - \partial p \ ,$$

folgt

$$-d_k\rho \cdot Lp_k = \partial\left(\rho p \cdot d_k \partial p_k\right) = \partial\left(-\frac{p\partial\rho}{\rho} \cdot \partial^k\left(\rho p^k\right) + p \cdot \partial^{k+1}\left(\rho p^k\right)\right) =$$

$$= \left(\partial^2 p - d_1 \partial p_1\right) \cdot \partial^k\left(\rho p^k\right) + \left(2\partial p - d_1 p_1\right) \cdot \partial^{k+1}\left(\rho p^k\right) + p \cdot \partial^{k+2}\left(\rho p^k\right) \ .$$

(b) Es gilt

$$p\partial\left(\rho \cdot p^k\right) = \left(p\partial\rho + k\rho\partial p\right) \cdot p^k = \left[d_1 p_1 + (k-1)\,\partial p\right] \cdot \rho p^k \ .$$

Insbesondere

$$\partial^{k+1}\left(p\partial\left(\rho p^k\right)\right) = \partial^{k+1}\left[\left(d_1 p_1 + (k-1)\,\partial p\right) \cdot \rho p^k\right] \ . \qquad (*)$$

Nach Aufgabe 1 (ii) ist $\deg p \leqslant 2$ und folglich $\deg\left[d_1 p_1 + (k-1)\,\partial p\right] \leqslant 1$ Durch Anwendung der Leibnizformel auf beiden Seiten der Gleichung $(*)$ folgt

$$p \cdot \partial^{k+2}\left(\rho p^k\right) + (k+1) \cdot \partial p \cdot \partial^{k+1}\left(\rho p^k\right) + \frac{k\,(k+1)}{2} \cdot \partial^2 p \cdot \partial^k\left(\rho p^k\right) =$$

$$= \left(d_1 p_1 + (k-1)\,\partial p\right) \cdot \partial^{k+1}\left(\rho p^k\right) + (k+1) \cdot \left(d_1 \partial p_1 + (k-1)\,\partial^2 p\right) \cdot \partial^k\left(\rho p^k\right) \ .$$

Damit

$$\left(2\partial p - d_1 p_1\right) \cdot \partial^{k+1}\left(\rho p^k\right) + p \cdot \partial^{k+2}\left(\rho p^k\right) = (k+1) \cdot \left[d_1 \partial p_1 + \left(\frac{k}{2} - 1\right)\partial^2 p\right] \cdot \partial^k\left(\rho p^k\right) \ .$$

Durch Einsetzen in die Gleichung aus (i) folgt

$$L p_k = -\frac{1}{d_k \rho}\left[k d_1 \partial p_1 + \left(\frac{k\,(k+1)}{2} - k\right)\partial^2 p\right] \cdot \partial^k\left(\rho p^k\right) = -k \cdot \left[d_1 \partial p_1 + \frac{k-1}{2}\partial^2 p\right] \cdot p_k \ ,$$

also die Behauptung.

Aufgabe 3

(a) Die Abbildung

$$\Phi : \mathbf{L}^2\left(]0,1[, (-\ln)^\alpha\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \rho\right) : f \longmapsto f \circ e^{-\operatorname{id}}$$

ist eine Isometrie, da

$$e^{-\operatorname{id}}\left[(-\ln)^\alpha \cdot \lambda_{[0,1]}\right] = \operatorname{id}^\alpha \cdot \left|\det \partial e^{-\operatorname{id}}\right| \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} = \rho \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} \ .$$

Insbesondere gilt

$$\int_0^1 (-\ln)^\alpha \, d\lambda = \int_0^\infty \operatorname{id}^\alpha \cdot e^{-\operatorname{id}} \, d\lambda \ .$$

Für $-1 < \alpha < 0$ ist

$$0 \leqslant \int_0^\infty \operatorname{id}^\alpha \cdot e^{-\operatorname{id}} \, d\lambda \leqslant \int_0^1 x^\alpha \, dx + \int_1^\infty e^{-x} \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^1 - \left[e^{-x}\right]_1^\infty = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{e} < \infty \ .$$

Für $\alpha \geqslant 0$ gibt es ein x_0 , so daß $\left(1+x^2\right) x^\alpha e^{-x} \leqslant 1$ für alle $x \geqslant x_0$, also

$$0 \leqslant \int_0^\infty \operatorname{id}^\alpha \cdot e^{-\operatorname{id}} \, d\lambda \leqslant \int_0^{x_0} x^\alpha \cdot e^{-x} \, dx + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \leqslant x_0 \cdot \|\rho\|_\infty + \frac{\pi}{2} < \infty \ .$$

Damit ist das Maß $(-\ln)^\alpha \cdot \lambda_{]0,1[}$ beschränkt. Das Intervall $]0,1[$ ist beschränkt, also ist $\mathcal{P}$ in $\mathbf{L}^2\left(]0,1[, (-\ln)^\alpha\right)$ dicht, die Folge $\left(\operatorname{id}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ also total. Deren Bild $\left(e^{-n\operatorname{id}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unter Φ ist somit in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \rho\right)$ total.

(b) Es gilt

$$L_k^{(\alpha)} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}\left[\prod_{l=0}^{j-1}(\alpha + k - l)\right] \cdot \operatorname{id}^{k-j} \cdot (-1)^{k-j} \ .$$

Wegen den Orthogonalitätsrelationen $L_k^{(\alpha)} \perp \mathcal{P}_{k-1}$ folgt

$$\left(L_k^{(\alpha)} \middle| L_k^{(\alpha)} \right) = \left(\frac{\mathrm{id}^k \cdot (-1)^k}{k!} \middle| L_k^{(\alpha)} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty \frac{\mathrm{id}^k}{k!} \cdot \partial^k \left(\mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \right) d\lambda = \frac{1}{k!} \int_0^\infty \frac{\partial^k \left(\mathrm{id}^k \right)}{k!} \cdot \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \int_0^\infty \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \, d\lambda = \frac{(\alpha+k)!}{k!}$$

und somit die Behauptung.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 7

Aufgabe 1

(a) Nach Hauptsatz 3.2 genügt es, die Parseval-Gleichung zu zeigen. Die Behauptung folgt, indem man

$$c_k := \left(\widetilde{L}_k^{(\alpha)} \middle| e^{-n\cdot\mathrm{id}} \right)$$

setzt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| e^{-n\cdot\mathrm{id}} \right\|_{2,\rho}^2 = \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-(2n+1)\cdot x}\, dx = \frac{1}{(2n+1)^{\alpha+1}} \cdot \int_0^\infty y^\alpha \cdot e^{-y}\, dy = \frac{\alpha!}{(2n+1)^{\alpha+1}} \ .$$

Der k-te Fourier-Koeffizient von $e^{-n\cdot\mathrm{id}}$ ergibt sich zu

$$\left(\widetilde{L}_k^{(\alpha)} \middle| e^{-n\cdot\mathrm{id}} \right) = \sqrt{\frac{k!}{(\alpha+k)!}} \cdot \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(x) \cdot e^{-n\cdot x} \cdot \rho(x)\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{k!}{(\alpha+k)!}} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \int_0^\infty \partial^k \left(x^{\alpha+k} \cdot e^{-x} \right) \cdot e^{-n\cdot x}\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}} \cdot \int_0^\infty x^{\alpha+k} \cdot e^{-x} \cdot \partial^k \left(e^{-n\cdot x} \right) dx =$$

$$= \frac{n^k}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}} \cdot \int_0^\infty x^{\alpha+k} \cdot e^{-(n+1)\cdot x}\, dx =$$

$$= \frac{n^k}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}\, (n+1)^{\alpha+k+1}} \cdot \int_0^\infty y^{\alpha+k} \cdot e^{-y}\, dy =$$

$$= \frac{n^k\, (\alpha+k)!}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}\, (n+1)^{\alpha+k+1}} = \sqrt{\frac{(\alpha+k)!}{k!}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \ .$$

Es gilt aber mit $t = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \in [0,1]$

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{(2n+1)^{\alpha+1}} = (1-t)^{-(\alpha+1)} = \sum_{k=0}^\infty \binom{-\alpha-1}{k} \cdot (-1)^k \cdot t^{2k} = \frac{1}{\alpha!} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha+k)!}{k!} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2k} ,$$

da

$$\binom{\alpha+k}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha+k-j+1}{j} = (-1)^k \cdot \prod_{j=1}^k \frac{-(\alpha+1)-(k-j+1)+1}{j} =$$

$$= (-1)^k \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{-(\alpha+1)-i+1}{p} = (-1)^k \cdot \binom{-(\alpha+1)}{k} ,$$

wobei die Substitution $i = k - j + 1$ angewandt wurde. Dies zeigt die Parsevalrelation und damit die Behauptung.

(b) Offenbar bilden die $\widetilde{L}_k^{(\alpha)}$ ein Orthonormalsystem. Es reicht also Totalität zu zeigen. Da $\left(e^{-n\,\mathrm{id}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \rho\right)$ total (Blatt6, Aufgabe 3.a) und $e^{-n\,\mathrm{id}}$ im Abschluss des Aufspanns der $L_k^{(\alpha)}$ nach (a) liegt, folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Definiere

$$S\xi = \check{\xi} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) .$$

Es gilt $S^2 = 1$ und

$$\|S\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\xi(-x)|^2 \, e^{-x^2} \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\xi(x)|^2 \, e^{-(-x)^2} \, dx = \|\xi\|^2 .$$

Damit gilt für $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm S)$, daß $P_+ + P_- = 1$,

$$P_\pm^2 = \frac{1}{4}(1 \pm S)^2 = \frac{1}{4}(2 \pm 2S) = P_\pm \quad \text{und} \quad P_+P_- = (1+S)(1-S) = 1 - S^2 = 0 ,$$

sowie

$$\|P_\pm\| \leqslant \frac{1}{2}(1 + \|S\|) \leqslant 1 ,$$

also sind $P_\pm$ orthogonale Projektionen, deren Bilder $\mathbf{L}_u^2$ bzw. $\mathbf{L}_g^2$ orthogonal aufeinander stehen und deren Summe ganz $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ ist.

(b) Es gilt $\left(\xi \circ \mathrm{id}^2\right) \circ \sqrt{\cdot} = \xi$ auf $\mathbb{R}_+^*$ für alle $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$, also ist die Abbildung surjektiv. Isometrie gilt wegen

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = 2\int_0^\infty \left|\xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = \int_0^\infty |\xi(x)|^2 \, x^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} \, dx .$$

(c) Es gilt $\frac{1}{\sqrt{\cdot}} \cdot \left(\mathrm{id} \cdot \xi \circ \mathrm{id}^2\right) \circ \sqrt{\cdot} = \xi$ auf $\mathbb{R}_+^*$ für alle $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$, also ist die Abbildung surjektiv. Isometre gilt wegen

$$\int_{\mathbb{R}} \left|x \cdot \xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = 2\int_0^\infty x^2 \left|\xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = \int_0^\infty |\xi(x)|^2 \, x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \, e^{-x} \, dx .$$

(d) Bezeichne die Isometrien aus (ii) und (iii) mit $I_\pm$. $\left(\widetilde{L}_k^{\pm\frac{1}{2}}\right)$ sind hilbertsche Basen von $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{\mp\frac{1}{2}} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$ nach Aufgabe 1, also sind $I_\pm \widetilde{L}_k^{\left(\pm\frac{1}{2}\right)}$ hilbertsche Basen von $\mathbf{L}_{g/u}^2$. Dies ist die Behauptung.

(e) Setze

$$p_{2k} = I_+ \widetilde{L}_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \quad \text{und} \quad p_{2k+1} = I_- \widetilde{L}_k^{\left(+\frac{1}{2}\right)} \ .$$

Die (p_k) sind eine Familie von Orthogonalpolynomen in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\operatorname{id}^2}\right)$, ebenso die Hermitepolynome (H_k) . Daher gilt $H_k \in \mathbb{K} \cdot p_k$ und die (H_k) sind total.

(f) Der Leitkoeffizient von H_k ist 2^k , der von $L_k^{\left(\pm\frac{1}{2}\right)}$ ist $\frac{(-1)^k}{k!}$. Da $H_{2k} \in \mathbb{K} \cdot I_+ L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ und $H_{2k+1} \in \mathbb{K} \cdot I_- L_k^{\left(+\frac{1}{2}\right)}$, reciht es, die Leitkoeffizienten zu vergleichen. Es folgt

$$H_{2k} = (-1)^k \cdot k! \cdot 4^k \cdot L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \circ \operatorname{id}^2$$

und

$$H_{2k+1} = (-1)^k \cdot k! \cdot 2^{2k+1} \cdot \operatorname{id} \cdot L_k^{\left(+\frac{1}{2}\right)} \circ \operatorname{id}^2 \ .$$

Aufgabe 3

(a) Gäbe es $f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(X)$ mit $|\delta_x\rangle = |f\rangle$, für alle $\varphi \in \mathcal{D}(X \setminus \{x\})$ würde gelten

$$\langle \varphi | f \rangle = \langle \varphi | \delta_x \rangle = \overline{\varphi(x)} = 0 \ .$$

Da $\mathcal{D}(X \setminus \{x\})$ ein Test-Raum bzgl. $\lambda_{X \setminus \{x\}}$ ist, folgt $f = 0$ in $\mathbf{L}^1_{\text{loc}}(X \setminus \{x\})$. Dies gilt aber immer noch in $\mathbf{L}^1_{\text{loc}}(X)$ und ist widersprüchlich, da ein$\chi \in \mathcal{D}(X)$ existiert , so daß $\langle \chi | \delta_x \rangle \neq 0$.

(b) Es gilt

$$\partial \operatorname{signum} = \lambda_{\text{signum}} = 2\delta_0$$

folgt die Behauptung aus (a). Elementar gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle \varphi | \partial \operatorname{signum} \rangle = -\langle \varphi | \operatorname{signum} \rangle = \int_{-\infty}^0 \overline{\varphi} - \int_0^\infty \overline{\varphi} = 2\overline{\varphi(0)} = \langle \varphi | 2\delta_0 \rangle \ .$$

(c) Gäbe es $f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, so daß $|\partial^2 \operatorname{signum}\rangle = |f\rangle$, sei $F \in \mathcal{AC}(\mathbb{R})$ mit $\partial F = f$. Es folgt $\partial(\partial \operatorname{signum} - F) = 0$ und somit ist $\partial \operatorname{signum} - F$ eine konstante Funktion nach Satz 4.4, d.h. $\partial \operatorname{signum} \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und die Behauptung folgt aus (b).

Aufgabe 4 Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$|g(\varepsilon \cdot \operatorname{id}) \cdot f| \leqslant \|g\|_\infty \cdot |f| \ ,$$

so daß sich der Satz von Lebesgue in folgender Rechnung anwenden läßt :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int g \cdot f_\varepsilon \, d\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \int g(\varepsilon \cdot x) \cdot f(x) \, dx =$$

$$= \int \lim_{\varepsilon \to 0} [g(\varepsilon \cdot x) \cdot f(x)] \, dx = \int g(0) \cdot f \, d\lambda \ .$$

Dies liefert das Verlangte.

Funktionen $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ erfüllen die Voraussetzungen an g im ersten Teil und dieser zeigt

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \langle g | f_\varepsilon \rangle = g(0) = \langle g | \delta_0 \rangle \ .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Claude Portenier
Wintersemester 2004/2005

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Lösungsblatt 8

Aufgabe 1 Es genügt zu zeigen, daß die Differentialgleichung $\partial\mu = \nu$ eine Lösung besitzt. Dies ist gleichbedeutend, daß für alle $\psi \in \mathcal{D}(J)$ gilt

$$\langle \psi | \nu \rangle = \langle \psi | \partial\mu \rangle = -\langle \partial\psi | \mu \rangle \ ,$$

d.h. μ ist auf $\partial(\mathcal{D}(J))$ durch

$$\partial\psi \longmapsto -\langle \psi | \nu \rangle$$

festgelegt. Es gilt aber

$$\mathcal{D}(J) = \operatorname{Ker} \lambda_J \oplus \mathbb{C} \cdot \chi$$

$$\varphi = \left[\varphi - \overline{\langle \varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \chi\right] + \overline{\langle \varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \chi = \partial \int_{\inf J}^{\diamond} \left[\varphi - \overline{\langle \varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \chi\right] + \overline{\langle \varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \chi$$

für ein $\chi \in \mathcal{D}(J)$ mit $\langle \chi | \lambda_J \rangle = 1$ und somit ist für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\mu : \mathcal{D}(J) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto -\left\langle \int_{\inf J}^{\diamond} \left[\varphi - \overline{\langle \varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \chi\right] \middle| \nu \right\rangle + \overline{\langle \varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \alpha$$

eine Distribution in $\mathcal{D}(J)^*$, die die Differentialgleichung erfüllt. Es ist nicht nötig nachzuprüfen ! Aber zum Geniessen

$$\langle \varphi | \partial\mu \rangle = -\langle \partial\varphi | \mu \rangle =$$

$$= \left\langle \int_{\inf J}^{\diamond} \left[\partial\varphi - \overline{\langle \partial\varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \chi\right] \middle| \nu \right\rangle - \overline{\langle \partial\varphi | \lambda_J \rangle} \cdot \alpha = \langle \varphi | \nu \rangle$$

da $\langle \partial\varphi | \lambda_J \rangle = 0$ und $\int_{\inf J}^{\diamond} \partial\varphi = \varphi$.

Aufgabe 2 Sei $0 < \varepsilon_k \to 0$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt mit Lebesgue

$$\langle \varphi | \partial \ln|\cdot| \rangle = -\int \overline{\partial\varphi} \cdot \ln|\cdot| = -\lim_k \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_k} \overline{\partial\varphi} \cdot \ln|\cdot| + \int_{\varepsilon_k}^{\infty} \overline{\partial\varphi} \cdot \ln|\cdot| \right) =$$

$$= -\lim_k \left(\left[\overline{\varphi(t)} \cdot \ln(-t)\right]_{t=-\infty}^{-\varepsilon_k} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon_k} \overline{\varphi(t)} \frac{dt}{t} + \left[\overline{\varphi(t)} \cdot \ln t\right]_{t=\varepsilon_k}^{\infty} - \int_{\varepsilon_k}^{\infty} \overline{\varphi(t)} \frac{dt}{t} \right) =$$

$$= \lim_k \left(\left[\overline{\varphi} \cdot \ln|\cdot|\right]_{-\varepsilon_k}^{\varepsilon_k} + \int_{\mathbb{R} \smallsetminus]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[} \overline{\varphi(t)} \frac{dt}{t} \right) .$$

Nun gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left[\overline{\varphi} \cdot \ln|\cdot|\right]_{-\varepsilon_k}^{\varepsilon_k} = \frac{\overline{\varphi(\varepsilon_k)} - \overline{\varphi(0)}}{\varepsilon_k} \cdot \varepsilon_k \ln \varepsilon_k + \frac{\overline{\varphi(-\varepsilon_k)} - \overline{\varphi(0)}}{-\varepsilon_k} \cdot \varepsilon_k \ln \varepsilon_k \ .$$

Es gilt

$$\lim_k \frac{\overline{\varphi(\pm\varepsilon_k)} - \overline{\varphi(0)}}{\pm\varepsilon_k} = \overline{\partial\varphi(0)} \ ,$$

sowie mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_k (\varepsilon_k \ln \varepsilon_k) = -\lim_k \frac{\ln \varepsilon_k}{-\frac{1}{\varepsilon_k}} = -\lim_k \frac{\frac{1}{\varepsilon_k}}{\frac{1}{\varepsilon_k^2}} = 0 \ ,$$

also folgt die Behauptung.

Aufgabe 3 Durch Induktion genügt es zu zeigen, daß für $j = 1, \ldots, n$ und $\langle \mathrm{id} \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $\mathcal{F}f$ partiell differenzierbar bzgl. x_j ist. Da $\mathcal{F}f = \int e^{-2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \cdot f(x)\, dx$,

$$\left|\partial_j \left(e^{-2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \cdot f(x)\right)\right| = \left|x_j \cdot e^{-2\pi i \cdot (\mathrm{id}|x)} \cdot f(x)\right| \leqslant |x_j| \cdot |f(x)| \leqslant \langle x \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot |f(x)|$$

und $\langle \mathrm{id} \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot |f| \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ folgt die Behauptung aus Analysis, Hauptsatz 15.5.

Aufgabe 4

(a) Die Abbildung d hat sicherlich positive Werte, ist symmetrisch und translationsinvariant. Sind $\varphi \neq \psi$, so ist

$$d(\varphi, \psi) \geqslant \min(p_0(\varphi - \psi), 1) = \min(\|\varphi - \psi\|_\infty, 1) > 0 \ .$$

Sind $\varphi, \psi, \gamma \in F$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$p_k(\varphi - \psi) \leqslant p_k(\varphi - \gamma) + p_k(\gamma - \psi) \ .$$

Falls also $p_k(\varphi - \gamma), p_k(\psi - \gamma) \leqslant 1$, folgt

$$\min(p_k(\varphi - \psi), 1) = p_k(\varphi - \psi) \leqslant p_k(\varphi - \gamma) + p_k(\gamma - \psi)$$

$$= \min(p_k(\varphi - \gamma), 1) + \min(p_k(\gamma - \psi), 1) \ .$$

Falls Œ $p_k(\varphi - \gamma) > 1$, so gilt

$$\min(p_k(\varphi - \psi), 1) \leqslant 1 \leqslant 1 + \min(p_k(\gamma - \psi), 1) = \min(p_k(\varphi - \gamma), 1) + \min(p_k(\gamma - \psi), 1) \ .$$

In jedem Fall

$$\frac{1}{k+1} \min(p_k(\varphi - \psi), 1) \leqslant d(\varphi, \gamma) + d(\gamma, \psi) \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Die Dreiecksungleichung für d folgt sofort.

(b) Sei $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Ist k fest, so ist

$$\left\{\psi \in F \;\middle|\; d(\varphi, \psi) \leqslant \frac{\varepsilon}{k+1}\right\} \subset B_{p_k}(\varphi, \varepsilon) \ .$$

Umgekehrt sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$, dann ist

$$\bigcap_{k \leqslant n} B_{p_k}(\varphi, \varepsilon) \subset \{\psi \in F \mid d(\varphi, \psi) \leqslant \varepsilon\} \ .$$

Ist jetzt $(\varphi_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und gilt $\varphi = \lim_l \varphi_l$ bzgl. d , so existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(\varphi_l, \varphi) \leqslant \frac{\min(\varepsilon,1)}{k+1}$ für alle $l \geqslant N$; daraus folgt $p_k(\varphi_l - \varphi) \leqslant \varepsilon$ für alle $l \geqslant N$, d.h. $\varphi = \lim_l \varphi_l$ bzgl. p_k . Umgekehrt gilt dies für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $n \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$. Es existiert dann $N \in \mathbb{N}$, so daß $p_k(\varphi_l - \varphi) \leqslant \varepsilon$ für alle $k \leqslant n$ und $l \geqslant N$; somit folgt $d(\varphi_l, \varphi) \leqslant \varepsilon$, d.h. $\varphi = \lim_l \varphi_l$ bzgl. d .

(c) Seien $(\varphi_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine d-Cauchy-Folge, $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{k+1} p_k(\varphi_l - \varphi_m) \leqslant d(\varphi_l, \varphi_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{k+1}$$

für alle $l, m \geqslant N$, also gilt

$$\|\partial^\alpha \varphi_l - \partial^\alpha \varphi_m\|_\infty \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha (\varphi_l - \varphi_m) \right\|_\infty \leqslant p_k(\varphi_l - \varphi_m) \leqslant \varepsilon$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha|_1 \leqslant k$. Damit ist $\varphi := \lim_l \varphi_l \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$,

$$p_k(\varphi) \leqslant p_k(\varphi_N) + p_k(\varphi_N - \varphi) < \infty$$

und

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha (\varphi_l - \varphi) \right\|_\infty = \lim_{m \geqslant N} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha (\varphi_l - \varphi_m) \right\|_\infty \leqslant \varepsilon \ ,$$

d.h. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\lim_l p_k(\varphi_l - \varphi) = 0$. Damit gilt $\varphi = \lim_l \varphi_l$ bzgl. d nach (b).