Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Vorlesung

HILBERTRAUM-METHODEN

UND ANWENDUNGEN

Prof. Dr. C. Portenier

Wintersemester 2004/2005

Fassung vom 25. Januar 2005

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Wintersemester 2004/2005

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 1

Abgabe : Donnerstag, 28.10.2004

Aufgabe 1 (Die zentrale Projektion auf die Sphäre)

(a) Sei F ein normierter Raum. Zeigen Sie, daß für alle $\varphi, \psi \in F \setminus \{0\}$ gilt

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leqslant \frac{2}{\max\left(\|\varphi\|, \|\psi\|\right)} \cdot \|\varphi - \psi\| \ .$$

(b) Sei $F = \left(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty\right)$. Zeigen Sie: Zu $\eta \in]0,2[$ gibt es $x, y \in F$ mit $|x|_\infty = 1 < |y|_\infty$ und

$$\left| x - \frac{y}{|y|_\infty} \right|_\infty \geqslant \eta \cdot |x - y|_\infty \ .$$

(c) Seien $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum und $\xi, \eta \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\left\| \frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \right\| \leqslant \frac{1}{\min\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right)} \cdot \|\xi - \eta\| \ .$$

Aufgabe 2 (Wann kommen Normen von Formen?) Es sei F ein normierter Raum. Zeigen Sie: Falls die Parallelogrammgleichung gilt, d.h.

$$\|\varphi - \psi\|^2 + \|\varphi + \psi\|^2 = 2\left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\right) \quad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in F \ ,$$

so ist F ein Prähilbertraum, d.h., es gibt genau eine positiv Hermitesche Sesquilinearform $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$, so daß

$$\|\varphi\|^2 = \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in F \ .$$

Hinweis: Überlegen Sie, mit welcher Formel sich $\mathfrak{s}$ durch $\|\cdot\|$ ausdrücken ließe, wenn F bereits ein Prähilbertraum wäre. Zeigen Sie zunächst Additivität in beiden Variablen.

Aufgabe 3 (Wie Formen nicht-ausgeartet werden.) Es sei F ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ eine positiv Hermitesche Sesquilinearform.

(a) Es sei $p(\varphi) = \mathfrak{s}(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ und $N = \{p = 0\}$. Zeigen Sie, daß N ein Untervektorraum von F ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{s}$ auf F/N eine nicht-ausgeartete Sesquilinearform induziert.
Hinweis: Zeigen Sie, daß p auf F/N eine Norm induziert.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 2

Abgabe : Donnerstag, 4.11.2004

Aufgabe 1 (Die Produktformel für absolutstetige Funktionen) Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$.

(a) Sind F, G absolut stetige Funktionen auf J , so ist $F \cdot G$ absolut stetig und es gilt

$$\partial (F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \ .$$

Hinweis : Satz von Fubini.

(b) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist die Funktion $|\mathrm{id}|^\alpha$ absolut stetig auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie $\partial |\mathrm{id}|^\alpha$.

Aufgabe 2 (Randwerte von absolutstetigen Funktionen) Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$.

(a) Ist $F \in \mathcal{AC}(J)$ und $\partial F \in \mathbf{L}^1(J)$, so besitzt F eine stetige Fortsetzung auf $J \cup \{\inf J, \sup J\}$, die noch mit F bezeichnet wird. Für $c \in \{\inf J, \sup J\}$ gilt noch

$$F(t) = F(c) + \int_c^t \partial F \quad \text{für alle } t \in J \cup \{\inf J, \sup J\} \ .$$

(b) Seien J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ mit $\partial F \cdot G$, $F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J)$. Zeigen Sie, daß $\lim_{a \longrightarrow \inf I+} (F \cdot G)(a)$ und $\lim_{b \longrightarrow \sup I-} (F \cdot G)(b)$ existieren mit

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim\nolimits_{b \to \sup J-} (F \cdot G)(b) - \lim\nolimits_{a \to \inf J+} (F \cdot G)(a) =$$

$$=: \Big[F \cdot G \Big]_{\inf J}^{\sup J} \ .$$

Aufgabe 3 (Der Sobolev-Raum $\mathcal{H}^{(1)}(J)$) Seien J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) := \left\{ \xi \in \mathcal{AC}(J) \ \middle| \ \xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J) \right\} \ .$$

Zeigen Sie :

(a) Die Funktion

$$(\xi, \eta) \longmapsto \int_J \left(\overline{\xi} \cdot \eta + \overline{\partial \xi} \cdot \partial \eta \right) d\lambda$$

definiert eine Hilbertraum-Struktur auf $\mathcal{H}^{(1)}(I)$.

(b) Ist $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$, so besitzt ξ eine stetige Fortsetzung auf $J \cup \{\inf J, \sup J\}$, die noch mit ξ bezeichnet wird. Ist $c \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$, so gilt

$$\xi(c) = 0 \ ,$$

d.h.

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) \subset \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right) \ ,$$

wobei $\overline{J}$ der Abschluß von J in $\mathbb{R}$ ist.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 3

Abgabe : Montag, 15.11.2004

Aufgabe 1 (Die fastperiodischen Funktionen) Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $e_\lambda \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ mit

$$e_\lambda(x) := e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot t} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und $\mathcal{TP}$ sei der von den e_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, erzeugte Vektorraum der *trigonometrischen Polynome* .

(a) Zeigen Sie: Es gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{e_\lambda} \cdot e_\mu = \delta_{\lambda\mu} \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$

(b) Zeigen Sie: Durch

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi|\,\psi)_{\mathcal{TP}} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{\varphi} \cdot \psi$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathcal{TP}$ definiert. Was kann man also von $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sagen ?

(c) Sei $\mathcal{FP}$ der Vektorraum der *fastperiodischen Funktionen*, d.h. der Abschluss von $\mathcal{TP}$ in $\mathcal{C}^b(\mathbb{R})$. Lässt sich das obige Skalarprodukt eindeutig stetig auf $\mathcal{FP}$ fortsetzen ? Führen Sie den Beweis so weit Sie können. Versuchen Sie, mit geeigneten Vermutungen zu schließen.

Hinweis : Parallelogrammgleichung.

Aufgabe 2 (Orthogonalität in Prähilberträumen) Im Prähilbertraum $\mathcal{C}([-1,1])$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi|\psi) = \int_{-1}^{1} \overline{\varphi} \cdot \psi \, d\lambda \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathcal{C}([-1,1])$$

seien

$$M := \{\varphi \in \mathcal{C}([-1,1]) \mid \varphi(t) = 0 \text{ für } t \geqslant 0\}$$

und

$$N := \{\psi \in \mathcal{C}([-1,1]) \mid \psi(t) = 0 \text{ für } t \leqslant 0\} .$$

Zeigen Sie, daß M und N , aber nicht $M + N$ in $\mathcal{C}([-1,1])$ abgeschlossen sind. Berechnen Sie $M^\perp$ und $M^{\perp\perp}$. Was fällt Ihnen auf in Bezug auf den Projektionssatz ?

Was passiert, wenn man $\mathcal{C}([-1,1])$ durch $\mathbf{L}^2([-1,1])$ ersetzt ?

Aufgabe 3 (Charakterisierung der orthogonalen Projektionen)
Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $P \in L(\mathcal{H})$ mit $P^2 = P$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) P ist eine orthogonale Projektion, d.h. $P = P_{\mathcal{G}}$, wobei $\mathcal{G}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist.

(b) $(P\xi | \eta) = (\xi | P\eta)$ für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Man sagt P sei *selbst-adjungiert* .

(c) P ist stetig mit Norm $\|P\| \leqslant 1$.

(d) $P(\mathcal{H}) = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$.

In diesem Fall gilt $P = 0$ oder $\|P\| = 1$.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 4

Abgabe : Montag, 22.11.2004

Aufgabe 1 (Konstanz lokal integrierbarer Funktionen) Sei J ein offenes Intervall, $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ lokal integrierbar und

$$\mathcal{K}^{(1)}(J) = \mathcal{C}^{(1)}(J) \cap \mathcal{K}(J) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^{(1)}(J) \mid \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt} \right\} .$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\chi \in \mathcal{K}(J)$ mit

$$\mathcal{K}(J) = \partial \mathcal{K}^{(1)}(J) \oplus \mathbb{K} \cdot \chi .$$

(b) Falls

$$\int_J \partial\varphi \cdot f \, d\lambda = 0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J) \ ,$$

so ist f λ-fast überall konstant.

(c) Falls

$$\int_J \varphi \cdot f \, d\lambda = 0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J) \ ,$$

so ist $f = 0$ λ-fast überall.

Aufgabe 2 (Unterräume von Hilberträumen)

(a) Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $M, N \subset \mathcal{H}$ Unterräume mit $M \perp N$. Zeigen Sie :

$$M + N \text{ ist abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad M, N \text{ sind abgeschlossen.}$$

(b) Seien

$$M := \left\{ \xi \in \ell^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \xi(2k) = \frac{1}{2k+1} \xi(2k+1) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$N := \left\{ \eta \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \eta(2k) = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \right\} .$$

Zeigen Sie: M und N sind abgeschlossene Unterräume von $\ell^2(\mathbb{N})$, $M \cap N = \{0\}$ und

$$M + N \neq \overline{M + N} = \ell^2(\mathbb{N}) .$$

Aufgabe 3 (Gerade und ungerade Funktionen) Zu $\xi : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ sei

$$\overset{\vee}{\xi} : x \longmapsto \xi(-x) : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{K} \ ,$$

sowie

$$\mathbf{L}^2_g([-1,1]) := \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \ | \ \xi = \overset{\vee}{\xi} \right\}$$

der Raum der geraden und

$$\mathbf{L}^2_u([-1,1]) := \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \ | \ \xi = -\overset{\vee}{\xi} \right\}$$

der Raum der ungeraden $\mathbf{L}^2$-Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{L}^2([-1,1]) = \mathbf{L}^2_g([-1,1]) \boxplus \mathbf{L}^2_u([-1,1])$.

(b) $\mathbf{L}^2([0,1])$ ist isometrisch isomorph zu $\mathbf{L}^2_g([-1,1])$, $\mathbf{L}^2_u([-1,1])$ und $\mathbf{L}^2([-1,1])$. Geben Sie möglichst "einfache" Isometrien an.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 5

Abgabe : Montag, 29.11.2004

Aufgabe 1 (Zerlegung von ∂^2)

(a) Sei F ein Prähilbertraum und $(\varphi, \psi) \subset F$ ein orthonormiertes Paar. Dann ist $\left(\frac{\varphi+\psi}{\sqrt{2}}, \frac{\varphi-\psi}{\sqrt{2}}\right)$ auch ein orthonormiertes Paar, d.h.

$$\mathbb{K} \cdot \varphi \boxplus \mathbb{K} \cdot \psi = \mathbb{K} \cdot \frac{\varphi + \psi}{\sqrt{2}} \boxplus \mathbb{K} \cdot \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{2}} \ .$$

(b) Die Systeme

$$\left(\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi\cdot)\right)_{k\geqslant 1} \quad \text{und} \quad (1) \cup \left(\sqrt{2} \cdot \cos(k\pi\cdot)\right)_{k\geqslant 1}$$

bilden hilbertsche Basen von $\mathbf{L}^2([0,1])$.

Hinweis : Aus Analysis III ist $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\exp(2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}))_{k\in\mathbb{Z}}$ eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2([0,1])$ und benutzen Sie Blatt 4, Aufgabe 3.

(c) Finden Sie alle Lösungen $f \in \mathcal{AC}^{(2)}([0,1])$ des Randwertproblems

$$\partial^2 f + \lambda f = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = f(1) = 0$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Wieso ist dies kein Widerspruch zu der Eindeutigkeit im Hauptsatz 2.5 aus der Vorlesung.

Was kann man für den Operator ∂^2 auf $\mathcal{AC}^{(2)}([0,1])$ also sagen ?

Aufgabe 2 (Bernstein-Polynome) Für jede stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ definiert man das *n-te Bernstein-Polynom $B_n f \in \mathcal{P}_n([0,1])$ von f* durch

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1] \ .$$

(a) Zeigen Sie: Falls $f = 1$ oder $f = \mathrm{id}$, gilt $B_n f = f$.

(b) Berechnen Sie für $f = \mathrm{id}(1-\mathrm{id})$ die Folge $B_n f$ und zeigen Sie, daß in diesem Fall gilt

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{gleichmäßig auf } [0,1] \ .$$

(c) Zeigen Sie die Ungleichung

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n} \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1] \ ,$$

indem Sie die Summe durch Bestimmung von $B_n f$ für ein geeignetes f ausrechnen.

Aufgabe 3 (Satz von Bernstein) Es sei $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Betrachten Sie zu $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta > 0$ die Mengen

$$A_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \delta \right\}$$

und

$$B_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; \left| x - \frac{k}{n} \right| > \delta \right\} .$$

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine von x unabhängige Zahl $C < \infty$, so daß für alle $\delta > 0$

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{2C}{\delta^2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \quad \text{für alle} \quad k \in B_n(\delta) .$$

(b) Folgern Sie: Es gilt

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{gleichmäßig auf } [0,1] .$$

Hinweis: Aufgabe 2.

(c) Zeigen Sie: Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist $\mathcal{P}([a,b]) \subset \mathcal{C}([a,b])$ dicht.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 6

Abgabe : Montag, 6.12.2004

Aufgabe 1 (Der Grad von p in der Rodrigues-Formel)

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $p \in \mathcal{P}(J)$ ein Polynom. Seien Konstanten $(d_k) \subset \mathbb{R}_+^*$ gegeben und die Polynome $p_k \in \mathcal{P}_k(J)$ definiert durch die Rodrigues-Formel

$$p_k = \frac{1}{d_k \rho} \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

(a) Sei $q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho}$. Zeigen Sie die Gleichung

$$p \cdot \partial^2 p = d_2 \cdot p_2 - q^2 - \partial(q \cdot p) \ .$$

(b) Beweisen Sie durch Widerspruch, daß $\deg p \leqslant 2$ gilt.

Aufgabe 2 (Rodrigues-Formel und hypergeometrische Differentialgleichung)

Es seien die gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe 1 gegeben. Man definiert

$$Lf = -\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f)$$

für alle zweimal differenzierbaren Funktionen $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$.

(a) Drücken Sie $-d_k \cdot \rho \cdot Lp_k$ durch eine Kombination der Funktionen $\partial^j \left(\rho \cdot p^k\right)$ für $j = k, k+1, k+2$ aus, indem Sie die Rodrigues-Formel für p_1 und die Produktregel in geeigneter Weise auf $\partial^{k+1}\left(\rho \cdot p^k\right)$ anwenden.

(b) Zeigen Sie, daß p_k die k-te *hypergeometrische Differentialgleichung*

$$Lp_k = -k \cdot \left[d_1 \cdot \partial p_1 + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right] \cdot p_k$$

erfüllt.

Hinweis: Wenden Sie die Leibnizformel auf den Ausdruck $\partial^{k+1}\left(p \cdot \partial\left(\rho p^k\right)\right)$ auf zwei verschiedene Weisen an. Wie kann Ihnen Aufgabe 1 dabei helfen ?

Aufgabe 3 (Die Laguerre-Polynome bilden eine hilbertsche Basis : I)

Sei $\alpha > 0$. Man betrachte $\rho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ auf dem Intervall $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$.

(a) Zeigen Sie, daß $\left(e^{-n \cdot \mathrm{id}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \rho\right)$ total ist.
Hinweis : Finden Sie eine geeignete Isometrie

$$\mathbf{L}^2\left(]0,1[\,, (-\ln)^\alpha\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \rho\right)$$

und eine totale Folge in $\mathbf{L}^2\left(]0,1[\,,(-\ln)^\alpha\right)$.

(b) Zeigen Sie: Die Laguerre-Polynome $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ erfüllen

$$\left\|L_k^{(\alpha)}\right\|_{2,\rho}^2 = \frac{(\alpha+k)!}{k!} \ ,$$

wobei

$$\beta! = \Gamma\left(\beta+1\right) = \int_0^\infty y^\beta \cdot e^{-y}\, dy \quad \text{für } \beta > -1 \ .$$

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 7

Abgabe : Montag, 13.12.2004

Aufgabe 1 (Die Laguerre-Polynome bilden eine hilbertsche Basis : II)

Es seien die gleichen Voraussetzungen wie in Blatt 6, Aufgabe 3 gegeben.

(a) Sei $\widetilde{L}_k^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{k!}{(\alpha+k)!}} \cdot L_k^{(\alpha)}$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit

$$e^{-n \cdot \mathrm{id}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \widetilde{L}_k^{(\alpha)} \qquad \text{in } \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \rho\right) .$$

Hinweis: Wenden Sie Hauptsatz 3.2 an. Es gilt

$$(1+x)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} \cdot x^k \quad \text{für } x \in \left]-1,1\right[\text{ und } \beta \in \mathbb{R}$$

und

$$\binom{\beta+k}{k} = \frac{(\beta+k)!}{\beta! \cdot k!} \quad \text{für } \beta > -1 \ , \ k \in \mathbb{N} \ , \quad \text{wobei} \quad \binom{\beta}{k} = \prod_{l=1}^{k} \frac{\beta - l + 1}{l} .$$

Man zeige auch die Formel

$$\binom{\beta+k}{k} = (-1)^k \cdot \binom{-\beta-1}{k} \quad \text{für } \beta \in \mathbb{R} \ , \ k \in \mathbb{N} .$$

(b) Zeigen Sie: Die $\widetilde{L}_k^{(\alpha)}$ bilden eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \rho\right)$.

Aufgabe 2 (Die Hermite-Polynome bilden eine hilbertsche Basis)

Man betrachte den Hilbertraum $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$. Man definiert wie üblich die Unterräume $\mathbf{L}_g^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ der geraden und $\mathbf{L}_u^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ der ungeraden Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) = \mathbf{L}_g^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) \boxplus \mathbf{L}_u^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) .$$

(b) Die Abbildung

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \mathrm{id}^2 : \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}_g^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

(c) Die Abbildung

$$\psi \longmapsto \mathrm{id} \cdot \psi \circ \mathrm{id}^2 : \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}_u^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

(d) $\left(\widetilde{L}_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2\right)_{k\in\mathbb{N}} \cup \left(\mathrm{id} \cdot \widetilde{L}_k^{\left(\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$.

(e) Die Hermite-Polynome $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilden ein totales System von orthogonalen Polynomen in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$.

(f) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$H_{2k} = (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot k! \cdot L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2$$

und

$$H_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot k! \cdot \mathrm{id} \cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)} \circ \mathrm{id}^2 \ .$$

Aufgabe 3 (Distributionen, die keine Funktionen sind)

Zeigen Sie, daß es keine Funktion $f \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^1(X)$ gibt, so daß

(a)

$$f = \delta_x$$

für $x \in X$, eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$,
sowie für $X = \mathbb{R}$

(b)

$$f = \partial\,\mathrm{signum} \ .$$

(c)

$$f = \partial^2\,\mathrm{signum} \ .$$

Aufgabe 4 (Dirac-Folgen) Sei $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int f \, d\lambda = 1$. Für $\varepsilon > 0$ definiert man f_ε auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ .$$

Zeigen Sie :

Ist $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig in 0 , so ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int g \cdot f_\varepsilon \, d\lambda = g(0) \ .$$

Folgern Sie, daß

$$\delta_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^* \ .$$

gilt.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 8

Abgabe : Montag, 20.12.2004

Aufgabe 1 (Stammdistribution) Sei J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß jede Distribution $\nu \in \mathcal{D}(J)^*$, bis auf eine additive Konstante, eine einzige Stammdistribution $\mu \in \mathcal{D}(J)^*$ besitzt, d.h. die distributive Differentialgleichung

$$\partial\mu = \nu$$

besitzt, bis auf eine additive Konstante, eine einzige Lösung $\mu \in \mathcal{D}(J)^*$.

Aufgabe 2 (Der Cauchy-Hauptwert) Zeigen Sie, daß für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle \varphi | \partial(\ln|\mathrm{id}|) \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\smallsetminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \overline{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx =: \left\langle \varphi \middle| HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \right\rangle .$$

Was können Sie sagen, wenn $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Aufgabe 3 (Differenzierbarkeit einer Fouriertransformierten) Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung : Für alle Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$ mit $\langle \mathrm{id}\rangle^{\frac{k}{2}} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, gilt $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\not\partial^\alpha \mathcal{F}f = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \mathcal{F}(\mathrm{id}^\alpha \cdot f) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha|_1 \leqslant k .$$

Aufgabe 4 (Der Schwartz-Raum) Sei $d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$d(\varphi,\psi) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \cdot \min(p_k(\varphi-\psi),1) .$$

Zeigen Sie:

(a) d ist eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die translationsinvariant ist, d.h.

$$d(\varphi+\chi,\psi+\chi) = d(\varphi,\psi) \qquad \text{für alle} \quad \varphi,\psi,\chi \in F .$$

(b) Genau dann konvergiert eine Folge $(\varphi_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn $\lim_l p_k(\varphi_l - \varphi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist bzgl. d vollständig.

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 9

Abgabe : Montag, 10.1.2005

Aufgabe 1 (Funktionen und Distributionen) Zeigen Sie :

(a)

$$\exp \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \smallsetminus \mathcal{S}(\mathbb{R})' \ .$$

Hinweis: Methode des gleitenden Buckels. Wählen Sie ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$ und betrachten Sie die Folge $(\varphi(\diamond - l))_{l \in \mathbb{N}}$.

(b)

$$\exp \cdot \cos(\exp) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \quad \text{, sowie } \in \mathcal{S}(\mathbb{R})' \ .$$

(c) Wie rechnet man $\langle \varphi | \exp \cdot \cos(\exp) \rangle$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bzw. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 Seien X eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Zeigen Sie, daß

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(X)^* \longrightarrow \mathcal{D}(X)^*$$

stetig ist.

Aufgabe 3 (Konvergenz von trigonometrischen Reihen) Zeigen Sie :

(a) Die kanonische Injektion $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})' : f \longmapsto f \cdot \lambda$ ist stetig.

(b) Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}}$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ konvergent.

Hinweis : Weierstraß-Kriterium und Stetigkeit der Ableitung in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

Aufgabe 4 (Der Sinus Cardinalis) Man definiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \\ & \text{falls} \\ 1 & \end{cases} \begin{matrix} x \neq 0 \\ \\ x = 0 \end{matrix}$$

die Funktion Sinus Cardinalis. Zeigen Sie, dass sinc sowohl in $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$, als auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ liegt. Berechnen Sie die Fouriertransformierte.

Hinweis: Die Fouriertransformation ist bijektiv !

Hilbertraum-Methoden und Anwendungen

Blatt 10

Abgabe : Montag, 24.1.2005

Aufgabe 1 (Der Dirac Kamm und die Summationsformel von Poisson)
Berechnen Sie die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R})'$$

und zeigen Sie, daß

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$$

gilt und folgern Sie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

Aufgabe 2 Sei X eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$.

(a) Man sagt, daß eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ gegen $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ konvergiert, falls für alle $K \in \mathfrak{K}(X)$ gilt

$$\lim\nolimits_k \int_K |f_k - f| \, d\lambda_X = 0 \ .$$

Zeigen Sie, daß

$$f = \lim\nolimits_k f_k \quad \text{in } \mathcal{D}(X)^* \ .$$

(b) Seien $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f, g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ mit $(\partial^\alpha f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$. Konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen f und $(\partial^\alpha f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen g in $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, so gilt $\partial^\alpha f = g$.

(c) $\mathcal{H}^{(m)}(X)$ ist ein Hilbert-Raum.